Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Волосивец, Уточненные теоремы теории приближения в пространстве p -абсолютно непрерывных функций, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 5, 701–711

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3079>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 09:21:07

УДК 517.51

УТОЧНЕННЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ p -АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

С. С. Волосивец

В работе доказываются прямые и обратные теоремы теории приближений в пространстве p -абсолютно непрерывных функций, которые обобщают результаты А. П. Терехина так же, как результаты М. Ф. Тимана в L_p обобщают классические теоремы теории приближений. Даны уточнения основных теорем для функций с квазимонотонными коэффициентами Фурье, в ряде случаев доказана неулучшаемость результатов.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. Как хорошо известно, понятия наилучшего приближения и модуля гладкости k -го порядка, а также прямая и обратная теоремы приближения в пространствах 2π -периодических функций C и L_p , $1 < p < \infty$ (см. [1; с. 272–274 и с. 344–347]), переносятся на случай достаточно общих пространств с нормой, инвариантной относительно сдвига. Такие теоремы можно получать и для пространств C_p , определяемых ниже. С другой стороны, А. П. Терехиным [2] были установлены прямые и обратные теоремы приближения в этом пространстве с использованием модулей непрерывности дробных порядков, естественно связанных с C_p . В настоящей работе мы показываем, что их можно уточнить в таком же направлении, как это сделано Тиманом в случае пространств L_p (см. [3] и [4]). Первое такое уточнение для неравенства типа Маршо сделано нами [5; теорема 4] (см. лемму 7).

2. Определения и вспомогательные результаты. Пусть $f(x)$ – 2π -периодическая действительная ограниченная функция и $\xi = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n = x_0 + 2\pi\}$ – разбиение периода. По определению вводится p -вариационная сумма

$$\kappa_{\xi}^p(f) = \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{1/p}$$

и модуль непрерывности дробного порядка

$$\omega_{1-1/p}(f, \delta) = \sup \left\{ \kappa_{\xi}^p(f) : \max_i (x_i - x_{i-1}) \leq \delta \right\}.$$

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы РФ”, грант № НШ-1295.2003.1.

При этом ξ берутся со всевозможными x_0 , чтобы величина $\omega_{1-1/p}(f, \delta)$ была инвариантной относительно сдвига. При $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, определяется также дробный модуль непрерывности высшего порядка

$$\omega_{k-1/p}(f, \delta) = \sup\{\omega_{1-1/p}(\Delta_h^{k-1}f(x), |h|) : |h| \leq \delta\},$$

где $\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i f(x + ih)$. Известно, что при всех $k \in \mathbb{N}$ и $0 < \delta \leq 2\pi/n$ верно неравенство

$$\omega_{k-1/p}(f, n\delta) \leq n^{k-1/p} \omega_{k-1/p}(f, \delta),$$

(доказательство см. в [6]), с чем и связано обозначение $\omega_{k-1/p}(f, \delta)$.

Пространством p -абсолютно непрерывных функций при $1 < p < \infty$ называется множество C_p функций $f(x)$ со свойством $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_{1-1/p}(f, h) = 0$. Оно является банаховым, если в нем ввести норму

$$\|f\|_p = \max(\omega_{1-1/p}(f, 2\pi), \sup\{|f(x)| : x \in [0, 2\pi]\}).$$

Пространство $V_p = \{f : \|f\|_p < \infty\}$ впервые рассмотрел Винер [7], пространство C_p , эквивалентно определенное, было введено Л. Ч. Юнгом [8]. Пусть T_n – множество тригонометрических полиномов порядка не выше n . Тогда по определению

$$E_n(f)_p = \inf\{\|f - t_{n-1}\|_p : t_{n-1} \in T_{n-1}\}.$$

Как обычно, L_p – пространство интегрируемых в p -й степени на $[0, 2\pi]$ функций с нормой

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{и} \quad \omega_k(f, \delta)_{L_p} := \sup\{\|\Delta_h^k f(x)\|_{L_p} : |h| < \delta\}.$$

Наилучшее приближение $E_n(f)_{L_p}$ определяется аналогично $E_n(f)_p$. Везде далее C , C_i – константы, разные в различных ситуациях. Выражение $A \asymp B$ означает, что существуют $C_2 > C_1 > 0$ такие, что $C_1 A \leq B \leq C_2 A$.

