Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Степанов, И. Г. Шандра, Семь классов гармонических диффеоморфизмов, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 5, 752–761

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm308>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 02:37:12

УДК 514.764.25

СЕМЬ КЛАССОВ ГАРМОНИЧЕСКИХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

С. Е. Степанов, И. Г. Шандра

В статье получены два необходимых и достаточных условия гармоничности диффеоморфизма $f: M \rightarrow \overline{M}$ риманова многообразия (M, g) на риманово многообразии $(\overline{M}, \bar{g})$. С помощью теории представлений групп инвариантным образом выделены семь классов таких гармонических диффеоморфизмов и частично описана геометрия каждого класса.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Теория гармонических отображений римановых многообразий получила самостоятельный статус только в 50-х годах прошлого столетия. А с начала 60-х годов она стала переживать бурный подъем, продолжающийся и до настоящего времени, в результате чего публикации по гармоническим отображениям уже исчисляются сотнями (см. обзоры [1]–[3] и [4, с. 171–192]).

Несмотря на такое обилие публикаций, на сегодняшний день не существует какой-либо геометрически стройной теории гармонических диффеоморфизмов римановых многообразий, в противоположность теории гармонических субмерсий (см. обзор [5]). Это резко контрастирует, например, с теорией проективных отображений многообразий (см., например, [6]; [7] и [8]), в рамках которой существует теория проективных диффеоморфизмов (см. [9]), завершаемая их полной классификацией (см. [10]).

Настоящей работой авторы намерены восполнить данный пробел и заявить новую тему исследований. В предлагаемой статье получены необходимые и достаточные условия гармоничности диффеоморфизма римановых многообразий; инвариантным образом выделены семь классов гармонических диффеоморфизмов и частично описана геометрия каждого.

В основе статьи лежит пленарный доклад, прочитанный на международной конференции [11].

2. Гармонические диффеоморфизмы римановых многообразий. Рассмотрим римановы многообразия (M, g) и $(\overline{M}, \bar{g})$ размерностей m и n соответственно. Гладкое отображение $f: M \rightarrow \overline{M}$ называется *гармоническим* (см., например, [3] и [4, с. 171]), если оно задает экстремум *функционала Дирихле*

$$E_{\Omega}(f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|df\|^2 dV$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-06281.

для произвольного относительно компактного открытого подмножества $\Omega \subset M$ по отношению к вариациям f с компактным носителем в Ω . Здесь $\|df\|$ – норма дифференциала df отображения f , вычисленная в метрике расслоения $T^*M \otimes f^{-1}(T\bar{M})$, сечением которого является df , и dV – элемент объема многообразия (M, g) . Пусть $\{x^1, \dots, x^m\}$ – локальные координаты в окрестности U точки $x \in M$ и $\{\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m\}$ – локальные координаты в окрестности $\bar{U} \supset f(U)$ точки $\bar{x} = f(x) \in \bar{M}$. Полагаем далее Γ_{ij}^k и $\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ для $i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, m$ и $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, \dots, n$ символами Кристофеля связностей Леви–Чивита ∇ и $\bar{\nabla}$ в окрестностях U и $\bar{U}$ многообразий (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ соответственно. Тогда для гармоничности отображения $f: M \rightarrow \bar{M}$ необходимо и достаточно выполнения уравнений Эйлера–Лагранжа (см., например, [3])

$$g^{ij}\{\partial_i\partial_j f^\alpha - \partial_k f^\alpha \Gamma_{ij}^k + \partial_i f^\beta \partial_j f^\gamma (\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \circ f)\} = 0, \quad (2.1)$$

где $\partial_i = \partial/\partial x^i$ и g^{ij} – контравариантные компоненты тензора g .

Пусть теперь $\dim M = \dim \bar{M} = m$ и отображение $f: M \rightarrow \bar{M}$ является диффеоморфизмом. Тогда (см. [12, с. 67]) существуют системы локальных координат $\{x^1, \dots, x^m\}$ и $\{\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m\}$ в окрестностях точек x и $\bar{x} = f(x)$ соответственно такие, что отображение f локально можно задать равенствами $\bar{x}^1 = x^1, \dots, \bar{x}^m = x^m$. Если обозначить через g_{ij} и $\bar{g}_{ij}$ компоненты метрических тензоров g и $\bar{g}$, а через Γ_{ij}^k и $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ – символы Кристофеля связностей Леви–Чивита ∇ и $\bar{\nabla}$ римановых многообразий (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ по отношению к общей по отображению f системе локальных координат $\{x^1, \dots, x^m\}$, то уравнениям (2.1) можно придать вид

$$g^{ij}T_{ij}^k = 0, \quad (2.2)$$

где $T_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k$ – локальные компоненты симметрического тензорного поля T типа $(1, 2)$, которое называется *тензором деформации* $T = \bar{\nabla} - \nabla$ связности Леви–Чивита ∇ многообразия (M, g) при отображении f на многообразие $(\bar{M}, \bar{g})$ (см., например, [9, с. 71]).

