Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Напалков, В. Э. Ким, Изоморфизм между пространствами решений дискретного уравнения свертки и уравнения свертки на пространстве целых функций, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 5, 733–750

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3082>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:26:29

УДК 517.53

ИЗОМОРФИЗМ МЕЖДУ ПРОСТРАНСТВАМИ РЕШЕНИЙ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ И УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ НА ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

В. В. Напалков, В. Э. Ким

В работе решается задача о восстановлении любого решения однородного уравнения свертки по значениям в целочисленных точках вещественной оси.

Библиография: 18 названий.

Введение. Обозначим через $H(\mathbb{C})$ класс всех целых функций. Для $\rho \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ таких, что $1 < \rho < \infty$, $0 < \sigma < \infty$, рассмотрим в $H(\mathbb{C})$ подклассы: $E[\rho, \sigma]$ – класс целых функций порядка $< \rho$ или порядка ρ и типа $\leq \sigma$; $E'[\rho, \sigma]$ – класс целых функций порядка $< \rho$ или порядка ρ и типа $< \sigma$. Снабдим $E[\rho, \sigma]$ топологией проективного предела банаховых пространств

$$E_{\rho, \sigma_j} = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{\rho, \sigma_j} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(\sigma_j |z|^\rho)} < \infty \right\},$$

где $\{\sigma_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ – строго убывающая последовательность чисел из $\mathbb{R}$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_j = \sigma$. Обозначим через $E'[\rho, \sigma]$ сильно сопряженное к $E[\rho, \sigma]$ пространство. Пусть $B \in E'[\rho, \sigma]$. Функционал B определяет на пространстве $E[\rho, \sigma]$ однородное уравнение свертки

$$M_B[f](z) \equiv \langle B_{(\eta)}, f(\eta + z) \rangle = 0. \quad (1)$$

Запись $B_{(\eta)}$ означает, что функционал B действует по переменной η . Пространство решений уравнения (1) будем обозначать через W_B .

Уравнения свертки на $E[\rho, \sigma]$ изучались многими математиками (см., например, монографию [1]). В настоящей работе решается задача о восстановлении любого решения уравнения (1) по значениям в целочисленных точках вещественной оси.

Задачи о восстановлении целой функции из какого-либо класса по значениям в целых точках изучались во многих работах. Известно, например, что любую целую функцию f экспоненциального типа $\tau \leq \pi$, интегрируемую в квадрате на вещественной оси, можно восстановить по значениям в целых точках с помощью ряда

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) (-1)^n \frac{\sin(\pi z)}{\pi(z - n)},$$

сходящегося равномерно в каждой ограниченной области (см., например, [2; § 2.9]).

В общем случае любую функцию из W_B восстановить по значениям в целых точках нельзя. В статье найдены достаточные условия, которым должен удовлетворять функционал B , для того чтобы эта задача имела решение.

Преобразованием Фурье–Лапласа функционала B называется функция $\hat{B}(\lambda) = \langle B_{(z)}, \exp(iz\lambda) \rangle$, $z, \lambda \in \mathbb{C}$. Положим

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho - 1}, \quad \sigma^* = \frac{1}{\rho^*(\rho\sigma)^{\rho^*-1}}, \quad \sigma_j^* = \frac{1}{\rho^*(\rho\sigma_j)^{\rho^*-1}}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Известно (см., например, [3]), что преобразование Фурье–Лапласа устанавливает линейный топологический изоморфизм между пространством $E'[\rho, \sigma]$ и пространством $E[\rho^*, \sigma^*]$, снабженным топологией индуктивного предела пространств E_{ρ^*, σ_j^*} . Функция $\hat{B}(\lambda) \in E[\rho^*, \sigma^*]$ называется *характеристической функцией* уравнения (1).

Обозначим нулевое множество функции $\hat{B}(\lambda)$ через $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Будем предполагать, что множество Λ удовлетворяет следующим условиям:

(I) все нули λ_k , $k \in \mathbb{N}$, простые;

(II) $\Lambda \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} \lambda < 2\pi\}$.

При этом будем предполагать, что Λ содержит бесконечно много точек как в верхней, так и в нижней полуплоскости. Разобьем множество Λ на две подпоследовательности:

$$\begin{aligned} \{\lambda'_k\}_{k \in \mathbb{N}} &= \{\lambda \in \Lambda : \operatorname{Im} \lambda \geq 0\}, & \operatorname{Im} \lambda'_k &\nearrow \infty, \\ \{\lambda''_k\}_{k \in \mathbb{N}} &= \{\lambda \in \Lambda : \operatorname{Im} \lambda < 0\}, & \operatorname{Im} \lambda''_k &\searrow -\infty. \end{aligned}$$

Функции $\hat{B}(\lambda)$ сопоставим целую 2π -периодическую функцию

$$\hat{b}(\lambda) = \prod_{\operatorname{Im} \lambda_k \geq 0} \left(1 - \frac{\exp(i\lambda_k)}{\exp(i\lambda)}\right) \prod_{\operatorname{Im} \lambda_k < 0} \left(1 - \frac{\exp(i\lambda)}{\exp(i\lambda_k)}\right).$$

Сходимость этих бесконечных произведений и рост функции $\hat{b}(\lambda)$ обсудим позже.

Введем некоторые обозначения. Пусть $V = \{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, $|v_k| \nearrow \infty$. Через $n_V(r)$ обозначим число точек из V , содержащихся в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$; через μ_V обозначим показатель сходимости [4; с. 19] последовательности V ; через $N_V(r)$ обозначим функцию, определяемую соотношением

$$N_V(r) = \int_1^r \frac{n_V(x)}{x} dx.$$

Сформулируем теперь основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функционал $B \in E'[\rho, \sigma]$ таков, что нулевое множество Λ функции $\hat{B}(\lambda)$ удовлетворяет условиям (I), (II) и условиям

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda'_k|^{\rho^*}} \ln \left| \prod_{n \neq k} (1 - \exp(i\lambda'_n - i\lambda'_k)) \right| = \tau_1 < \sigma^*, \quad (3)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda''_k|^{\rho^*}} \ln \left| \prod_{n \neq k} (1 - \exp(i\lambda''_n - i\lambda''_k)) \right| = \tau_2 < \sigma^*, \quad (4)$$

где

$$\tau_1 = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N_{\Omega_1}(r)}{(\ln r)^{\rho^*}}, \quad \tau_2 = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N_{\Omega_2}(r)}{(\ln r)^{\rho^*}};$$

$$\Omega_1 = \left\{ \frac{1}{\exp(i\lambda'_k)}, k \in \mathbb{N} \right\}, \quad \Omega_2 = \{\exp(i\lambda''_k), k \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда любую функцию $f \in W_B$ можно восстановить по значениям на $\mathbb{Z}$ по формуле

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(iz\lambda_k)}{\hat{b}_k(\lambda_k)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_k(n) f(n), \quad (5)$$

где $\hat{b}_k(\lambda) = \hat{b}(\lambda)/(1 - \exp(i\lambda - i\lambda_k))$, $b_k(n)$ – коэффициенты ряда Фурье $\hat{b}_k(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_k(n) \exp(in\lambda)$, $k \in \mathbb{N}$. Ряд в (5) сходится в топологии пространства W_B .