Изложим теперь необходимые нам вспомогательные результаты.

ЛЕММА 1 (см. [3] и [4]). Пусть $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma = \max(p, 2)$, $\beta = \min(p, 2)$. Тогда для $f \in L_p$ имеют место неравенства

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{L_p} \leq C_1(k, p) n^{-k} \left(\sum_{i=1}^n i^{\beta k-1} E_i^\beta(f)_{L_p} \right)^{1/\beta}, \quad (1)$$

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{L_p} \geq C_2(k, p) n^{-k} \left(\sum_{i=1}^n i^{\gamma k-1} E_i^\gamma(f)_{L_p} \right)^{1/\gamma}, \quad (2)$$

где $C_i(k, p) > 0$, $i = 1, 2$.

Из (2) легко выводится классическая теорема Джексона–Стечкина в L_p [1; с. 274]

$$E_n(f)_{L_p} \leq C_3(k) \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{L_p}. \quad (2')$$

Следующие результаты установлены Терехиным в [2].

ЛЕММА 2. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ и $f \in V_p$. Тогда

$$\omega_k(f, \delta)_{L_p} \leq \delta^{1/p} \omega_{k-1/p}(f, \delta). \quad (3)$$

Если при тех же k и p функция $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна, а $f^{(k)} \in L_p$, то

$$\omega_{k-1/p}(f, \delta) \leq \|f^{(k)}\|_{L_p} \delta^{k-1/p}. \quad (4)$$

Для $t_n \in T_n$, $1 < p < \infty$ и $k \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\|t_n^{(k)}\|_{L_p} \leq \pi^{1/p} n^{k-1/p} \|t_n\|_p. \quad (5)$$

Неравенство следующей леммы 3 было приведено в [9] без обоснования, доказательство же из [6] содержит опечатки. Поэтому здесь дается краткое доказательство.

ЛЕММА 3. Пусть $t_n \in T_n$, $1 < p < \infty$. Тогда

$$\|t_n\|_p \leq C(p) n^{1/p} \|t_n\|_{L_p}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [9] показано, что при $1 < p < \infty$ и

$$\int_0^\pi t^{-1/p-1} \omega_2(f, t)_{L_p} dt = A < \infty$$

функция f эквивалентна $f_0 \in C_p$ и $\|f_0\|_p \leq CA$. Используя то, что $t_n \in C_p$, и разбивая интеграл выше на два: от 0 до π/n и от π/n до π , с учетом неравенства $\omega_2(f, \delta)_{L_p} \leq \delta \omega_1(f', \delta)_{L_p}$ и неравенства Бернштейна в L_p (см. [1; с. 116, 230]) легко получаем (6).

ЛЕММА 4. Пусть $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ и $f \in C_p$. Тогда

$$\omega_{k-1/p}\left(f, \frac{1}{n}\right) \leq C n^{1/p-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k-1/p-1} E_\nu(f)_p.$$

Лемма 4 фактически используется в [2], но не приведена там в явном виде. Ее доказательство можно найти в [6].

Следующая лемма, установленная Б. И. Голубовым в [10], будет применяться при доказательстве неумлучшаемости теорем 2 и 3.

ЛЕММА 5. Пусть $1 < p < \infty$ и $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ – положительная убывающая к нулю последовательность. Тогда функция $g(x) = \sum_{k=1}^\infty (a_k/k) \sin kx$ принадлежит C_p и для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$E_n(g)_p \leq C(p) a_n. \quad (7)$$

Результаты, составляющие содержание леммы 6, можно найти в [11; с. 308] и [12].