Для произвольного диффеоморфизма $f: M \rightarrow \bar{M}$ тензор деформации $T = \bar{\nabla} - \nabla$ рассматривают (см., например, [9, с. 71] и [13, с. 162]) как гладкое сечение расслоения $TM \otimes S^2M$. В случае же гармонического диффеоморфизма T в силу условия (2.2) является бесследовым симметрическим тензорным полем – сечением расслоения $TM \otimes S_0^2M$. Справедлива

ТЕОРЕМА 2.1. *Для того чтобы диффеоморфизм $f: M \rightarrow \bar{M}$ многообразия (M, g) на многообразие $(\bar{M}, \bar{g})$ был гармоническим, необходимо и достаточно, чтобы тензор деформации $T = \bar{\nabla} - \nabla$ связности Леви–Чивита ∇ многообразия (M, g) при отображении f на многообразии $(\bar{M}, \bar{g})$ был сечением тензорного расслоения $TM \otimes S_0^2M$.*

При условии существования диффеоморфизма $f: M \rightarrow \bar{M}$ на римановых многообразиях $(\bar{M}, \bar{g})$ и (M, g) в общей по отображению f системе локальных координат $\{x^1, \dots, x^m\}$ выполняются уравнения соответственно

$$\bar{\nabla}_k g_{ij} = -g_{lj}T_{ik}^l - g_{il}T_{jk}^l, \quad \nabla_k \bar{g}_{ij} = \bar{g}_{lj}T_{ik}^l + \bar{g}_{il}T_{jk}^l, \quad (2.3)$$

из которых находим выражения компонент тензора деформации $T = \bar{\nabla} - \nabla$

$$T_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(-\bar{\nabla}_i g_{jl} - \bar{\nabla}_j g_{il} + \bar{\nabla}_l g_{ij}), \quad T_{ij}^k = \frac{1}{2}\bar{g}^{kl}(\nabla_i \bar{g}_{jl} + \nabla_j \bar{g}_{il} - \nabla_l \bar{g}_{ij}), \quad (2.4)$$

где $\bar{g}^{kl}$ – контравариантные компоненты тензора $\bar{g}$. Тогда уравнениям (2.2) на основании (2.4) можно придать вид $g^{kl}(2\nabla_l \bar{g}_{kj} - \nabla_j \bar{g}_{kl}) = 0$ или же равносильный им вид

$$g^{kl}(2\bar{\nabla}_l g_{kj} - \bar{\nabla}_j g_{kl}) = 0. \quad (2.5)$$

Доказана следующая

ТЕОРЕМА 2.2. *Для того чтобы диффеоморфизм $f: M \rightarrow \bar{M}$ многообразия (M, g) со связностью Леви–Чивита ∇ на многообразии $(\bar{M}, \bar{g})$ со связностью Леви–Чивита $\bar{\nabla}$ был гармоническим, необходимо, чтобы в общей по отображению f системе локальных координат $\{x^1, \dots, x^m\}$ выполнялись дифференциальные уравнения $g^{kl}(2\nabla_l \bar{g}_{kj} - \nabla_j \bar{g}_{kl}) = 0$ или равносильные им уравнения $g^{kl}(2\bar{\nabla}_l g_{kj} - \bar{\nabla}_j g_{kl}) = 0$.*

3. Групповой подход к изучению гармонических диффеоморфизмов. Заменяем в дальнейших рассуждениях тензор деформации $T = \bar{\nabla} - \nabla$ тензорным полем $\tilde{T} \in T^*M \otimes S_0^2M$ с локальными компонентами $T_{ijk} = g_{il}T_{jk}^l$.

Выделим семь классов гармонических диффеоморфизмов римановых многообразий $f: M \rightarrow \bar{M}$, используя свойства симметрии тензорного поля $\tilde{T} \in T^*M \otimes S_0^2M$. Для этого найдем все неприводимые относительно действия ортогональной группы $O(m, \mathbb{R})$ подпространства $\mathcal{T}(E) = E^* \otimes S_0^2E$, где $E = T_x M$ и $E^* = T_x^* M$ в произвольной точке $x \in M$. Решать эту задачу будем с помощью теории представлений групп (см., например, [14]).

