Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Горбачев, С. А. Странковский, Одна экстремальная задача для четных положительно определенных целых функций экспоненциального типа, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 5, 712–717

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3080>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:30:07

УДК 517.5

ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЧЕТНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Д. В. Горбачев, С. А. Странковский

Рассматривается экстремальная задача для четных положительно определенных целых функций экспоненциального типа с нулевым на полуоси со степенным весом средним значением, связанная с многомерной теоремой Джексона–Стечкина в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Библиография: 16 названий.

Пусть $\alpha \geq -1/2$, K_α – класс четных положительно определенных целых функций $f(z)$ экспоненциального типа, не большего π [1],

$$\|f\|_{1,\alpha} = \|f(z)z^{2\alpha+1}\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} = \int_{\mathbb{R}_+} |f(z)|z^{2\alpha+1} dz < \infty,$$

$$f(0) > 0, \quad \int_{\mathbb{R}_+} f(z)z^{2\alpha+1} dz = 0.$$

Класс K_α допускает другое описание. Пусть $J_\alpha(x)$ – функция Бесселя [2], $j_\alpha(x) = \Gamma(\alpha+1)(2/x)^\alpha J_\alpha(x)$ – нормированная функция Бесселя ($j_\alpha(0) = 1$), $j_{-1/2}(x) = \cos x$, $j_{1/2}(x) = x^{-1} \sin x$, q_α – первый положительный нуль функции Бесселя J_α (и j_α), $q_{-1/2} = \pi/2$, $q_{1/2} = \pi$,

$$\tilde{f}(x) = \omega_\alpha \int_{\mathbb{R}_+} f(z)j_\alpha(2\pi zx)z^{2\alpha+1} dz, \quad \omega_\alpha = 2\pi^{\alpha+1}\Gamma^{-1}(\alpha+1),$$

– преобразование Фурье–Ганкеля функции f [3]. Если $\|f\|_{1,\alpha} < \infty$, то $\tilde{f} \in C(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – четная положительно определенная функция, $\|f\|_{1,\alpha} < \infty$. Тогда $\tilde{f}(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}_+$. Если f дополнительно является целой функцией экспоненциального типа, не большего π , то из обобщенной теоремы Пэли–Винера [1; с. 364] следует, что

$$\tilde{f}(x) = 0, \quad x \geq \frac{1}{2}, \quad f(z) = \omega_\alpha \int_0^{1/2} \tilde{f}(x)j_\alpha(2\pi zx)x^{2\alpha+1} dx.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 05-01-39005 и № 06-01-00372.

Таким образом, класс K_α состоит из функций f , для которых

$$\|f\|_{1,\alpha} < \infty, \quad f(z) = \omega_\alpha \int_0^{1/2} \tilde{f}(x) j_\alpha(2\pi z x) x^{2\alpha+1} dx, \\ \tilde{f} \in C\left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \tilde{f}(0) = \tilde{f}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \tilde{f} \not\equiv 0.$$

Заметим, что для $\alpha = n/2 - 1$, $n \in \mathbb{N}$, класс K_α можно отождествить с классом радиальных положительно определенных целых функций $\varphi(x) = f(|x|): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ экспоненциального сферического типа, не большего π , $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, имеющих нулевое среднее значение на $\mathbb{R}^n$. При этом $f \in K_\alpha$.

Важным примером функции из класса K_α является функция [4]

$$y_\alpha(z) = \frac{j_\alpha^2(\pi z/2)}{1 - (\pi z/(2q_\alpha))^2}.$$

Для $\alpha = -1/2$ ее принадлежность классу K_α вытекает из результатов работ [5], [6], а для $\alpha = n/2 - 1$, $n = 2, 3, \dots$, — из результатов работы [7]. Для произвольного $\alpha \geq -1/2$ принадлежность функции y_α классу K_α вытекает из результатов работ [8], [9] (см. также [4]).