ЛЕММА 6. Пусть $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ – неотрицательная последовательность, для которой существует $\tau \geq 0$ такое, что последовательность $\{n^{-\tau} a_n\}_{n=1}^\infty$ убывает. Пусть

при $c > 1$ по определению $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$, а при $c < 1$ соответственно $s_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i$. Тогда при $\gamma > 0$ имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-c} s_n^{\gamma} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-c} (na_n)^{\gamma}.$$

При $\gamma > 1$ оно выполняется и без условия убывания $\{n^{-\tau} a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

ЛЕММА 7 [5; теорема 4]. Пусть $m, j, r+1 \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $f \in C_p$, $s = \min(p, 2)$. При $r > 0$ пусть также существует интеграл $\int_0^1 \omega_{j-1/p}(f, u) u^{-r-1} du$. Тогда существует $f^{(r)} \in C_p$ и справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \omega_{m-1/p}(f^{(r)}, t) &= O\left(r \int_0^t \omega_{j-1/p}(f, u) u^{-r-1} du \right. \\ &\quad \left. + t^{m-1/p} \left(\int_t^1 \omega_{j-1/p}^s(f, u) u^{-s(m+r-1/p)-1} du \right)^{1/s} \right). \end{aligned}$$

ЛЕММА 8 [14; с. 345]. Пусть дан лакунарный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$, где $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$, $n_k \in \mathbb{N}$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$ сходится. Тогда для любого $r > 0$ сумма лакунарного ряда обладает свойством

$$C_1(r, q) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right)^{1/2} \leq \|f\|_{L_r} \leq C_2(r, q) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right)^{1/2}.$$

ЛЕММА 9 [14; с. 423]. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in L_p$, $\{a_k, b_k\}_{k=0}^{\infty}$ — коэффициенты Фурье функции f . Тогда сопряженный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx)$ сходится по норме L_p к $g \in L_p$ и при этом $\|g\|_{L_p} \leq C_1(p) \|f\|_{L_p}$.

Как следствие, имеет место неравенство

$$\|f(x) - S_n(f, x)\|_{L_p} \leq C_2(p) E_n(f)_{L_p},$$

где $S_n(f, x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$.

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in L_p$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1} E_n(f)_{L_p}$ сходится. Тогда $f(x)$ эквивалентна $f_0(x) \in C_p$ и при этом

$$E_n(f_0)_p \leq C \left(n^{1/p} E_n(f)_{L_p} + \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{1/p-1} E_i(f)_{L_p} \right), \quad (8)$$

где $C = C(p) > 0$. Если же $f \in C_p$ такова, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_{k-1/p}(f, 1/n) n^{-1}$ сходится при некотором $k \in \mathbb{N}$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ по норме пространства C_p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть полином $t_n \in T_{n-1}$ таков, что $\|f - t_n\|_{L_p} \leq C_1 E_n(f)_{L_p}$, в частности, согласно лемме 9, в качестве t_n можно взять соответствующую сумму Фурье $S_n(f, x)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|t_{2^k n} - t_{2^{k-1} n}\|_p. \quad (9)$$

В силу неравенства (6) он мажорируется рядом

$$\begin{aligned} C_2 \sum_{k=1}^{\infty} (2^k n)^{1/p} \|t_{2^k n} - t_{2^{k-1} n}\|_{L_p} &\leq C_3 \sum_{k=1}^{\infty} (2^k n)^{1/p} E_{2^{k-1} n}(f)_{L_p} \\ &\leq C_4 \left(n^{1/p} E_n(f)_{L_p} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{1/p-1} E_k(f)_{L_p} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Поэтому ряд (9) сходится при любом $n \in \mathbb{N}$, в частности, при $n = 1$ такой же ряд без норм сходится в C_p к функции $\varphi \in C_p$. Но этот же ряд сходится в L_p к $f - t_1$, т.е. $\varphi = f - t_1$ п.в., что и требовалось доказать. Ясно, что $E_n(f_0)_p$ или $\|f_0 - S_n(f_0)\|_p$ не превосходят суммы ряда (9) и, тем более, правой части (10). Для доказательства второй части теоремы применим теорему Джексона–Стечкина в L_p и неравенства (3) и (10). Имеем

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_p &\leq C_5 \left(n^{1/p} \omega_k \left(f, \frac{1}{n} \right)_{L_p} + \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{1/p-1} \omega_k \left(f, \frac{1}{i} \right)_{L_p} \right) \\ &\leq C_5 \left(\omega_{k-1/p} \left(f, \frac{1}{n} \right) + \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{-1} \omega_{k-1/p} \left(f, \frac{1}{i} \right) \right). \end{aligned}$$