Определим три подпространства из $\mathcal{T}(E)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1(E) &= S_0^3E, \\ \mathcal{T}_2(E) &= \{\tilde{T} \in \mathcal{T}(E) \mid \tilde{T}(a, b, c) + \tilde{T}(b, c, a) + \tilde{T}(c, a, b) = 0, \quad \tilde{T}_{12}(a) = 0\}, \\ \mathcal{T}_3(E) &= \left\{ \tilde{T} \in \mathcal{T}(E) \mid \tilde{T}(a, b, c) = (m^2 + m - 2)^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times \left[\tilde{T}_{12}(c)q(a, b) + \tilde{T}_{12}(b)(a, c) - \frac{2}{m}\tilde{T}_{12}(a)q(b, c) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где $\tilde{T}_{12}(c) = \sum_{k=1}^m \tilde{T}(e_k, e_k, c)$ для ортонормированного базиса $\{e_1, \dots, e_m\}$ пространства E , $q = g_x$ и $a, b, c \in E$. Непосредственно проверяется, что пространство $\mathcal{T}(E)$ является ортогональной суммой подпространств $\mathcal{T}_1(E)$, $\mathcal{T}_2(E)$ и $\mathcal{T}_3(E)$. Более того, эти подпространства неприводимы относительно действия группы $O(m, \mathbb{R})$. Последнее следует из того, что пространство $O(m, \mathbb{R})$ -инвариантных квадратичных форм на $\mathcal{T}(E)$ имеет размерность 3. Точнее, это пространство порождается следующими формами:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tilde{T}) &= \sum_{i,j,k=1}^m [\tilde{T}(e_i, e_j, e_k)]^2, \quad \Phi_2(\tilde{T}) = \sum_{i,j,k=1}^m \tilde{T}(e_i, e_j, e_k)\tilde{T}(e_j, e_i, e_k), \\ \Phi_3(\tilde{T}) &= \sum_{i,j=1}^m [\tilde{T}(e_i, e_i, e_j)]^2. \end{aligned}$$

Следствием этого будет разложение тензорного поля $\tilde{T}$ на три части, соответствующие неприводимым компонентам действия группы $O(m, \mathbb{R})$. Этому поточечному разложению поля $\tilde{T}$ соответствует “грубая” классификация гармонических диффеоморфизмов, когда к одному классу относятся диффеоморфизмы, для которых $\tilde{T}$ – сечение одного из неприводимых подрасслоений $\mathcal{T}_1(TM)$, $\mathcal{T}_2(TM)$ и $\mathcal{T}_3(TM)$ или их прямых сумм. Принимая во внимание канонический изоморфизм $g_x: T_x M \cong T_x^* M$, сформулируем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гармонический диффеоморфизм $f: M \rightarrow \overline{M}$ многообразия (M, g) со связностью Леви–Чивита ∇ на многообразии $(\overline{M}, \bar{g})$ со связностью Леви–Чивита $\bar{\nabla}$ принадлежит классу J , если в каждой точке $x \in M$ тензор деформации $T = \bar{\nabla} - \nabla$ принадлежит инвариантному подпространству $J(T_x M)$ тензорного пространства $T_x^* M \otimes S_0^2 T_x M$.

Пополним список классов еще одним, для которого $\tilde{T}$ является сечением подрасслоения $\mathcal{T}_1(TM) \cap \mathcal{T}_2(TM) \cap \mathcal{T}_3(TM)$, т.е. классом диффеоморфизмов, определяемым условием $T = 0$. Тогда будет справедливой

ТЕОРЕМА 3.1. *Инвариантным образом выделяются семь классов гармонических диффеоморфизмов $f: M \rightarrow \overline{M}$ многообразия (M, g) на многообразие $(\overline{M}, \bar{g})$, для каждого из которых тензор деформации $T = \bar{\nabla} - \nabla$ связности Леви–Чивита ∇ многообразия (M, g) при отображении f на многообразии $(\overline{M}, \bar{g})$ является сечением соответствующих инвариантных подрасслоений $\mathcal{T}_1(TM)$, $\mathcal{T}_2(TM)$, $\mathcal{T}_3(TM)$, $\mathcal{T}_1(TM) \cap \mathcal{T}_2(TM) \cap \mathcal{T}_3(TM)$ и их прямых сумм.*