Для доказательства теоремы 1 уравнению (1) сопоставим определенное дискретное однородное уравнение свертки. Обозначим через A класс всех комплекснозначных функций, определенных на $\mathbb{Z}$. Введем пространство $A[\rho, \sigma] = \lim_j \text{proj } A_j$, где

$$A_j = \left\{ \psi \in A : \|\psi\|_{A_j} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\psi(n)|}{\exp(\sigma_j |n|^\rho)} < \infty \right\}.$$

Сопоставим уравнению (1) однородное уравнение свертки на пространстве $A[\rho, \sigma]$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} b(n) \psi(n+m) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

В этом уравнении неизвестной является функция $\psi \in A[\rho, \sigma]$, а коэффициенты $b(n)$ являются коэффициентами ряда Фурье $\hat{b}(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b(n) \exp(in\lambda)$. Основной метод доказательства теоремы 1 состоит в установлении изоморфизма между пространствами решений уравнений (1) и (6) при определенных условиях на множество Λ .

1. Уравнение свертки на пространстве $E[\rho, \sigma]$. Очевидно, функции $\exp(iz\lambda_k)$, $k \in \mathbb{N}$, являются решениями уравнения (1). Эти функции называются *элементарными решениями* уравнения (1). При изучении однородных уравнений свертки возникает следующая задача: можно ли произвольное решение уравнения аппроксимировать элементарными решениями? Эта задача для уравнений свертки на различных пространствах аналитических функций изучалась многими математиками (см., например, [5], [6]). Для однородных уравнений свертки изучается также задача построения в пространстве решений базиса из элементарных решений (см., например, [7]–[9]).

Известно, что любое решение уравнения (1) можно аппроксимировать элементарными решениями (см., например, [10; § 7]). А именно, верен следующий результат: $W_B = \overline{\text{span}\{\exp(iz\lambda_k), k \in \mathbb{N}\}}$. Рассмотрим следующий вопрос: можно ли построить в пространстве W_B базис из элементарных решений. Известно (см., например, [11]), что существует двойственная связь между задачей построения базиса и задачей интерполяции. Так, из [11] следует, что функции $\exp(iz\lambda_k)$, $k \in \mathbb{N}$, образуют регулярный базис в $\overline{\text{span}\{\exp(iz\lambda_k), k \in \mathbb{N}\}}$ (а значит, и в пространстве W_B) тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

(Q) для любой последовательности $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющей условию

$$\exists j \in \mathbb{N} : \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|t_k|}{\|\exp(iz\lambda_k)\|_{E_{\rho, \sigma_j}}} < \infty, \quad (7)$$

найдется функция $g \in E[\rho^*, \sigma^*]$ такая, что $g(\lambda_k) = t_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Отметим, что

$$\|\exp(iz\lambda_k)\|_{E_{\rho, \sigma_j}} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\exp(iz\lambda_k)|}{\exp(\sigma_j |z|^\rho)} = \exp(\sigma_j^* |\lambda_k|^{\rho^*}).$$

Таким образом, условие (7) можно переписать в виде

$$\exists j \in \mathbb{N} : \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|t_k|}{\sigma_j^* |\lambda_k|^{\rho^*}} < \infty. \quad (8)$$

Отметим, что уравнение (1) можно записать в виде дифференциального уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим ряд Тейлора

$$\widehat{B}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k i^k}{k!} \lambda^k.$$

Тогда (1) можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} f^{(k)}(z) = 0.$$

2. Пространство $A[\rho, \sigma]$. Рассмотрим некоторые свойства пространства $A[\rho, \sigma]$. Известно (см., например, [12; гл. 2]), что все вложения $A_{j+1} \subset A_j$, $j \in \mathbb{N}$, являются вполне непрерывными. Это означает, что по терминологии Себастьяна-и-Сильвы [13] $A[\rho, \sigma]$ является пространством (M^*) . Обозначим через $A'[\rho, \sigma]$ сильно сопряженное к $A[\rho, \sigma]$ пространство. Тогда [13; теорема 5] $A'[\rho, \sigma]$ является пространством (LN^*) . Пространства, сильно сопряженные к A_j , $j \in \mathbb{N}$, обозначим через A'_j .

ЛЕММА 1. *Имеем*

$$A'_j = \left\{ \varphi \in A : \|\varphi\|_{A'_j} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(n)| \exp(\sigma_j |n|^\rho) < \infty \right\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное $j \in \mathbb{N}$. Определим функции $\Delta_n \in A$, $n \in \mathbb{Z}$, следующим образом: $\Delta_n(k) = 1$ при $n = k$, $\Delta_n(k) = 0$ при $n \neq k$. Очевидно, $\Delta_n \in A[\rho, \sigma] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. Пусть $\psi \in A_j$. Тогда $\psi(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(n) \Delta_n(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. Функцию ψ можно представить сходящимся в A_j рядом $\psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \Delta_n$, где $c_n = \psi(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \psi - \sum_{|n| \leq N} c_n \Delta_n \right\|_{A_j} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|\psi(k) - \sum_{|n| \leq N} \psi(n) \Delta_n(k)|}{\exp(\sigma_j |k|^\rho)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{|k| > N} \frac{|\psi(k)| \exp(\sigma_{j+1} |k|^\rho)}{\exp(\sigma_{j+1} |k|^\rho) \exp(\sigma_j |k|^\rho)} \\ &\leq \|\psi\|_{A_{j+1}} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\exp(\sigma_{j+1} |k|^\rho)}{\exp(\sigma_j |k|^\rho)} = 0. \end{aligned}$$

Пусть $\varphi \in A'_j$. Тогда

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \left\langle \varphi, \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \Delta_n \right\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \langle \varphi, \Delta_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(n) \varphi(n),$$

где $\varphi(n) = \langle \varphi, \Delta_n \rangle$. Таким образом, функционал φ можно отождествить с функцией из A , т.е. $A'_j \subset A$. Таким образом, пространство A'_j имеет вид

$$A'_j = \left\{ \varphi \in A : \|\varphi\|_{A'_j} = \sup_{0 \neq \psi \in A_j} \frac{|\langle \varphi, \psi \rangle|}{\|\psi\|_{A_j}} < \infty \right\}.$$

Так как

$$|\langle \varphi, \psi \rangle| = \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n) \psi(n) \right| \leq \|\psi\|_{A_j} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(n)| \exp(\sigma_j |n|^\rho),$$

для любой функции $\psi \in A_j$, не равной тождественно нулю, получаем

$$\frac{|\langle \varphi, \psi \rangle|}{\|\psi\|_{A_j}} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(n)| \exp(\sigma_j |n|^\rho).$$

Следовательно,

$$\|\varphi\|_{A'_j} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(n)| \exp(\sigma_j |n|^\rho). \quad (9)$$

Определим теперь функцию $\psi_1(n) \equiv |\varphi(n)| e^{\sigma_j |n|^\rho} / \varphi(n)$. Очевидно, $\psi_1 \in A_j$. Тогда

$$\|\varphi\|_{A'_j} \geq \frac{|\langle \varphi, \psi_1 \rangle|}{\|\psi_1\|_{A_j}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(n)| \exp(\sigma_j |n|^\rho). \quad (10)$$

Сравнивая (9) и (10), заключаем, что $\|\varphi\|_{A'_j} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(n)| \exp(\sigma_j |n|^\rho)$.

Из теории счетно-нормированных пространств следует, что $A'[\rho, \sigma] = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A'_j$. Так как функции Δ_n , $n \in \mathbb{Z}$, плотны в $A_j \quad \forall j \in \mathbb{N}$, то $A[\rho, \sigma]$ является плотным в каждом из пространств A_j , $j \in \mathbb{N}$. Отсюда следует [13], что пространство $A'[\rho, \sigma]$ топологически изоморфно индуктивному пределу пространств A'_j .