В силу условия оба слагаемых в правой части стремятся к нулю. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Во второй части теоремы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_{k-1/p}(f, 1/n) n^{-1}$ можно заменить на ряд $\sum_{n=1}^{\infty} E_n(f)_p n^{-1}$ аналогично доказательству теоремы 3 ниже.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p < \infty$, $(r+1) \in \mathbb{N}$ и при $r > 0$ производная $f^{(r)}$ существует везде, причем $f^{(r)} \in C_p$. Тогда при $k \in \mathbb{N}$ и $\gamma = \max(p, 2)$ справедливо неравенство

$$\omega_{k-1/p} \left(f^{(r)}, \frac{1}{n} \right) \geq C n^{-k+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{\gamma(k+r-1/p)-1} E_{\nu}^{\gamma}(f)_p \right)^{1/\gamma},$$

где постоянная $C = C(p, k, r) > 0$ не зависит от f и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть полином $t_n \in T_{n-1}$ таков, что $E_n(f^{(r)})_p = \|f^{(r)} - t_n\|_p$. Тогда, как доказано в [5; теорема 1], $\omega_{k-1/p}(f^{(r)}, 1/n) \geq C_1 \omega_{k-1/p}(t_n, 1/n)$, где $C_1 = C_1(k, p) > 0$, поэтому в силу (2) и (3) получаем

$$\omega_{k-1/p} \left(f^{(r)}, \frac{1}{n} \right) \geq C_1 n^{1/p} \omega_k \left(t_n, \frac{1}{n} \right) \geq C_2 n^{-k+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{\gamma k-1} E_{\nu}^{\gamma}(t_n)_{L_p} \right)^{1/\gamma}. \quad (11)$$

Далее пользуемся неравенством $E_n(f)_p \leq C_3 E_n(f^{(r)})_p / n^r$ (см., например, [10]), полуаддитивностью $E_n(f)_p$ относительно f , леммой 6, и (8). Имеем

$$\begin{aligned} n^{-k+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{\gamma(k+r-1/p)-1} E_{\nu}^{\gamma}(f)_p \right)^{1/\gamma} \\ \leq C_3 n^{-k+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{\gamma(k-1/p)-1} E_{\nu}^{\gamma}(f^{(r)})_p \right)^{1/\gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_4 n^{-k+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{\gamma(k-1/p)-1} (E_\nu^\gamma(t_n)_p + E_n^\gamma(f^{(r)})_p) \right)^{1/\gamma} \\
&\leq C_5 n^{-k+1/p} \left\{ n^{\gamma(k-1/p)} E_n^\gamma(f^{(r)})_p + \sum_{\nu=1}^n \nu^{\gamma(k-1/p)-1} \left((\nu^{1/p} E_\nu(t_n)_{L_p})^\gamma \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\sum_{m=\nu+1}^n m^{1/p-1} E_m(t_n)_{L_p} \right)^\gamma \right) \right\}^{1/\gamma} \\
&\leq C_6 \left\{ E_n(f^{(r)})_p + n^{-k+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{\gamma k-1} E_\nu^\gamma(t_n)_{L_p} \right)^{1/\gamma} \right\}.
\end{aligned}$$

Учитывая (11) и неравенство Джексона $E_n(f^{(r)})_p \leq C_7 \omega_{k-1/p}(f^{(r)}, 1/n)$ (см. [2]), завершаем доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < p < \infty$, $s = \min(p, 2)$, $(r+1) \in \mathbb{N}$ и при $r > 0$ сходится ряд $\sum_{i=1}^\infty i^{r-1} E_i(f)_p$. Тогда $f^{(r)} \in C_p$ и при $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\omega_{m-1/p}\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) \leq C \left\{ n^{-m+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{s(m+r-1/p)-1} E_\nu^s(f)_p \right)^{1/s} + r \sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{r-1} E_\nu(f)_p \right\},$$

где $C = C(m, r, p) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему сначала при $r = 0$. С помощью обычного перехода от интегралов к суммам неравенство леммы 7 можно записать в виде $(k, j \in \mathbb{N})$

$$\omega_{k-1/p}\left(f, \frac{1}{n}\right) \leq C_1 n^{-k+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{s(k-1/p)-1} \omega_{j-1/p}^s\left(f, \frac{1}{\nu}\right) \right)^{1/s}. \quad (12)$$