4. Геометрия семи классов гармонических диффеоморфизмов. Произвольный гармонический диффеоморфизм $f: M \rightarrow \overline{M}$ класса $\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ характеризуется условием $\tilde{T} \in \mathcal{T}_1(TM) \oplus \mathcal{T}_2(TM)$, которому в локальных координатах можно придать вид следующих равенств:

$$g^{ij}T_{ijk} = 0, \quad g^{ij}T_{kij} = 0. \quad (4.1)$$

На каждом из многообразий (M, g) и $(\overline{M}, \bar{g})$ в общей по отображению f локальной системе координат $\{x^1, \dots, x^m\}$ для символов Кристофеля Γ_{ij}^k и $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ выполняются равенства (см., например, [15, с. 159] и [13, с. 29]) $\Gamma_{kj}^k = \partial_j \ln \sqrt{\det g}$ и $\bar{\Gamma}_{kj}^k = \partial_j \ln \sqrt{\det \bar{g}}$. На этом основании первую систему равенств (4.1) можно переписать в виде дифференциальных уравнений $T_{kj}^k = \partial_j \ln \sqrt{\det \bar{g} / \det g} = 0$. Следовательно, $d\bar{V} = \lambda dV$ для некоторой постоянной $\lambda > 0$, поскольку $dV = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ и $d\bar{V} = \sqrt{\det \bar{g}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$. В частности, при $\lambda = 1$ гармонический диффеоморфизм f класса $\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ будет *эквиобъемным отображением*. Доказана следующая

ТЕОРЕМА 4.1. *Если многообразие (M, g) допускает гармонический диффеоморфизм $f: M \rightarrow \overline{M}$ класса $\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ на многообразие $(\overline{M}, \bar{g})$, то элементы объемов dV и $d\bar{V}$ данных многообразий связаны равенством $d\bar{V} = \lambda dV$ для некоторой постоянной $\lambda > 0$.*

Каждый гармонический диффеоморфизм $f: M \rightarrow \overline{M}$ класса $\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ характеризуется условием $\tilde{T} \in \mathcal{T}_1(TM) \oplus \mathcal{T}_3(TM)$, которому в локальных координатах можно придать вид следующих равенств:

$$T_{ijk} - T_{jik} = \frac{1}{m-1}(\theta_j g_{ik} - \theta_i g_{jk}), \quad (4.2)$$

где $\theta_j = T_{kj}^k = \partial_j \ln \sqrt{\det \bar{g} / \det g}$. В свою очередь, равенства (4.2) на основании (2.3) принимают вид следующих дифференциальных уравнений:

$$\bar{\nabla}_j g_{ik} - \bar{\nabla}_i g_{jk} = \frac{1}{m-1}(\theta_j g_{ik} - \theta_i g_{jk}). \quad (4.3)$$

А после конформного преобразования $\tilde{g} = e^{-\frac{1}{m-1}\theta} g$ метрики g уравнения (4.3) принимают вид *уравнений Кодацци* (см., например, [15, с. 169] и [16, с. 590])

$$\bar{\nabla}_j \tilde{g}_{ik} - \bar{\nabla}_i \tilde{g}_{jk} = 0. \quad (4.4)$$

Симметрическое тензорное поле $\tilde{g}$, удовлетворяющее уравнениям (4.4), называется *тензором Кодацци* (см. [16, с. 590]). Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4.2. *Для того чтобы многообразие (M, g) допускало гармонический диффеоморфизм $f: M \rightarrow \bar{M}$ класса $\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ на многообразии $(\bar{M}, \bar{g})$, необходимо, чтобы тензор $e^{-\frac{1}{m-1}\theta} g$ для функции $\theta = \ln \sqrt{\det \bar{g} / \det g} + \text{const}$ был тензором Кодацци на многообразии $(\bar{M}, \bar{g})$.*

Геометрия римановых многообразий, несущих тензоры Кодацци, подробно описана в литературе (см. обзор в [16, с. 590–598]). Можно применить установленные факты для описания геометрии гармонических диффеоморфизмов класса $\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_3$. Так, например, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Для того чтобы многообразие (M, g) допускало гармонический диффеоморфизм $f: M \rightarrow \bar{M}$ класса $\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_3$ на многообразии $(\bar{M}, \bar{g})$ постоянной кривизны $\bar{K}$, необходимо, чтобы тензор g имел вид*

$$g = e^{\frac{1}{m-1}\theta} [\text{Hess}(F) + \bar{K} F \bar{g}]$$

для $\theta = \ln \sqrt{\det \bar{g} / \det g} + \text{const}$ и гладкой функции F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С одной стороны, известно (см. [16, с. 591]), что на римановом многообразии $(\bar{M}, \bar{g})$ постоянной секционной кривизны $\bar{K}$ общее решение уравнений Кодацци (4.4) имеет вид $\tilde{g} = \text{Hess}(F) + \bar{K} F \bar{g}$ для произвольной гладкой функции F на многообразии $(\bar{M}, \bar{g})$ и ее гессиана $\text{Hess}(F) = \bar{\nabla}(dF)$. С другой стороны, если привлечь сюда теорему 4.2, то получим $g = e^{\frac{1}{m-1}\theta} [\text{Hess}(F) + \bar{K} F \bar{g}]$. В довершение необходимо заметить, что выбор функции F здесь ограничен условием положительной определенности тензора g .