ЛЕММА 2. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Определим функцию $q_\lambda(n) = \exp(in\lambda)$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\|q_\lambda\|_{A_j} \leq \exp(\sigma_j^* |\operatorname{Im} \lambda|^{\rho^*}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall j \in \mathbb{N}; \quad (11)$$

$$\exp(\sigma_j^* |\operatorname{Im} \lambda|^{\rho^*}) < \|q_\lambda\|_{A_{j+1}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\operatorname{Im} \lambda| > r_0(j), \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольные $j \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Докажем вначале неравенство (11). Имеем

$$\|q_\lambda\|_{A_j} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\exp(in\lambda)|}{\exp(\sigma_j |n|^\rho)} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\exp((-n) \cdot \operatorname{Im} \lambda)}{\exp(\sigma_j |n|^\rho)} = \sup_{\substack{|n|, n \in \mathbb{Z} \\ n \cdot \operatorname{Im} \lambda < 0}} \frac{\exp(|n| |\operatorname{Im} \lambda|)}{\exp(\sigma_j |n|^\rho)}.$$

Определим для аргумента $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, функцию $b_{j,\lambda}(r) = \exp(r |\operatorname{Im} \lambda| - \sigma_j r^\rho)$. Нетрудно вычислить, что $\sup_{r \in \mathbb{R}, r \geq 0} b_{j,\lambda}(r) = \exp(\sigma_j^* |\operatorname{Im} \lambda|^{\rho^*})$ достигается в точке $r_{j,\lambda} = (|\operatorname{Im} \lambda| / \rho \sigma_j)^{\rho^* - 1}$. Обозначим через $n_{j,\lambda}$ точку из $\mathbb{Z}$, удовлетворяющую условиям:

$$1) \ b_{j,\lambda}(|n_{j,\lambda}|) = \sup_{r \in \mathbb{Z}, r \geq 0} b_{j,\lambda}(r);$$

2) $n_{j,\lambda} \cdot \operatorname{Im} \lambda < 0$ (если этим условиям удовлетворяют сразу две точки (слева и справа от $r_{j,\lambda}$), то можно выбрать любую из них).

Тогда $\|q_\lambda\|_{A_j} = b_{j,\lambda}(|n_{j,\lambda}|) \leq b_{j,\lambda}(r_{j,\lambda}) = \exp(\sigma_j^* |\operatorname{Im} \lambda|^{\rho^*})$, т.е. выполняется (11).

Докажем теперь (12). Очевидно, для точки $n_{j,\lambda}$ возможны два варианта:

$$а) \ r_{j,\lambda} - 1 < |n_{j,\lambda}| \leq r_{j,\lambda};$$

$$б) \ r_{j,\lambda} \leq |n_{j,\lambda}| < r_{j,\lambda} + 1.$$

Допустим, выполняется вариант а). Тогда

$$\|q_\lambda\|_{A_{j+1}} = \|\exp(in\lambda)\|_{A_{j+1}} = b_{j+1,\lambda}(|n_{j+1,\lambda}|) > b_{j+1,\lambda}(r_{j+1,\lambda} - 1).$$

Нетрудно вычислить, что $b_{j+1,\lambda}(r_{j+1,\lambda} - 1) = \exp(\alpha_\lambda \sigma_{j+1}^* |\operatorname{Im} \lambda|^{\rho^*})$, где

$$\alpha_\lambda = \rho^* - \rho^* \left(\frac{\rho \sigma_{j+1}}{|\operatorname{Im} \lambda|} \right)^{\rho^*-1} - (\rho^* - 1) \left(1 - \left(\frac{\rho \sigma_{j+1}}{|\operatorname{Im} \lambda|} \right)^{\rho^*-1} \right)^\rho.$$

Заметим, что $\alpha_\lambda \rightarrow 1$ при $|\operatorname{Im} \lambda| \rightarrow \infty$. Следовательно, найдется число $r_0(j)$ такое, что $\alpha_\lambda \sigma_{j+1}^* > \sigma_j^*$ при $|\operatorname{Im} \lambda| > r_0(j)$. Таким образом, $b_{j+1,\lambda}(r_{j+1,\lambda} - 1) > \exp(\sigma_j^* |\operatorname{Im} \lambda|^{\rho^*})$ при $|\operatorname{Im} \lambda| > r_0(j)$. Следовательно, выполняется (12). Аналогичным способом доказывается неравенство (12) и в случае б).

3. Преобразования Фурье–Лапласа и Меллина. Рассмотрим в $H(\mathbb{C})$ подкласс $P(\mathbb{C}) = \{g \in H(\mathbb{C}) : g(\lambda) = g(\lambda + 2\pi) \forall \lambda \in \mathbb{C}\}$. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ рассмотрим банахово пространство

$$P_j = \left\{ g \in P(\mathbb{C}) : \|g\|_{P_j} = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{|g(\lambda)|}{\exp(\sigma_j^* |\operatorname{Im} \lambda|^{\rho^*})} < \infty \right\}.$$

Определим пространство $P[\rho^*, \sigma^*] = \lim_j \operatorname{ind} P_j$. Введем отображение L , которое каждому функционалу $\varphi \in A'[\rho, \sigma]$ ставит в соответствие его преобразование Фурье–Лапласа $\widehat{\varphi}(\lambda) = \langle \varphi, \exp(in\lambda) \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n) \exp(in\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 2. *Отображение L устанавливает линейный топологический изоморфизм между пространствами $A'[\rho, \sigma]$ и $P[\rho^*, \sigma^*]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\varphi \in A'[\rho, \sigma]$. Тогда найдется $j \in \mathbb{N}$ такое, что $\|\varphi\|_{A'_j} < \infty$. С учетом неравенства (11) и леммы 1 для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ получаем оценку

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(n) e^{in\lambda}| \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\exp(in\lambda)|}{\exp(\sigma_j |n|^\rho)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(n)| \exp(\sigma_j |n|^\rho) \leq \|\varphi\|_{A'_j} \exp(\sigma_j^* |\operatorname{Im} \lambda|^{\rho^*}). \quad (13)$$

Из (13) следует, что ряд $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n) \exp(in\lambda)$ сходится абсолютно и равномерно в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq R\} \ \forall R > 0$. Следовательно, $\widehat{\varphi} \in H(\mathbb{C})$. Тогда, очевидно, $\widehat{\varphi} \in P(\mathbb{C})$. Кроме того, из (13) следует, что

$$\|\widehat{\varphi}\|_{P_j} \leq \|\varphi\|_{A'_j} < \infty. \quad (14)$$

Из (14) следует, что $\widehat{\varphi} \in P[\rho^*, \sigma^*)$ и что отображение $L: A'[\rho, \sigma] \rightarrow P[\rho^*, \sigma^*)$ является непрерывным.