Применяя к этому неравенству леммы 4 и 6 (для выполнения условий леммы 6 надо взять $j > k$), получаем

$$\begin{aligned}
\omega_{k-1/p}\left(f, \frac{1}{n}\right) &\leq C_2 n^{-k+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{s(k-1/p)-1} \nu^{s(-j+1/p)} \left(\sum_{i=1}^{\nu} i^{j-1/p-1} E_i(f)_p \right)^s \right)^{1/s} \\
&\leq C_3 n^{-k+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{s(k-j)-1} (\nu \nu^{j-1/p-1} E_\nu(f)_p)^s \right)^{1/s} \\
&= C_3 n^{-k+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{s(k-1/p)-1} E_\nu^s(f)_p \right)^{1/s}. \quad (12')
\end{aligned}$$

При $r > 0$ воспользуемся теоремой 3 из [17], согласно которой при выполнении условий данной теоремы имеет место неравенство

$$\omega_{m-1/p}\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) \leq C_4 \left(n^r \omega_{m+r-1/p}\left(f, \frac{1}{n}\right) + \sum_{i=n+1}^\infty i^{r-1} E_i(f)_p \right).$$

Подставляя в последнее неравенство (12') при $k = m + r$, доказываем нашу теорему при $r > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f \in C_2$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\omega_{k-1/2}\left(f, \frac{1}{n}\right) \asymp n^{-k+1/2} \left(\sum_{i=1}^n i^{2k-2} E_i^2(f)_2 \right)^{1/2}.$$

Для доказательства достаточно положить $r = 0$ и $\gamma = s = p = 2$ в теоремах 2 и 3.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 < p < \infty$ и существует $\tau \geq 0$ такое, что последовательности $\{n^{-\tau} a_n\}_1^\infty$ и $\{n^{-\tau} b_n\}_1^\infty$ убывают, где $\{a_n, b_n\}_0^\infty$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Тогда для любых $k, n \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение

$$\omega_{k-1/p}\left(f, \frac{1}{n}\right) \asymp n^{-k+1/p} \left(\sum_{i=1}^n i^{pk-2} E_i^p(f)_p \right)^{1/p}.$$

При этом константы в соответствующих неравенствах зависят лишь от k и p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in L_p$ и ее коэффициенты Фурье $\{a_n, b_n\}$ таковы, что $\{n^{-\tau} a_n\}_1^\infty$ и $\{n^{-\tau} b_n\}_1^\infty$ убывают при некотором $\tau \geq 0$. В.М. Кокилашвили [13] показал, что в этом случае при $k \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{L_p} \asymp n^{-k} \left(\sum_{i=1}^n i^{pk-1} E_i^p(f)_{L_p} \right)^{1/p}. \quad (13)$$

Применяя оценку снизу из (13) аналогично доказательству теоремы 2, получаем оценку снизу для $\omega_{k-1/p}(f, 1/n)$. Проводя рассуждения, как при доказательстве теоремы 4 из [5], получаем неравенство, аналогичное (12) с p вместо s . В обоих случаях в качестве t_n вместо многочлена наилучшего приближения следует взять средние Валле-Пуссена $\sigma_{n,n}(f)$ (см. [14; с. 135]), косинус-коэффициенты которых при фиксированном n есть $a_1, \dots, a_n, (n-1)a_{n+1}/n, \dots, a_{2n}/n, 0, \dots$, а синус-коэффициенты находятся по аналогичной формуле. Ясно, что если последовательность $\{n^{-\tau} a_n\}_1^\infty$ убывает, то последовательность косинус-коэффициентов $\sigma_{n,n}$, умноженная на $n^{-\tau}$, тем более обладает этим свойством, и то же верно для синус-коэффициентов. Тот факт, что $\omega_{k-1/p}(\sigma_{n,n}(f), \delta) \leq 3\omega_{k-1/p}(f, \delta)$, следует из свойств свертки (см. [10; доказательство леммы 4]) и свойств ядра Валле-Пуссена. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 3, получаем оценку сверху для $\omega_{k-1/p}(f, 1/n)$ в теореме 4. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. 1) Пусть последовательность $\{\varepsilon_\nu\}_1^\infty$ убывает и стремится к нулю, $k \in \mathbb{N}$, $1 < p \leq 2$. Тогда существует $f \in C_p$, для которой $E_n(f)_p \leq C_1 \varepsilon_n$ и