Каждый гармонический диффеоморфизм $f: M \rightarrow \bar{M}$ класса $\mathcal{T}_2 \oplus \mathcal{T}_3$ характеризуется условием $\tilde{T} \in \mathcal{T}_2(TM) \oplus \mathcal{T}_3(TM)$, которое в локальных координатах имеет вид следующих равенств:

$$T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} = \frac{2}{m+2}(\theta_i g_{jk} + \theta_j g_{ki} + \theta_k g_{ij}), \quad (4.5)$$

где $\theta_j = T_{kj}^k = \partial_j \ln \sqrt{\det \bar{g} / \det g}$. В свою очередь, равенства (4.5) на основании (2.3) можно представить в виде дифференциальных уравнений

$$\bar{\nabla}_i g_{jk} + \bar{\nabla}_j g_{ki} + \bar{\nabla}_k g_{ij} = \frac{2}{m+2}(\theta_i g_{jk} + \theta_j g_{ki} + \theta_k g_{ij}). \quad (4.6)$$

Задавая конформное преобразование $\tilde{g} = e^{-\frac{4}{m+2}\theta}g$ метрики g , приведем уравнения (4.6) к виду

$$\bar{\nabla}_i \tilde{g}_{jk} + \bar{\nabla}_j \tilde{g}_{ki} + \bar{\nabla}_k \tilde{g}_{ij} = 0. \quad (4.7)$$

Симметрическое тензорное поле $\tilde{g}$, удовлетворяющее уравнениям (4.7), называется *тензором Киллинга* (см. [17, с. 339–340]). Сами же уравнения (4.7) являются необходимым и достаточным условием того, что каждое решение уравнений геодезических

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \bar{\Gamma}_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0$$

на многообразии $(\bar{M}, \bar{g})$ удовлетворяет равенству

$$\tilde{g}_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = \text{const}$$

(см. [13, с. 157–161]). Это означает, что тензор Киллинга $\tilde{g}$ задает *первый квадратичный интеграл уравнений геодезических* на многообразии $(\bar{M}, \bar{g})$. Справедлива

ТЕОРЕМА 4.4. *Для того чтобы диффеоморфизм $f: M \rightarrow \bar{M}$ многообразия (M, g) на многообразие $(\bar{M}, \bar{g})$ был гармоническим класса $\mathcal{T}_2 \oplus \mathcal{T}_3$, необходимо, чтобы $e^{-\frac{4}{m+2}\theta}g$ для $\theta = \ln \sqrt{\det \bar{g} / \det g} + \text{const}$ задавал на многообразии $(\bar{M}, \bar{g})$ первый квадратичный интеграл уравнений геодезических.*

Геометрия многообразий, допускающих первые квадратичные интегралы уравнений геодезических, подробно описана в литературе. Установленные факты можно применять для описания геометрии гармонических диффеоморфизмов класса $\mathcal{T}_2 \oplus \mathcal{T}_3$. Так, например, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 4.5. *Для того чтобы диффеоморфизм $f: M \rightarrow \bar{M}$ многообразия (M, g) на локально плоское многообразие $(\bar{M}, \bar{g})$ был гармоническим класса $\mathcal{T}_2 \oplus \mathcal{T}_3$, необходимо, чтобы в общей по отображению f системе координат $\{x^1, \dots, x^m\}$ тензор g имел компоненты*

$$g_{ij} = e^{\frac{1}{m+2}\theta} (A_{ijkl} x^k x^l + B_{ijk} x^k + C_{ij}) \quad (4.8)$$

для $\theta = \sqrt{\det \bar{g} / \det g} + \text{const}$ и симметричных по первым двум индексам постоянных A_{ijkl} , B_{ijk} , C_{ij} таких, что

$$A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl} = 0, \quad B_{ijk} + B_{jki} + B_{kij} = 0. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С одной стороны (см. [18]), на локально плоском римановом многообразии (M, g) общее решение уравнений (4.7) имеет вид

$$\tilde{g}_{ij} = A_{ijkl} x^k x^l + B_{ijk} x^k + C_{ij}$$

для симметричных по первым двум индексам постоянных A_{ijkl} , B_{ijk} , C_{ij} , удовлетворяющих условиям (4.9). С другой стороны, привлекая сюда теорему 4.4, получаем выражения (4.8). В довершение заметим, что выбор постоянных A_{ijkl} , B_{ijk} и C_{ij} в (4.8) ограничен условием положительной определенности тензора g .