2) Пусть $g \in P[\rho^*, \sigma^*)$. Тогда $\|g\|_{P_j} < \infty$ при некотором $j \in \mathbb{N}$. Для $\lambda \in \mathbb{C}$ обозначим $x = \operatorname{Re} \lambda$, $y = \operatorname{Im} \lambda$. Так как $g \in P(\mathbb{C})$, то (см., например, [14; гл. 7, § 5]) функция g единственным образом раскладывается в ряд Фурье:

$$g(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \exp(in\lambda), \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\lambda)}{\exp(in\lambda)} dx.$$

Введем функцию $a \in A$ такую, что $a(n) = a_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. Очевидно, выполняется оценка $|g(\lambda)| \leq \|g\|_{P_j} \exp(\sigma_j^* |y|^{\rho^*}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Таким образом,

$$|a(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\lambda)}{\exp(in\lambda)} dx \right| \leq \|g\|_{P_j} \exp(\sigma_j^* (|y|^{\rho^*} + ny)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$|a(n)| \leq \|g\|_{P_j} \inf_{y \in \mathbb{R}} \exp(\sigma_j^* (|y|^{\rho^*} + ny)).$$

Так как

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} \exp(\sigma_j^* (|y|^{\rho^*} + ny)) = \exp(-\sigma_j |n|^{\rho}),$$

то

$$|a(n)| \exp(\sigma_{j+1} |n|^{\rho}) \leq \|g\|_{P_j} \exp((\sigma_{j+1} - \sigma_j) |n|^{\rho}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда получаем

$$\|a\|_{A'_{j+1}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a(n)| \exp(\sigma_{j+1} |n|^{\rho}) \leq \|g\|_{P_j} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp((\sigma_{j+1} - \sigma_j) |n|^{\rho}).$$

Обозначим через C_j сумму сходящегося ряда $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp((\sigma_{j+1} - \sigma_j) |n|^{\rho})$. Тогда

$$\|a\|_{A'_{j+1}} \leq C_j \|g\|_{P_j} < \infty. \quad (15)$$

Из (15) следует, что $a \in A'[\rho, \sigma]$, причем $\hat{a}(\lambda) \equiv g(\lambda)$. Кроме того, из (15) следует, что отображение $L^{-1}: P[\rho^*, \sigma^*) \rightarrow A'[\rho, \sigma]$ является непрерывным.

Обозначим через H_0 множество всех аналитических в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функций. Определим пространство $H[\rho^*, \sigma^*) = \lim_j \operatorname{ind} H_j$, где

$$H_j = \left\{ f \in H_0 : \|f\|_{H_j} = \sup_{\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \frac{|f(\xi)|}{\exp(\sigma_j^* |\ln |\xi||^{\rho^*})} < \infty \right\}.$$

Пусть $\varphi \in A'[\rho, \sigma]$. Тогда по теореме 2 функция $\widehat{\varphi}(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n) \exp(in\lambda)$ принадлежит $P_j \subset P[\rho^*, \sigma^*)$ при некотором $j \in \mathbb{N}$. При замене переменной $\lambda = -i \operatorname{Ln} \xi$, $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, функция $\widehat{\varphi}(\lambda)$ перейдет в функцию $\widetilde{\varphi}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n) \xi^n = \langle \varphi, \xi^n \rangle$. Очевидно, $\widetilde{\varphi} \in H_j \subset H[\rho^*, \sigma^*)$, причем $\|\widehat{\varphi}\|_{P_j} = \|\widetilde{\varphi}\|_{H_j}$. Функция $\widetilde{\varphi}$ называется *преобразованием Меллина* функционала φ .

Пусть теперь $f \in H_j \subset H[\rho^*, \sigma^*)$ при некотором $j \in \mathbb{N}$. Функцию f можно единственным образом разложить в ряд Лорана $f(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \xi^n$. При замене переменной $\xi = \exp(i\lambda)$ функция $f(\xi)$ перейдет в функцию $f^*(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \exp(in\lambda)$.

Очевидно, $f^* \in P[\rho^*, \sigma^*)$, причем $\|f^*\|_{P_j} = \|f\|_{H_j}$. Введем функцию $b \in A$ такую, что $b(n) = b_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. По теореме 2 $b \in A'[\rho, \sigma]$, $\hat{b}(\lambda) \equiv f^*(\lambda)$. Кроме того, очевидно, $f(\xi) \equiv \tilde{b}(\xi)$. Таким образом, мы получили следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Отображение $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$ устанавливает линейный топологический изоморфизм между пространствами $A'[\rho, \sigma]$ и $H[\rho^*, \sigma^*)$.*

4. Сходимость бесконечных произведений. Пусть $f \in H(\mathbb{C})$, $p > 1$. Обозначим

$$\tau_f(p) := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln \max_{|z|=r} |f(z)|}{(\ln r)^p} \right).$$

Если $\tau_f(p) < \infty$ и $V = \{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — нулевое множество f , то [15; теорема 4] выполняется

$$\tau_f(p) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N_V(r)}{(\ln r)^p}. \quad (16)$$

ЛЕММА 3. *Пусть $G(\lambda) \in P[p, q)$, $p > 1$, $0 < q < \infty$, $S = \{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $|\operatorname{Im} s_k| \nearrow \infty$, — нули $G(\lambda)$, содержащиеся в полосе $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z < 2\pi\}$ (каждый нуль выписывается столько раз, какова его кратность). Тогда функция*

$$Q(\lambda) = \prod_{\operatorname{Im} s_k \geq 0} \left(1 - \frac{\exp(is_k)}{\exp(i\lambda)} \right) \prod_{\operatorname{Im} s_k < 0} \left(1 - \frac{\exp(i\lambda)}{\exp(is_k)} \right) \quad (17)$$

принадлежит пространству $P[p, \delta)$, где $\delta = e(\sqrt{2})^{2p-1} q\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нулевым множеством $G(\lambda)$ является множество $S_G = \{s_k + 2m\pi\}_{k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}}$. Так как $G(\lambda)$ имеет порядок $\leq p$, то $\mu_{S_G} \leq p$. Известно (см., например, [12; гл. 1]), что $\mu_{S_G} = \mu_S + 1$. Следовательно, $\mu_S \leq p - 1$. Тогда из определения показателя сходимости [4; с. 19] вытекает следующая оценка:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{|s_k|^{p-1+\varepsilon}} < \infty \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (18)$$

Из (18) вытекают оценки

$$\sum_{\operatorname{Im} s_k < 0} \exp(\varepsilon_1 \operatorname{Im} s_k) < \infty, \quad \sum_{\operatorname{Im} s_k \geq 0} \exp(-\varepsilon_1 \operatorname{Im} s_k) < \infty \quad \forall \varepsilon_1 > 0.$$

Следовательно, бесконечные произведения в (17) сходятся абсолютно и равномерно в $\mathbb{C}$. Таким образом, $Q(\lambda) \in P(\mathbb{C})$. Из последних неравенств следует также, что бесконечные произведения

$$g_1(\xi) = \prod_{\operatorname{Im} s_k \geq 0} (1 - \xi \exp(is_k)), \quad g_2(\xi) = \prod_{\operatorname{Im} s_k < 0} (1 - \xi \exp(-is_k))$$

являются целыми функциями нулевого порядка. Их нулевыми множествами являются соответственно $S_1 = \{\exp(-is_k), k \in \mathbb{N}\}$, $S_2 = \{\exp(is_k), k \in \mathbb{N}\}$. Согласно [15; теорема 3]

$$\tau_{g_1}(p) \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{S_1}(r)}{p(\ln r)^{p-1}}, \quad \tau_{g_2}(p) \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{S_2}(r)}{p(\ln r)^{p-1}}.$$

Пусть $r > 1$. Заметим, что выполняются следующие оценки:

$$n_{S_1}(r) \leq n_S(R), \quad n_{S_2}(r) \leq n_S(R), \quad (19)$$

где $R = \sqrt{(\ln r)^2 + 4\pi^2}$. Заметим, что $(R/\pi) \cdot n_S(R) \leq n_{S_G}(R\sqrt{2})$. Так как $G(\lambda)$ имеет тип $< q$ при порядке p , то согласно [4; гл. 4] выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{n_{S_G}(R)}{R^p} < epq.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{n_S(R)}{R^{p-1}} < ep(\sqrt{2})^p q. \quad (20)$$