$$\omega_{k-1/p}\left(f, \frac{1}{n}\right) \geq C_2 n^{-k+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{pk-2} \varepsilon_\nu^p \right)^{1/p}.$$

2) Пусть $\{\varepsilon_\nu\}_1^\infty$ – убывающая к нулю последовательность, удовлетворяющая условию Бари

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{\nu} \leq C_3 \varepsilon_n. \quad (14)$$

Тогда существует $f \in C_p$, $p \geq 2$, для которой $E_n(f)_p \leq C_4 \varepsilon_n$ и для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\omega_{k-1/p}\left(f, \frac{1}{n}\right) \geq C_5 n^{-k+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{2(k-1/p)-1} \varepsilon_\nu^2 \right)^{1/2}.$$

При этом положительные постоянные C_2 и C_5 не зависят от f и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим функцию $g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\varepsilon_\nu / \nu) \sin \nu x$. Тогда согласно лемме 5 $E_n(g)_p \leq C_1 \varepsilon_n$ и в силу (3) и теоремы 1.3' из [13] имеем

$$\begin{aligned} \omega_{k-1/p}\left(g, \frac{1}{n}\right) &\geq n^{1/p} \omega_k\left(g, \frac{1}{n}\right)_{L_p} \geq C_2 n^{1/p-k} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{p(k+1)-2} \left(\frac{\varepsilon_\nu}{\nu} \right)^p \right)^{1/p} \\ &= C_2 \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{p k - 2} \varepsilon_\nu^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

2) Рассмотрим функцию

$$h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\left(\frac{\varepsilon_{2^i}}{2^{i/p}} \right)^2 - \left(\frac{\varepsilon_{2^{i+1}}}{2^{(i+1)/p}} \right)^2 \right)^{1/2} \cos 2^i x.$$

Как легко видеть из леммы 8, при всех $q \geq 1$ и $m \in \mathbb{N}$

$$E_{2^m}(h)_{L_q} \asymp \left(\sum_{i=m}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon_{2^i}}{2^{i/p}} \right)^2 - \left(\frac{\varepsilon_{2^{i+1}}}{2^{(i+1)/p}} \right)^2 \right)^{1/2} = \varepsilon_{2^m} 2^{-m/p}. \quad (15)$$

Пусть $2^m < n \leq 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда (см. доказательство теоремы 1) получаем

$$E_n(h)_p \leq E_{2^{m+1}}(h)_p \leq C_3 \sum_{i=m+1}^{\infty} 2^{i/p} E_{2^i}(h)_{L_p},$$

так как $E_{2^{m+1}}(h)_{L_p} \asymp E_{2^{m+1}}(h)_{L_p}$. Таким образом, в силу условия (14)

$$E_n(h)_p \leq C_4 \sum_{i=m+1}^{\infty} \varepsilon_{2^i} \leq C_5 \varepsilon_{2^{m+1}} \leq C_5 \varepsilon_n.$$

Далее, применяя оценку

$$\omega_k\left(h, \frac{\pi}{n}\right)_{L_p} \geq C_6 \omega_k\left(h, \frac{\pi}{n}\right)_{L_2} \geq C_7 n^{-k} \left(\sum_{i=1}^m 2^{2ki} E_{2^i}^2(h)_{L_2} \right)^{1/2}$$