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть $(\overline{M}, \bar{g})$ – компактное ориентированное многообразие размерности $m \geq 3$ неположительной секционной кривизны $\overline{K}$ имеет, по меньшей мере, одну точку, где $\overline{K} < 0$. Тогда не существует риманова многообразия (M, g) , допускающего (отличный от гомотетии) гармонический диффеоморфизм $f \in \mathcal{T}_2 \oplus \mathcal{T}_3$ на многообразии $(\overline{M}, \bar{g})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гармонический диффеоморфизм $f: M \rightarrow \overline{M}$ класса $\mathcal{T}_2 \oplus \mathcal{T}_3$. Тогда, как это было доказано выше, на $(\overline{M}, \bar{g})$ существует тензор Киллинга $\tilde{g}$. Если многообразие $(\overline{M}, \bar{g})$ удовлетворяет условию теоремы, то согласно [19] тензор Киллинга должен иметь вид $\tilde{g} = F\bar{g}$ для гладкой функции F на $(\overline{M}, \bar{g})$. Последнее означает, что $\bar{g} = F^{-1}e^{-\frac{2}{m+2}\theta}g$ и, следовательно, гармонический диффеоморфизм f является одновременно конформным отображением. При этом на основании равенств (4.15) без труда доказывается, что любой конформный диффеоморфизм является гармоническим отображением только для $m = 2$, а для $m \geq 3$ конформный гармонический диффеоморфизм будет уже гомотетией.

Каждый гармонический диффеоморфизм $f: M \rightarrow \overline{M}$ класса $\mathcal{T}_1$ характеризуется условием $\tilde{T} \in \mathcal{T}_1(TM)$, которое в локальных координатах принимает вид следующих равенств:

$$T_{ijk} = T_{jik}, \quad (4.10)$$

$$g^{ij}T_{kij} = 0. \quad (4.11)$$

Равенства (4.10) в соответствии с (2.3) принимают вид уравнений Кодацци: $\bar{\nabla}_k g_{ij} = \bar{\nabla}_i g_{kj}$. В свою очередь, равенства (4.11) в силу (4.10) представляются в виде $T_{kj}^k = 0$. Последнее, как это было доказано, означает, что $d\bar{V} = \lambda dV$ для некоторой постоянной $\lambda > 0$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4.7. Для того чтобы диффеоморфизм $f: M \rightarrow \overline{M}$ многообразия (M, g) на многообразии $(\overline{M}, \bar{g})$ был гармоническим класса $\mathcal{T}_1$, необходимо и достаточно, чтобы g был тензором Кодацци на многообразии $(\overline{M}, \bar{g})$ и при этом элементы объемов $d\bar{V}$ и dV данных многообразий были связаны равенством $d\bar{V} = \lambda dV$ для некоторой постоянной $\lambda > 0$.

Каждый гармонический диффеоморфизм $f: M \rightarrow \overline{M}$ класса $\mathcal{T}_2$ характеризуется условием $\tilde{T} \in \mathcal{T}_2(TM)$, которое в локальных координатах принимает вид следующих равенств:

$$T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} = 0, \quad (4.12)$$

$$g^{jk}T_{jki} = 0. \quad (4.13)$$

Равенствам (4.12) на основании (2.3) придадим вид дифференциальных уравнений $\bar{\nabla}_i g_{kj} + \bar{\nabla}_k g_{ji} + \bar{\nabla}_j g_{ik} = 0$ на многообразии $(\overline{M}, \bar{g})$. Это означает, что g задает первый квадратичный интеграл уравнений геодезических на многообразии $(\overline{M}, \bar{g})$. В свою очередь, равенства (4.13), как это уже было доказано, означают, что $d\bar{V} = \lambda dV$ для некоторой постоянной $\lambda > 0$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4.8. Для того чтобы диффеоморфизм $f: M \rightarrow \overline{M}$ многообразия (M, g) на многообразии $(\overline{M}, \bar{g})$ был гармоническим класса $\mathcal{T}_2$, необходимо и достаточно, чтобы g задавал на многообразии $(\overline{M}, \bar{g})$ первый квадратичный интеграл уравнений геодезических и при этом элементы объемов $d\overline{V}$ и dV данных многообразий были связаны равенством $d\overline{V} = \lambda dV$ для некоторой постоянной $\lambda > 0$.