Из (19) получаем, что

$$\frac{n_{S_2}(r)}{(\ln r)^{p-1}} < \frac{n_S(R)}{(\ln r)^{p-1}} = \frac{n_S(R)}{(R\sqrt{1 - 4\pi^2/R^2})^{p-1}}.$$

Заметим, что при $R > 2\sqrt{2}\pi$ выполняется $\sqrt{1 - 4\pi^2/R^2} > 1/\sqrt{2}$. Следовательно,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{S_2}(r)}{(\ln r)^{p-1}} < \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n_S(R)}{R^{p-1}} (\sqrt{2})^{p-1}.$$

Отсюда и из (20) следует, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{S_2}(r)}{(\ln r)^{p-1}} < ep(\sqrt{2})^{2p-1} q\pi.$$

Аналогично доказывается, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{S_1}(r)}{(\ln r)^{p-1}} < ep(\sqrt{2})^{2d-1} q\pi.$$

Следовательно,

$$\tau_{g_1}(p) < e(\sqrt{2})^{2p-1} q\pi = \delta, \quad \tau_{g_2}(p) < e(\sqrt{2})^{2p-1} q\pi = \delta.$$

Составим функцию $g(\xi) = g_1(1/\xi)g_2(\xi)$. Очевидно, $g_1(1/\xi)$ ограничена при $|\xi| \rightarrow \infty$, а $g_2(\xi)$ ограничена при $|\xi| \rightarrow 0$. Заметим, что при замене переменной $\xi = \exp(i\lambda)$ функция $g(\xi)$ перейдет в функцию $Q(\lambda)$. Таким образом, получаем

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \max_{|\operatorname{Im} \lambda| = r} |Q(\lambda)|}{r^p} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \max_{|\ln |\xi|| = r} |g(\xi)|}{r^p} < \delta.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Обозначим $\xi_k = e^{i\lambda_k}$, $\xi'_k = e^{i\lambda'_k}$, $\xi''_k = e^{i\lambda''_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим функцию $\hat{b}(\lambda)$, определенную во введении. Так как $\hat{B}(\lambda) \in E[\rho^*, \sigma^*)$, то $\mu_\Lambda \leq \rho^*$. Тогда, повторив рассуждения из доказательства леммы 3, заключаем, что $\hat{b}(\lambda) \in P(\mathbb{C})$, а бесконечные произведения $f_1(\xi) = \prod_k (1 - \xi \xi'_k)$, $f_2(\xi) = \prod_k (1 - \xi / \xi''_k)$, $\xi \in \mathbb{C}$, являются целыми функциями. Их нулевыми множествами являются соответственно Ω_1 , Ω_2 . Будем

теперь считать, что множество Λ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда из (16) следует, что $\tau_{f_1}(\rho^*) = \tau_1 < \sigma^*$, $\tau_{f_2}(\rho^*) = \tau_2 < \sigma^*$. Обозначим $\check{f}_1(\xi) = f_1(1/\xi)$ и составим функцию $\tilde{b}(\xi) = \check{f}_1(\xi)f_2(\xi)$. Нетрудно видеть, что $\tilde{b}(\xi) \in H[\rho^*, \sigma^*)$. При замене переменной $\xi = e^{i\lambda}$ функция $\tilde{b}(\xi)$ перейдет в функцию $\hat{b}(\lambda)$. Таким образом, $\hat{b}(\lambda) \in P[\rho^*, \sigma^*)$. Заметим, что отсюда следует, что $\mu_\Lambda \leq \rho^* - 1$. Таким образом, если множество Λ удовлетворяет условиям теоремы 1, то $\mu_\Lambda \leq \rho^* - 1$.

Так как $\hat{b}(\lambda) \in P[\rho^*, \sigma^*)$, по теореме 2 найдется единственный функционал $b \in A'[\rho, \sigma]$ такой, что $\hat{b}(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b(n) \exp(in\lambda)$, т.е. функция $\hat{b}(\lambda)$ является преобразованием Фурье–Лапласа функционала b . Очевидно, функция $\tilde{b}(\xi)$ является преобразованием Меллина функционала b и имеет вид $\tilde{b}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b(n)\xi^n$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $g(\xi) \in H[\rho^*, \sigma^*)$, $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – нулевое множество $g(\xi)$ (каждый нуль выписывается столько раз, какова его кратность). Тогда

$$g(\xi) = C\xi^t g_1\left(\frac{1}{\xi}\right) g_2(\xi), \quad \text{где} \quad g_1(\xi) = \prod_{|z_k| \leq 1} (1 - z_k \xi), \quad g_2(\xi) = \prod_{|z_k| > 1} \left(1 - \frac{\xi}{z_k}\right),$$

$C \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{Z}$ – некоторые константы. При этом $g_1, g_2 \in H(\mathbb{C})$, $\tau_{g_1}(\rho^*) < \sigma^*$, $\tau_{g_2}(\rho^*) < \sigma^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При замене переменной $\xi = \exp(i\lambda)$ функция $g(\xi)$ перейдет в функцию $L(\lambda) \in P[\rho^*, \sigma^*)$. Тогда из леммы 3 следует, что функция

$$Q(\lambda) = \prod_{|z_k| \leq 1} \left(1 - \frac{z_k}{\exp(i\lambda)}\right) \prod_{|z_k| > 1} \left(1 - \frac{\exp(i\lambda)}{z_k}\right)$$

принадлежит $P(\mathbb{C})$ и имеет порядок не выше ρ^* . Введем функцию $w(\lambda) = L(\lambda)/Q(\lambda)$. Очевидно, $w(\lambda)$ принадлежит $P(\mathbb{C})$ и не имеет нулей. Так как $L(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ имеют порядки не выше ρ^* , то [4; с. 37] $w(\lambda)$ имеет порядок не выше ρ^* . Так как $w(\lambda)$ нигде не обращается в нуль и имеет порядок не выше ρ^* , то [14; с. 272, 282] $w(\lambda) = e^{p(\lambda)}$, где $p(\lambda)$ является многочленом степени не выше, чем целая часть ρ^* . Так как $w(\lambda)$ имеет период 2π , многочлен $p(\lambda)$ должен удовлетворять условию

$$p(\lambda + 2\pi) - p(\lambda) = it2\pi \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \exists t \in \mathbb{Z}. \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что условию (21) удовлетворяют только многочлены вида $p(\lambda) = it\lambda + C_0$, где $t \in \mathbb{Z}$, $C_0 \in \mathbb{C}$ – произвольные константы. Таким образом, $w(\lambda) = Ce^{it\lambda}$, где $C = e^{C_0}$. Следовательно, $L(\lambda) = C \exp(it\lambda)Q(\lambda)$. Отсюда следует, что $g(\xi) = C\xi^t g_1(1/\xi)g_2(\xi)$.