(см. [15; п. 1.3]), имеем с помощью (3) и (15)

$$\begin{aligned} \omega_{k-1/p}\left(h, \frac{1}{n}\right)_p &\geq C_8 n^{1/p} \omega_k\left(h, \frac{\pi}{n}\right)_{L_p} \geq C_9 n^{-k+1/p} \left(\sum_{i=1}^m 2^{2ki-2i/p} \varepsilon_{2^i}^2 \right)^{1/2} \\ &\geq C_{10} n^{-k+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{2(k-1/p)-1} \varepsilon_\nu^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. По поводу условия (14) и ему эквивалентных см. [16]. Оно естественным образом появляется при доказательстве неулучшаемости некоторых теорем об абсолютной сходимости (см. [6]).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть последовательность $\{\varepsilon_\nu\}_1^\infty$ убывает к нулю. При $1 < p < \infty$ положим по определению

$$E_p(\varepsilon) = \{f \in C_p : E_n(f)_p \leq \varepsilon_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда при $1 < p \leq 2$ без ограничений, а для $p > 2$ при выполнении условия (14), имеет место соотношение

$$\sup \left\{ \omega_{k-1/p} \left(f, \frac{1}{n} \right) : f \in E_p(\varepsilon) \right\} \asymp n^{-k+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{s(k-1/p)-1} \varepsilon_\nu^s \right)^{1/s}.$$

Таким образом, при некоторых ограничениях теорема 3 является неулучшаемой.

ТЕОРЕМА 6. Пусть последовательность $\{\varepsilon_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ убывает к нулю.

1) Если $p \geq 2$, то существует $f \in C_p$ такая, что $E_n(f)_p \leq C\varepsilon_n$ при $n \in \mathbb{N}$ и

$$\omega_{k-1/p} \left(f, \frac{1}{n} \right) \leq C_1 n^{-k+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{pk-2} \varepsilon_\nu^p \right)^{1/p}.$$

2) Если $1 < p < 2$ и выполнено условие Бари (14), то существует $f \in C_p$ такая, что $E_n(f)_p \leq C\varepsilon_n$ при $n \in \mathbb{N}$ и

$$\omega_{k-1/p} \left(f, \frac{1}{n} \right) \leq C_2 n^{-k+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{2(k-1/p)-1} \varepsilon_\nu^2 \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае 1) снова рассмотрим функцию

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{\nu} \sin \nu x.$$

Тогда нужные нам неравенства получаются по лемме 5 и теореме 4. В случае 2) снова рассмотрим функцию $h(x)$ из доказательства теоремы 5. Имеем $E_n(h)_p \leq C_3 \varepsilon_n$. Из формулы, выражающей симметрическую k -ю разность ряда Фурье (см., например, [6]), леммы 9 и леммы 8 легко следует, что

$$\|\Delta_t^k h(x)\|_{L_p} \asymp \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} ((\alpha_{2^\nu})^2 - (\alpha_{2^{\nu+1}})^2) \sin^{2k} \frac{2^\nu t}{2} \right)^{1/2},$$

где $\alpha_k = \varepsilon_k/k^{1/p}$. Используя оценку $|\sin x| \leq |x|$, получаем при $0 < t \leq 1/n$, $2^m < n \leq 2^{m+1}$

$$\begin{aligned} \|\Delta_t^k h(x)\|_{L_p} &\leq C_4 \left(\sum_{\nu=0}^m (\alpha_{2^\nu}^2 - \alpha_{2^{\nu+1}}^2) \left(\frac{2^\nu t}{2} \right)^{2k} + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} (\alpha_{2^\nu}^2 - \alpha_{2^{\nu+1}}^2) \right)^{1/2} \\ &\leq C_5 \left(n^{-2k} \sum_{\nu=0}^m 2^{2k\nu} \alpha_{2^\nu}^2 + \alpha_n^2 \right)^{1/2} \leq C_6 n^{-k} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{2k-1} \alpha_\nu^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\omega_k\left(h, \frac{1}{n}\right)_{L_p} \leq C_6 n^{-k} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{2(k-1/p)-1} \varepsilon_\nu^2 \right)^{1/2}. \quad (16)$$

Теперь воспользуемся теоремой 2 из [9], перейдя от интегралов к рядам: если $f \in L_p$ и сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} i^{1/p-1} \omega_k(f, 1/i)_{L_p}$, то f эквивалентна $f_0 \in C_p$ и справедливо неравенство

$$\omega_{k-1/p}\left(f, \frac{1}{n}\right) \leq C_7 \left(n^{1/p} \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{L_p} + \sum_{i=n}^{\infty} i^{1/p-1} \omega_k\left(f, \frac{1}{i}\right)_{L_p} \right). \quad (17)$$