Каждый гармонический диффеоморфизм $f: M \rightarrow \overline{M}$ класса $\mathcal{T}_3$ характеризуется условием $\tilde{T} \in \mathcal{T}_3(TM)$, которое в локальных координатах принимает вид следующих равенств:

$$T_{ij}^k = \theta_i \delta_j^k + \theta_j \delta_i^k - \frac{2}{m} \theta^k g_{ij}, \quad (4.14)$$

где $\theta^k = g^{kj} \theta_j$ для

$$\theta_j = \frac{m}{(m+2)(m-1)} T_{kj}^k = \frac{m}{(m+2)(m-1)} \partial_j \ln \sqrt{\frac{\det \bar{g}}{\det g}}.$$

Докажем, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4.9. Гармонический диффеоморфизм $f: M \rightarrow \overline{M}$ класса $\mathcal{T}_3$ многообразия (M, g) на многообразии $(\overline{M}, \bar{g})$ представляется в виде композиции $f = \tilde{f} \circ \bar{f}$ конформного $\tilde{f}: M \rightarrow \widetilde{M}$ и проективного $\bar{f}: \widetilde{M} \rightarrow \overline{M}$ диффеоморфизмов для многообразия $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ с метрическим тензором $\tilde{g} = e^{2\sigma} g$ для

$$\sigma = \frac{1}{(m+2)(m-1)} \ln \sqrt{\frac{\det \bar{g}}{\det g}} + \text{const}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: M \rightarrow \overline{M}$ – гармонический диффеоморфизм класса $\mathcal{T}_3$. Введем в рассмотрение многообразие $(\widetilde{M}, \tilde{g})$, конформно диффеоморфное многообразию (M, g) . Метрический тензор $\tilde{g}$ такого многообразия определяется из равенства $\tilde{g} = e^{2\sigma} g$ для некоторой заданной на многообразии (M, g) гладкой функции σ . При этом тензор деформации $\tilde{T} = \tilde{\nabla} - \nabla$ в общей по конформному диффеоморфизму $\tilde{f}: M \rightarrow \widetilde{M}$ системе координат имеет компоненты (см. [13, с. 112–116])

$$\tilde{T}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k = \sigma_i \delta_j^k + \sigma_j \delta_i^k - \sigma^k g_{ij} \quad (4.15)$$

для символов Кристофеля $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ риманова многообразия $(\widetilde{M}, \tilde{g})$, $\sigma_j = \partial_j \sigma$ и $\sigma^k = g^{kj} \sigma_j$.

Зададим проективное отображение $\bar{f}: \widetilde{M} \rightarrow \overline{M}$ определенного выше многообразия $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ на многообразии $(\overline{M}, \bar{g})$. Это возможно тогда и только тогда, когда в общей по отображению $\bar{f} \circ \tilde{f}$ системе координат выполняются равенства (см. [9, с. 70–76] и [13, с. 161–166])

$$\bar{T}_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k - \tilde{\Gamma}_{ij}^k = \psi_i \delta_j^k + \psi_j \delta_i^k \quad (4.16)$$

для компонент тензора деформации $\bar{T} = \bar{\nabla} - \tilde{\nabla}$ и

$$\psi_j = \frac{1}{(m+1)} \partial_j \ln \sqrt{\frac{\det \bar{g}}{\det \tilde{g}}}.$$

Поскольку в данном случае $\tilde{g} = e^{2\sigma}g$, то

$$\psi_j = \frac{1}{(m+1)} \left(\partial_j \ln \sqrt{\frac{\det \tilde{g}}{\det g}} - m\sigma_j \right).$$

С учетом (4.15) равенства (4.16) можно переписать следующим образом:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k = (\sigma_i + \psi_i)\delta_i^k + (\sigma_j + \psi_j)\delta_j^k - \sigma^k g_{ij}. \quad (4.17)$$

В правой части (4.17) стоят компоненты тензора деформации гармонического диффеоморфизма $f: M \rightarrow \bar{M}$ класса $\mathcal{T}_3$, которые имеют вид (4.14). А потому условие (4.16) существования проективного диффеоморфизма $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow \bar{M}$ представляется в виде системы дифференциальных уравнений: $\sigma_j + \psi_j = \theta_j$ и $\theta_j = \frac{m}{2}\sigma_j$ на неизвестную функцию σ . Решением системы служит функция

$$\sigma = \frac{1}{(m+2)(m-1)} \ln \sqrt{\frac{\det \tilde{g}}{\det g}} + \text{const}.$$