Осталось оценить $\tau_{g_1}(\rho^*)$, $\tau_{g_2}(\rho^*)$. Из теоремы об оценке снизу аналитической функции, не обращающейся в нуль [4; с. 31], следует, что найдутся некоторые положительные константы C_1, C_2 , при которых выполняются оценки

$$\left|g_1\left(\frac{1}{\xi}\right)\right| \geq C_1, \quad 1 < |\xi| < \infty, \quad |g_2(\xi)| \geq C_2, \quad 0 < |\xi| < 1. \quad (22)$$

Так как $g \in H[\rho^*, \sigma^*)$, найдутся числа $C_3 > 0$, $j \in \mathbb{N}$ такие, что в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ выполняется оценка $|g(\xi)| \leq C_3 \exp(\sigma_j^* |\ln |\xi||^{\rho^*})$. Тогда

$$\begin{aligned} |g_2(\xi)| &\leq \frac{C_3 \exp(\sigma_j^* |\ln |\xi||^{\rho^*})}{C \xi^t g_1(1/\xi)} \leq \frac{C_3 \exp(\sigma_j^* |\ln |\xi||^{\rho^*})}{C \xi^t C_1}, & 1 < |\xi| < \infty, \\ \left| g_1\left(\frac{1}{\xi}\right) \right| &\leq \frac{C_3 \exp(\sigma_j^* |\ln |\xi||^{\rho^*})}{C \xi^t g_2(\xi)} \leq \frac{C_3 \exp(\sigma_j^* |\ln |\xi||^{\rho^*})}{C \xi^t C_2}, & 0 < |\xi| < 1. \end{aligned}$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$|g_1(\xi)| \leq \frac{C_3 \xi^t \exp(\sigma_j^* |\ln |\xi||^{\rho^*})}{C C_2}, \quad 1 < |\xi| < \infty.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \ln |g_2(\xi)| &\leq \sigma_j^* |\ln |\xi||^{\rho^*} \left(1 - \frac{\xi^t}{\sigma_j^* |\ln |\xi||^{\rho^*}} \right) + \text{const}, & 1 < |\xi| < \infty, \\ \ln |g_1(\xi)| &\leq \sigma_j^* |\ln |\xi||^{\rho^*} \left(1 + \frac{\xi^t}{\sigma_j^* |\ln |\xi||^{\rho^*}} \right) + \text{const}, & 1 < |\xi| < \infty. \end{aligned}$$

Из последних соотношений следуют оценки $\tau_{g_1}(\rho^*) < \sigma^*$, $\tau_{g_2}(\rho^*) < \sigma^*$.

5. Дискретное уравнение свертки. Пусть $m \in \mathbb{Z}$. Определим на $A[\rho, \sigma]$ оператор сдвига S^m , который каждой функции $\psi \in A[\rho, \sigma]$ ставит в соответствие функцию $S^m \psi \in A$ такую, что $S^m \psi(n) \equiv \psi(n+m)$. Нетрудно проверить, что S^m действует линейно и непрерывно из $A[\rho, \sigma]$ в $A[\rho, \sigma]$. Пусть $\varphi \in A'[\rho, \sigma]$. Определим на $A[\rho, \sigma]$ оператор свертки M_φ , который каждой функции $\psi \in A[\rho, \sigma]$ ставит в соответствие функцию $M_\varphi[\psi] \in A$ такую, что $M_\varphi[\psi](m) \equiv \langle \varphi, S^m \psi \rangle$. Нетрудно установить, что оператор M_φ действует линейно и непрерывно из пространства $A[\rho, \sigma]$ в пространство $A[\rho, \tilde{\sigma}]$, где число $\tilde{\sigma} > \sigma$ зависит от φ .

Как уже было отмечено, функция $\hat{b}(\lambda) \in P[\rho^*, \sigma^*)$ является преобразованием Фурье–Лапласа функционала $b \in A'[\rho, \sigma]$. Функционал b определяет на $A[\rho, \sigma]$ однородное уравнение свертки $M_b[\psi](m) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$, совпадающее с уравнением (6). Обозначим через W_b пространство решений уравнения (6). Так как оператор M_b является линейным и непрерывным, то $W_b = \ker M_b$ является замкнутым подпространством в $A[\rho, \sigma]$. Функция $\hat{b}(\lambda)$ называется *характеристической функцией* уравнения (6). Обозначим нулевое множество $\tilde{b}(\xi)$ через $\tilde{\Lambda}$. Множество $\tilde{\Lambda}$ состоит из точек ξ_k , $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, функции $x_k(n) = \exp(in\lambda_k) = \xi_k^n$, $k \in \mathbb{N}$, являются решениями уравнения (6). Эти решения будем называть *элементарными*.

6. Теорема деления в $H[\rho^*, \sigma^*)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть функции $h_1(\xi), h_2(\xi) \in H[\rho^*, \sigma^*)$ таковы, что $(h_1/h_2)(\xi) \in H_0$. Тогда $(h_1/h_2)(\xi) \in H[\rho^*, \sigma^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z' = \{z'_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – нулевое множество $h_1(\xi)$, $Z'' = \{z''_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – нулевое множество $h_2(\xi)$ (нули повторяются столько раз, какова их кратность).

Так как $(h_1/h_2)(\xi) \in H_0$, то $Z'' \subset Z'$. Обозначим

$$\begin{aligned} h_{11}(\xi) &= \prod_{|z'_k| \leq 1} (1 - z'_k \xi), & h_{12}(\xi) &= \prod_{|z'_k| > 1} \left(1 - \frac{\xi}{z'_k}\right), \\ h_{21}(\xi) &= \prod_{|z''_k| \leq 1} (1 - z''_k \xi), & h_{22}(\xi) &= \prod_{|z''_k| > 1} \left(1 - \frac{\xi}{z''_k}\right). \end{aligned}$$

Тогда согласно теореме 4

$$h_1(\xi) = C_1 \xi^{t_1} h_{11} \left(\frac{1}{\xi} \right) h_{12}(\xi), \quad h_2(\xi) = C_2 \xi^{t_2} h_{21} \left(\frac{1}{\xi} \right) h_{22}(\xi),$$

где $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ – некоторые константы. При этом

$$\tau_{h_{11}}(\rho^*) < \sigma^*, \quad \tau_{h_{12}}(\rho^*) < \sigma^*, \quad \tau_{h_{21}}(\rho^*) < \sigma^*, \quad \tau_{h_{22}}(\rho^*) < \sigma^*.$$

Рассмотрим функции $w_1(\xi) = h_{11}(\xi)/h_{21}(\xi)$, $w_2(\xi) = h_{12}(\xi)/h_{22}(\xi)$. Тогда

$$\frac{h_1(\xi)}{h_2(\xi)} = C \xi^t w_1 \left(\frac{1}{\xi} \right) w_2(\xi),$$

где $C = C_1/C_2$, $t = t_1 - t_2$. Очевидно, $w_1(\xi)$, $w_2(\xi)$ являются целыми функциями. Кроме того, из (16) следует, что

$$\tau_{w_1}(\rho^*) \leq \tau_{h_{11}}(\rho^*) < \sigma^*, \quad \tau_{w_2}(\rho^*) \leq \tau_{h_{12}}(\rho^*) < \sigma^*.$$

Отсюда вытекает, что $(h_1/h_2)(\xi) \in H[\rho^*, \sigma^*]$.

7. Аппроксимация решений. Пусть даны функции $g_1(\xi), g_2(\xi) \in H[\rho^*, \sigma^*]$ такие, что $(g_1 \cdot g_2)(\xi) \in H[\rho^*, \sigma^*]$. Обозначим $g_3(\xi) = (g_1 \cdot g_2)(\xi)$. По теореме 3 найдутся функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in A'[\rho, \sigma]$ такие, что $\tilde{\varphi}_1(\xi) \equiv g_1$, $\tilde{\varphi}_2(\xi) \equiv g_2(\xi)$, $\tilde{\varphi}_3(\xi) \equiv g_3(\xi)$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_3(\xi) &= \langle \varphi_3, \xi^n \rangle = \tilde{\varphi}_1(\xi) \cdot \tilde{\varphi}_2(\xi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi_1(m) \xi^m \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_2(n) \xi^n \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi_1(m) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_2(n) \xi^{n+m} = \langle \varphi_1, M_{\varphi_2}[\xi^n] \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, функционал φ_3 действует по правилу $\langle \varphi_3, \cdot \rangle = \langle \varphi_1, M_{\varphi_2}[\cdot] \rangle$. Функционал φ_3 , действующий по этому правилу, называется *сверткой* функционалов φ_1 и φ_2 и обозначается $\varphi_3 = \varphi_1 * \varphi_2$.