Для $r \in \mathbb{N}$ обозначим

$$F_r(z, f) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \frac{\binom{2r}{r-k}}{\binom{2r}{r-1}} f(kz), \quad F(z) = F_r(z) = F_r(z, f), \\ F_1(z) = f(z), \quad F_2(z) = f(z) - \frac{1}{4} f(2z).$$

Пусть $\lambda(F) = \inf\{\lambda > 0 : F(z) \leq 0, z \geq \lambda\}$. Рассмотрим следующую экстремальную задачу. Найти величину

$$\lambda_{r,\alpha} = \inf\{\lambda(F_r(z, f)) : f \in K_\alpha\}. \quad (1)$$

Близкие задачи возникают в математической статистике, цифровой обработке сигналов, аналитической теории чисел. Задача (1) наиболее известна при $r = 1$. Для $\alpha = -1/2$ она была поставлена и решена Б. Логаном: $\lambda_{1,-1/2} = 1$, экстремальная функция $y_{-1/2}$. Это равенство вытекает и из более ранних результатов Н. И. Черныха [10]. Из одного результата А. В. Московского [8] следует равенство $\lambda_{1,1/2} = 2$, экстремальная функция $y_{1/2}$. Одним из авторов данной работы было показано (см. [4]), что функция y_α является экстремальной для произвольно-го $\alpha \geq -1/2$ и $\lambda_{1,\alpha} = 2q_\alpha/\pi$.

В случае $r = 2$ справедливо равенство $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} F_2(2^k z)$, из которого вытекают неравенства

$$\lambda(f) = \lambda(F_1) \leq \lambda(F_2), \quad \lambda_{1,\alpha} \leq \lambda_{2,\alpha}. \quad (2)$$

Этот факт был установлен В. В. Арестовым и А. Г. Бабенко [11].

Задача (1) при $\alpha = n/2 - 1$, $n \in \mathbb{N}$, связана с экстремальной задачей нахождения оптимального аргумента (точки Черныха) в неравенстве Джексона–Стечкина с

точной константой в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ и r -м модулем непрерывности [4]. Точная константа Джексона–Стечкина в $L_2(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$D_r(\delta, \sigma) = D_r(\delta, \sigma)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{f \in L_2(\mathbb{R}^n) \\ f \neq 0}} \frac{E_\sigma(f)}{\omega_r(\delta, f)}, \quad \delta, \sigma > 0,$$

где $E_\sigma(f)$ – наилучшее приближение функции $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ целыми функциями экспоненциального сферического типа, не большего σ ,

$$\omega_r(\delta, f) = \sup_{|t| \leq \delta} \|\Delta_t^r f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

– r -й модуль непрерывности функции f , $\Delta_t^r f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} f(x + kt)$.

Для $a > 0$ выполняется равенство $D_r(a\delta, a\sigma) = D_r(\delta, \sigma)$, поэтому изучается величина $d_r^n(\delta) = D_r(\delta, \pi)_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ как функция $\delta > 0$. Оказывается, что она является невозрастающей непрерывной функцией [12],

$$d_r^n(+0) = +\infty, \quad \min_{\delta > 0} d_r^n(\delta) = \left(\frac{2r}{r}\right)^{-1/2}.$$

Оптимальным аргументом в точном неравенстве Джексона–Стечкина называется величина

$$\delta_r^n = \inf \left\{ \delta > 0 : d_r^n(\delta) = \left(\frac{2r}{r}\right)^{-1/2} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Для $r, n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\delta_r^n = \lambda_{r, n/2-1}.$$

При $r = 1$, $n \in \mathbb{N}$ эта теорема установлена Е. Е. Бердышевой [13] и ею же найдена величина $\delta_1^1 = 1$ [14]. Этот результат также следует из более ранних работ Черныха [5], [10], изучавшего L_2 -константу Джексона для периодических функций. Из результатов его работы [15] вытекает, что при $n = 1$ и $r > 1$ справедлива оценка

$$\delta_r^1 \leq 2 \iff \lambda_{r, -1/2} \leq 2.$$

Функция, которая дает эту оценку имеет вид

$$f(z) = \frac{\cos^2(\pi z/2)}{1 - z^2} + \frac{\sin^2(\pi z/2)}{4 - z^2}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \left(\sin(2\pi x) + \frac{1}{2} \sin(4\pi x) \right) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Из результатов С. Н. Васильева [16] вытекает более сильная оценка

$$\delta_r^1 \leq \frac{7}{5} = 1.4 \iff \lambda_{r, -1/2} \leq 1.4, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Некоторое время предполагалось, что $\delta_1^1 = \delta_2^1 = 1$. Арестов и Бабенко [11] доказали, что $\delta_2^1 > 1$.