Таким образом, гармонический диффеоморфизм $f: M \rightarrow \bar{M}$ класса $\mathcal{T}_3$ представляется в виде композиции $f = \tilde{f} \circ \tilde{f}$ конформного $\tilde{f}: M \rightarrow \tilde{M}$ и проективного $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow \bar{M}$ диффеоморфизмов и при этом ассоциированный с гармоническим диффеоморфизмом $f: M \rightarrow \bar{M}$ тензор деформации $\tilde{T} = \tilde{\nabla} - \nabla$ разлагается в сумму двух тензоров $T = \tilde{T} + \bar{T}$ с компонентами (4.15) и (4.16) соответственно.

Последний, седьмой класс гармонических диффеоморфизмов характеризуется условием $T = 0$, которое означает, что в общей по отображению $f: M \rightarrow \bar{M}$ системе локальных координат $\{x^1, \dots, x^m\}$ в соответствующих точках равны символы Кристофеля Γ_{ij}^k и $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ связностей Леви-Чивита ∇ и $\bar{\nabla}$ многообразий (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ соответственно. Такое отображение носит название *аффинного* (см., например, [9, с. 47, 48, 67]).

Из равенств (2.3) в случае аффинного отображения следует: $\nabla_k \bar{g}_{ij} = 0$. Это на основании теоремы П. А. Широкова (см. [20]) позволяет сделать вывод, что многообразие (M, g) локально является римановым произведением многообразий $(M_1, g_1), \dots, (M_q, g_q)$, где число различных собственных значений тензора $\bar{g}$. Если же многообразие не является локальным произведением римановых многообразий, то $\bar{g} = \lambda g$ для некоторой постоянной $\lambda > 0$ и, следовательно, $f: M \rightarrow \bar{M}$ – гомотетия.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Eells J., Lemaire L. A report on harmonic maps // Bull. London Math. Soc. 1978. V. 10. P. 1–68.
- [2] Eells J., Lemaire L. Another report on harmonic maps // Bull. London Math. Soc. 1988. V. 20. P. 385–584.

- [3] Давидов Й., Сергеев А. Г. Твисторные пространства и гармонические отображения // УМН. 1993. Т. 48. № 3. С. 3–96.
- [4] Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т. Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987.
- [5] Stepanov S. E. Riemannian almost product manifolds and submersions // J. Math. Sci. 2000. V. 99. № 6. P. 1788–1831.
- [6] Nomizu K., Pinkall U. On the geometry of projective immersion // J. Math. Soc. Japan. 1989. V. 41. № 4. P. 607–623.
- [7] Podesta F. Projective submersion // Bull. Austral. Math. Soc. 1991. V. 43. № 2. P. 251–256.
- [8] Шандра И. Г. О геодезической подвижности римановых пространств // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 4. С. 620–626.
- [9] Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979.
- [10] Аминова А. В. Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими // УМН. 1993. Т. 48. № 2. С. 107–164.
- [11] Stepanov S. E. The classification of harmonic diffeomorphisms // Abstracts of the 5th International Conf. on Geom. and Appl., August 24–29, 2001, Varna. Sofia: Union of Bulgarian Mathematicians, 2001. P. 55.
- [12] Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М.: Мир, 1971.
- [13] Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948.
- [14] Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. М.: Мир, 1947.
- [15] Норден А. П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.
- [16] Бессе А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.
- [17] Крамер Д. и др. Точные решения уравнений Эйнштейна. М.: Энергоиздат, 1982.
- [18] Katzin G. H., Levine J. Quadratic first integrals of the geodesics of constant curvature // Tensor, N. S. 1965. V. 16. P. 97–104.
- [19] Степанов С. Е. О применении одной теоремы П. А. Широкова в технике Бохнера // Изв. вузов. Матем. 1996. № 9. С. 53–59.
- [20] Широков П. А. Постоянные поля векторов и тензоров второго порядка в Riemann'овых пространствах // Изв. физ.-матем. о-ва. Казань. 1925. Т. 25. С. 86–114.

(С. Е. Степанов) Владимирский государственный
педагогический университет,
(И. Г. Шандра) Финансовая академия
при правительстве Российской Федерации
E-mail: stepanov@vtsnet.ru, shandra@orc.ru

Поступило
20.12.2001
Исправленный вариант
05.06.2003