ТЕОРЕМА 6. Имеем $W_b = \overline{\text{span}\{x_k, k \in \mathbb{N}\}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in A'[\rho, \sigma]$ – произвольный функционал такой, что

$$\langle \varphi, x_k \rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

Согласно принципу аппроксимации [16; теорема 2.3.1] для доказательства теоремы достаточно показать, что $\langle \varphi, \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in W_b$. Рассмотрим $\tilde{\varphi}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n) \xi^n$.

По теореме 3 $\tilde{\varphi}(\xi) \in H[\rho^*, \sigma^*)$. Определим функцию $\alpha(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi)/\tilde{b}(\xi)$. В силу условия (23) $\alpha(\xi) \in H_0$. Тогда по теореме 5 $\alpha(\xi) \in H[\rho^*, \sigma^*)$. Следовательно, по теореме 3 найдется функционал $\chi \in A'[\rho, \sigma]$ такой, что $\tilde{\chi}(\xi) \equiv \alpha(\xi)$. Так как $\tilde{\varphi}(\xi) = \tilde{\chi}(\xi) \cdot \tilde{b}(\xi)$, то $\varphi = \chi * b$. Следовательно,

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \chi * b, \psi \rangle = \langle \chi, M_b[\psi] \rangle = \langle \chi, 0 \rangle = 0 \quad \forall \psi \in W_b.$$

8. Базис в пространстве W_b . Выясним, при каких условиях на множество Λ выполняется утверждение

(А) функции x_k , $k \in \mathbb{N}$, образуют регулярный базис в пространстве W_b .

Рассмотрим следующие условия:

(Q1) для любой последовательности $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющей условию

$$\exists j \in \mathbb{N} : \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|t_k|}{\|e^{in\lambda_k}\|_{A_j}} < \infty, \quad (24)$$

найдется функционал $\varphi \in A'[\rho, \sigma]$ такой, что $\langle \varphi, e^{in\lambda_k} \rangle = t_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$;

(Q2) для любой последовательности $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющей условию

$$\exists j \in \mathbb{N} : \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|t_k|}{\exp(\sigma_j^* |\operatorname{Im} \lambda_k|^{\rho^*})} < \infty, \quad (25)$$

найдется функция $g \in P[\rho^*, \sigma^*)$ такая, что $g(\lambda_k) = t_k \quad \forall k$;

(Q3) для любой последовательности $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющей условию

$$\exists j \in \mathbb{N} : \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|t_k|}{\exp(\sigma_j^* |\ln |\xi_k||^{\rho^*})} < \infty, \quad (26)$$

найдется функция $\omega \in H[\rho^*, \sigma^*)$ такая, что $\omega(\xi_k) = t_k \quad \forall k$.

ЛЕММА 4. Имеем $(Q3) \iff (Q2) \iff (Q1) \iff (A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Соотношение $(Q1) \iff (A)$ следует из [11; теорема 1], с учетом того, что $W_b = \overline{\operatorname{span}\{e^{in\lambda_k}, k \in \mathbb{N}\}}$ (последнее было доказано в теореме 6).

2) Соотношение $(Q3) \iff (Q2)$ очевидно. Действительно, условия (25) и (26) суть одно и то же; функции $\omega(\xi)$ и $g(\lambda)$ получаются друг из друга при замене переменной $\xi = \exp(i\lambda)$.

3) Докажем теперь, что $(Q2) \iff (Q1)$. По теореме 2 существование функции $g(\lambda) \in P[\rho^*, \sigma^*)$ такой, что $g(\lambda_k) = t_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$, равносильно существованию функционала $\varphi \in A'[\rho, \sigma]$ такого, что $\langle \varphi, e^{in\lambda_k} \rangle = t_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Осталось доказать равносильность условий (25) и (24). Итак, пусть выполнено (25). Тогда с учетом (12) получаем

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|t_k|}{\|e^{in\lambda_k}\|_{A_{j+1}}} \leq \operatorname{const} \cdot \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|t_k|}{\exp(\sigma_j^* |\operatorname{Im} \lambda_k|^{\rho^*})} < \infty,$$

т.е. выполняется (24). Наоборот, пусть выполнено (24). Тогда с учетом (11) получаем

$$\frac{|t_k|}{\exp(\sigma_j^* |\operatorname{Im} \lambda_k|^{\rho^*})} < \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|t_k|}{\|e^{in\lambda_k}\|_{A_j}} < \infty,$$

т.е. выполняется (25).

Рассмотрим теперь условие

(Q3a) для любых последовательностей $\{t'_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ и $\{t''_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$\exists j \in \mathbb{N} : \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|t'_k|}{\exp(\sigma_j^* |\ln |\xi'_k||^{\rho^*})} < \infty, \quad \frac{|t''_k|}{\exp(\sigma_j^* |\ln |\xi''_k||^{\rho^*})} < \infty, \quad (27)$$

найдется функция $\omega(\xi) \in H[\rho^*, \sigma^*)$ такая, что $\omega(\xi'_k) = t'_k$, $\omega(\xi''_k) = t''_k \quad \forall k$.

Очевидно, **(Q3a)** $\iff$ **(Q3)**. Выясним, при каких условиях выполняется **(Q3a)**. Возьмем произвольные последовательности $\{t'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\{t''_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющие (27). Положим $v'_k = t'_k / f_2(\xi'_k)$, $v''_k = t''_k / \check{f}_1(\xi''_k)$. Согласно (22) выполняются равномерные по k оценки: $|v'_k| \leq C_2 |t'_k|$, $|v''_k| \leq C_1 |t''_k|$. Следовательно, последовательности $\{v'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\{v''_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ удовлетворяют условиям (27). Предположим, что выполняется условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\ln |\xi'_k||^{\rho^*}} \ln \left| f'_1 \left(\frac{1}{\xi'_k} \right) \cdot \frac{1}{\xi'_k} \right| = \tau_1. \quad (28)$$

Тогда согласно [17; теорема 10] существует $\gamma(\xi) \in H(\mathbb{C})$ такая, что $\tau_\gamma(\rho^*) < \sigma^*$, $\gamma(1/\xi'_k) = v'_k \quad \forall k$. Положим $\omega_1(\xi) = \gamma(1/\xi)$. Тогда $\omega_1(\xi'_k) = v'_k$. Аналогично, если выполняется

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\ln |\xi''_k||^{\rho^*}} \ln |f'_2(\xi''_k) \cdot \xi''_k| = \tau_2, \quad (29)$$