ТЕОРЕМА 2. *Справедлива оценка*

$$\lambda_{2,-1/2} \leq \xi = 1.074 \dots,$$

где ξ – единственный корень на промежутке $1.01 < z < 1.1$ уравнения

$$(340 + 320 \cos(\pi z) - 20 \cos(2\pi z))z^4 + (-1365 - 1424 \cos(\pi z) + 101 \cos(2\pi z))z^2 + 260 + 336 \cos(\pi z) - 84 \cos(2\pi z) = 0.$$

Функция, на которой получается эта оценка, имеет вид

$$f(z) = \frac{\cos^2(\pi z/2)}{1 - z^2} + \frac{1}{16} \frac{\sin^2(\pi z/2)}{4 - z^2},$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \left(\sin(2\pi x) + \frac{1}{32} \sin(4\pi x) \right), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \left(\sin(2\pi x) + \frac{a}{2} \sin(4\pi x) \right), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Для любого $a \in [-1, 1]$ функция

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi \sin(2\pi x)}{2} (1 + a \cos(2\pi x)) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$\tilde{f} \in C\left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \tilde{f}(0) = \tilde{f}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Следовательно, ее преобразование Фурье–Ганкеля

$$f(z) = 2 \int_0^{1/2} \tilde{f}(x) \cos(2\pi z x) dx = \frac{\cos^2(\pi z/2)}{1 - z^2} + \frac{a \sin^2(\pi z/2)}{4 - z^2}, \quad z \in \mathbb{R}_+,$$

принадлежит классу $K_{-1/2}$.

Для $r = 2$, $t = \cos(\pi z) \in [-1, 1]$

$$F(z) = f(z) - \frac{1}{4} f(2z) = \frac{\cos^2(\pi z/2)}{1 - z^2} + \frac{a}{4} \frac{\sin^2(\pi z/2)}{1 - (z/2)^2} - \frac{1}{4} \frac{\cos^2(\pi z)}{1 - (2z)^2} - \frac{a}{16} \frac{\sin^2(\pi z)}{1 - z^2}$$

$$= \frac{(1+t)/2 - a(1-t^2)/16}{1 - z^2} + \frac{a(1-t)/2}{4 - z^2} - \frac{t^2/16}{1/4 - z^2}.$$

При больших z знак функции $F(z)$ определяется знаком функции

$$\varphi(t) = -\left(\frac{1+t}{2} - \frac{a(1-t^2)}{16}\right) - \frac{a(1-t)}{2} + \frac{t^2}{16} = \frac{1-a}{16} t^2 - \frac{1-a}{2} t - \frac{8+7a}{16}.$$

Для $a \in [1/16, 1]$ функция $\varphi(t) \leq 0$, $t \in [-1, 1]$. При $a < 1/16$ функция φ принимает положительные значения на отрезке $[-1, 1]$, а значит, функция $F(z)$ для некоторых

произвольно больших значениях z также будет принимать положительные значения. Следовательно, для $a \in [-1, 1/16]$ величина $\lambda(F) = +\infty$.

Если $a \in [1/16, 1]$, $z > 2$, то $(1+t)/2 - a(1-t^2)/16 > 0$, $t \in [-1, 1]$, и

$$\frac{1}{1-z^2} \leq \frac{1}{1/4-z^2}, \quad \frac{1}{4-z^2} \leq \frac{1}{1/4-z^2}.$$

Следовательно, для $z > 2$

$$F(z) \leq \frac{1}{1/4-z^2} \left(\frac{1+t}{2} - \frac{a(1-t^2)}{16} + \frac{a(1-t)}{2} \right) - \frac{t^2/16}{1/4-z^2} = \frac{1}{z^2-1/4} \varphi(t) \leq 0.$$

При $z \in [1, 2]$ и $a \in [1/16, 1]$ функция $F(z) > 0$ для $1 \leq z < z(a)$ и $F(z) < 0$ для $z(a) < z \leq 2$, где число $z(a)$ определяется из уравнения $F(z(a)) = 0$. При этом $z(a)$ является непрерывной и возрастающей функцией $a \in [1/16, 1]$. Таким образом,

$$\lambda(F) = z(a), \quad a \in \left[\frac{1}{16}, 1 \right], \quad \min_{a \in [1/16, 1]} z(a) = z\left(\frac{1}{16}\right).$$

Полагая $a = 1/16$, приходим к утверждениям теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо равенство*

$$\lambda_{1,1/2} = \lambda_{2,1/2} = 2.$$

Экстремальной функцией для величины $\lambda_{2,1/2}$ (и $\lambda_{1,1/2}$) является функция $y_{1/2}(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $F(z) = f(z) - f(2z)/4$, $f(z) \in K_{1/2}$, в силу неравенства (2) величина $\lambda(F) \geq \lambda(f) = 2$. Покажем, что $\lambda(F) \leq 2$.