По лемме 6, используя (16), ряд $\sum_{i=1}^{\infty} i^{1/p-1} \omega_k(f, 1/i)_{L_p}$ можно оценить через ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i/i$, откуда следует его сходимость. В силу (16)

$$n^{1/p} \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{L_p} \leq C_6 n^{-k+1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{2(k-1/p)-1} \varepsilon_\nu^2 \right)^{1/2}. \quad (18)$$

Подставляя (16) во второе слагаемое из правой части (17), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{\infty} i^{1/p-1} \omega_k\left(f, \frac{1}{i}\right)_{L_p} &\leq C_8 \left(\sum_{i=n}^{\infty} i^{1/p-k-1} \left(\sum_{\nu=1}^n \nu^{2(k-1/p)-1} \varepsilon_\nu^2 \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=n}^{\infty} i^{1/p-1-k} \left(\sum_{\nu=n}^i \nu^{2(k-1/p)-1} \varepsilon_\nu^2 \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части последнего выражения имеет такой же порядок, как правая часть (18), ко второму же применим лемму 6, учитывая, что $k+1-1/p > 1$. Получаем, что оно не превосходит $C_9 \sum_{i=n}^{\infty} i^{-1} \varepsilon_i \leq C_{10} \varepsilon_n$. Последнее выражение также оценивается правой частью (18). Суммируя вышеприведенные оценки, доказываем теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Данная теорема показывает неулучшаемость теоремы 2 при некоторых ограничениях.

Автор выражает свою признательность профессорам Б. И. Голубову и А. П. Терехину за ценные обсуждения результатов, представленных в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматгиз, М., 1960.
- [2] А. П. Терехин, “Приближение функций ограниченной p -вариации”, *Изв. вузов. Матем.*, **2** (1965), 171–187.
- [3] М. Ф. Тиман, “Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p ”, *Матем. сб.*, **46:1** (1958), 125–132.
- [4] М. Ф. Тиман, “О теореме Джексона в пространстве L_p ”, *Укр. матем. ж.*, **18:1** (1966), 134–137.

- [5] С. С. Волосивец, “Полиномы наилучшего приближения и соотношения между модулями непрерывности в пространствах функций ограниченной p -вариации”, *Изв. вузов. Матем.*, **9** (1996), 21–26.
- [6] S. S. Volosivets, “Convergence of series of Fourier coefficients of p -absolutely continuous functions”, *Anal. Math.*, **26**:1 (2000), 63–80.
- [7] N. Wiener, “The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients”, *J. Math. Phys.*, **3** (1924), 72–94.
- [8] L. C. Young, “An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration”, *Acta Math.*, **67** (1936), 251–282.
- [9] А. П. Терехин, “Интегральные свойства гладкости периодических функций ограниченной p -вариации”, *Матем. заметки*, **2**:3 (1967), 289–300.
- [10] Б. И. Голубов, “О наилучшем приближении p -абсолютно непрерывных функций”, *Некоторые вопросы теории функций и функционального анализа*, **4**, Изд-во Тбил. ун-та, Тбилиси, 1988, 85–99.
- [11] Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Г. Поля, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.
- [12] А. А. Конюшков, “Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье”, *Матем. сб.*, **44**:1 (1958), 53–84.
- [13] В. М. Кокилашвили, “О приближении периодических функций”, *Тр. Тбил. матем. ин-та*, **34** (1968), 51–81.
- [14] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, **1**, Мир, М., 1965.
- [15] Н. А. Ильясов, “Приближение периодических функций средними Зигмунда”, *Матем. заметки*, **39**:3 (1986), 367–382.
- [16] Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, “Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций”, *Тр. ММО*, **5** (1956), 483–522.
- [17] С. С. Волосивец, “Асимптотические характеристики одного компакта гладких функций в пространстве функций ограниченной p -вариации”, *Матем. заметки*, **57**:2 (1995), 214–227.

С. С. Волосивец

Саратовский государственный университет

E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Поступило

27.08.2003

Исправленный вариант

27.05.2006