Для функции

$$f(z) = y_{1/2}(z) = \left(\frac{\sin(\pi z/2)}{\pi z/2} \right)^2 \frac{1}{1-(z/2)^2}$$

имеем

$$\begin{aligned} F(z) &= \left(\frac{\sin(\pi z/2)}{\pi z/2} \right)^2 \frac{1}{1-(z/2)^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} \right)^2 \frac{1}{1-z^2} \\ &= \left(\frac{\sin(\pi z/2)}{\pi z/2} \right)^2 \left(\frac{1}{1-z^2/4} + \frac{1}{4} \frac{\cos^2(\pi z/2)}{z^2-1} \right), \\ \frac{1}{1-z^2/4} + \frac{1}{4} \frac{\cos^2(\pi z/2)}{z^2-1} &\leq \frac{1}{1-z^2/4} + \frac{1/4}{z^2-1} = \frac{15z^2/16 - 3/4}{(1-z^2/4)(z^2-1)} < 0, \quad z > 2. \end{aligned}$$

Следовательно, $F(z) \leq 0$ при $z > 2$ и, значит, $\lambda(F) \leq 2$. Теорема доказана.

Постановка задачи и доказательство теоремы 1 принадлежат Д. В. Горбачеву; теоремы 2, 3 доказаны С. А. Странковским.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965.
- [2] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, 2, Наука, М., 1966.
- [3] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Введение в спектральную теорию*, Наука, М., 1970.

- [4] Д. В. Горбачев, *Избранные задачи теории функций и теории приближений и их приложения*, ТулГУ, Тула, 2004.
- [5] Н. И. Черных, “О неравенстве Джексона в L_2 ”, *Тр. МИАН*, **88** (1967), 71–74.
- [6] B. F. Logan, “Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions”, *SIAM J. Math. Anal.*, **14**:2 (1983), 253–257.
- [7] В. А. Юдин, “Многомерная теорема Джексона в L_2 ”, *Матем. заметки*, **29**:2 (1981), 309–315.
- [8] А. В. Московский, “Теоремы Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ ”, *Изв. ТулГУ. Сер. матем.*, **3**:1 (1997), 44–70.
- [9] А. Г. Бабенко, “Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ ”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **5** (1998), 182–198.
- [10] N. I. Chernykh, V. V. Arestov, “On the L_2 -approximation of periodic functions by trigonometric polynomials”, *Approximation and Function Spaces, Proc. Inter. Conf. (Gdansk, 1979)*, North-Holland, Amsterdam, 1981, 25–43.
- [11] V. V. Arestov, A. G. Babenko, “On the optimal point in Jackson’s inequality in $L^2(-\infty, \infty)$ with the second modulus of continuity”, *East J. Approximation*, **10**:1–2 (2004), 201–214.
- [12] А. Г. Бабенко, *Прямые теоремы теории приближения в L^2 и родственные экстремальные задачи для положительно определенных функций*, Дисс. ... д.ф.-м.н., Екатеринбург, 2004.
- [13] Е. Е. Бердышева, “Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных”, *Матем. заметки*, **66**:3 (1999), 336–350.
- [14] E. E. Berdysheva, “An extremal problem for entire functions of exponential type with non-negative mean value”, *East J. Approximation*, **3**:4 (1997), 393–401.
- [15] Н. И. Черных, “О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 ”, *Матем. заметки*, **2**:5 (1967), 513–522.
- [16] С. Н. Васильев, *Аппроксимация функций тригонометрическими полиномами в L^2 и фрактальными функциями в C* , Дисс. ... к.ф.-м.н., Екатеринбург, 2002.

Д. В. Горбачев, С. А. Странковский
Тульский государственный университет
E-mail: dvvg@uic.tula.ru

Поступило
16.05.2006