то существует целая функция $\omega_2(\xi)$ такая, что $\tau_{\omega_2}(\rho^*) < \sigma^*$, $\omega_2(\xi''_k) = v''_k \quad \forall k$. Определим функцию $\omega(\xi) = \omega_1(\xi) f_2(\xi) + \omega_2(\xi) \check{f}_1(\xi)$. Очевидно, $\omega_1(\xi) \cdot f_2(\xi) \in H_0$, $\omega_2(\xi) \cdot \check{f}_1(\xi) \in H_0$. Заметим, что функции $\check{f}_1(\xi)$, $\omega_1(\xi)$ ограничены при $|\xi| \rightarrow \infty$, а функции $f_2(\xi)$, $\omega_2(\xi)$ ограничены при $|\xi| \rightarrow 0$. Так как $\tau_{\omega_2}(\rho^*) < \sigma^*$, $\tau_\gamma(\rho^*) < \sigma^*$, $\tau_{f_2}(\rho^*) < \sigma^*$, $\tau_{f_1}(\rho^*) < \sigma^*$, то $\omega_1(\xi) \cdot f_2(\xi) \in H[\rho^*, \sigma^*)$, $\omega_2(\xi) \cdot \check{f}_1(\xi) \in H[\rho^*, \sigma^*)$. Следовательно, $\omega(\xi) \in H[\rho^*, \sigma^*)$. Кроме того, $\omega(\xi'_k) = t'_k$, $\omega(\xi''_k) = t''_k \quad \forall k$. Действительно,

$$\omega(\xi'_k) = \omega_1(\xi'_k) f_2(\xi'_k) + \omega_2(\xi'_k) \check{f}_1(\xi'_k) = v'_k f_2(\xi'_k) + \omega_2(\xi'_k) \cdot 0 = \frac{t'_k}{f_2(\xi'_k)} f_2(\xi'_k) = t'_k,$$

$$\omega(\xi''_k) = \omega_1(\xi''_k) f_2(\xi''_k) + \omega_2(\xi''_k) \check{f}_1(\xi''_k) = \omega_1(\xi''_k) \cdot 0 + v''_k \check{f}_1(\xi''_k) = \frac{t''_k}{\check{f}_1(\xi''_k)} \check{f}_1(\xi''_k) = t''_k.$$

Таким образом, при выполнении (28) и (29) выполняется **(Q3a)**, а значит, и **(A)**. Нетрудно видеть, что условия (28), (29) равносильны соответственно условиям

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\ln |\xi'_k||^{\rho^*}} \ln \left| \prod_{n \neq k} \left(1 - \frac{\xi'_n}{\xi'_k} \right) \right| = \tau_1, \quad (30)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\ln |\xi''_k||^{\rho^*}} \ln \left| \prod_{n \neq k} \left(1 - \frac{\xi''_n}{\xi''_k} \right) \right| = \tau_2. \quad (31)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. Если множество $\tilde{\Lambda}$ удовлетворяет условиям (30) и (31), то функции x_k , $k \in \mathbb{N}$, образуют регулярный базис в пространстве W_b .

Заметим, что условия (30), (31) равносильны соответственно условиям (3), (4). Таким образом, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8. *Если множество Λ удовлетворяет условиям теоремы 1, то функции x_k , $k \in \mathbb{N}$, образуют регулярный базис в W_b .*

9. Формулы для коэффициентов. Пусть $a \in W_b$. Если выполнены условия теоремы 1, то по теореме 8 функция a единственным образом разлагается в ряд $a(n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp(in\lambda_k)$. Очевидно, функции

$$\hat{b}_k(\lambda) = \frac{\hat{b}(\lambda)}{1 - \exp(i\lambda - i\lambda_k)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

принадлежат $P[\rho^*, \sigma^*)$ и разлагаются в ряды Фурье $\hat{b}_k(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_k(n) \exp(in\lambda)$. Следовательно, $b_k \in A'[\rho, \sigma]$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\langle b_m, a \rangle = \left\langle b_m, \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp(in\lambda_k) \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \langle b_m, \exp(in\lambda_k) \rangle = c_m \hat{b}_m(\lambda_m), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Таким образом,

$$c_m = \frac{\langle b_m, a \rangle}{\hat{b}_m(\lambda_m)} = \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} b_m(n) a(n)}{\hat{b}_m(\lambda_m)}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (32)$$

10. Базис в пространстве W_B . Как было отмечено ранее, для того, чтобы функции $\exp(iz\lambda_k)$, $k \in \mathbb{N}$, образовывали регулярный базис в W_B , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (Q).

ЛЕММА 5. *Имеем (Q2) $\implies$ (Q).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено (Q2). Покажем, что выполняется (Q). Возьмем произвольную последовательность $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющую условию (8). Заметим, что при $|\operatorname{Im} \lambda_k| \neq 0$ выполняется

$$|\lambda_k| \leq |\operatorname{Re} \lambda_k| + |\operatorname{Im} \lambda_k| < |\operatorname{Im} \lambda_k| + 2\pi = |\operatorname{Im} \lambda_k| \left(1 + \frac{2\pi}{|\operatorname{Im} \lambda_k|} \right).$$

Так как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2\pi}{|\operatorname{Im} \lambda_k|} \right) = 1,$$

при достаточно больших k выполняется $\sigma_j^* |\lambda_k|^{\rho^*} < \sigma_{j+1}^* |\operatorname{Im} \lambda_k|^{\rho^*}$. Отсюда следует, что последовательность $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (25). Так как, по предположению, выполнено (Q2), найдется функция $g(\lambda) \in P[\rho^*, \sigma^*)$ такая, что $g(\lambda_k) = t_k \forall k$. Так как $g \in P[\rho^*, \sigma^*)$, очевидно, $g \in E[\rho^*, \sigma^*)$. Следовательно, выполняется (Q).

Из леммы 5 и теоремы 8 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 9. *Если множество Λ удовлетворяет условиям теоремы 1, то выполняется условие (Q2).*

СЛЕДСТВИЕ. *При выполнении условий теоремы 1 функции $\exp(i\lambda_k z)$, $k \in \mathbb{N}$, образуют регулярный базис в пространстве W_B .*

11. Изоморфизм между W_b и W_B . Введем отображение $T: E[\rho, \sigma] \rightarrow A[\rho, \sigma]$, которое каждой функции $f \in E[\rho, \sigma]$ ставит в соответствие функцию $T[f] \equiv f|_{\mathbb{Z}} \in A[\rho, \sigma]$.

ТЕОРЕМА 10. *Если выполняются условия теоремы 1, то отображение T осуществляет линейный топологический изоморфизм между пространствами W_B и W_b .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $f \in W_B$. По следствию к теореме 9 функцию f можно единственным образом разложить в ряд $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \exp(iz\lambda_k)$. Тогда $T[f](n) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \exp(in\lambda_k)$. Следовательно, $T[f] \in W_b$.

2) Пусть $a \in W_b$. По теореме 8 функцию a можно единственным образом разложить в ряд $a(n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp(in\lambda_k)$. Рассмотрим ряд

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp(iz\lambda_k). \quad (33)$$

Докажем сходимость ряда (33) в топологии пространства $E[\rho, \sigma]$. Зафиксируем произвольное $j \in \mathbb{N}$. Так как функции $\exp(i\lambda_k n)$, $k \in \mathbb{N}$, образуют в пространстве W_b регулярный базис, то [11; с. 523] выполняется оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cdot \|\exp(in\lambda_k)\|_{A_{j+2}} < \infty. \quad (34)$$

Из неравенства (12) вытекает оценка

$$\|\exp(in\lambda_k)\|_{A_{j+2}} > \exp(\sigma_{j+1}^* |\operatorname{Im} \lambda_k|^{\rho^*}). \quad (35)$$

Из (34) и (35) следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \exp(\sigma_{j+1}^* |\operatorname{Im} \lambda_k|^{\rho^*}) =: K_j < \infty. \quad (36)$$

Оценим теперь ряд (33):

$$\begin{aligned} |h(z)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| |\exp(iz\lambda_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \exp(-\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} \lambda_k - \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} \lambda_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \exp(|z|(2\pi + |\operatorname{Im} \lambda_k|)) \leq \exp(\sigma_j |z|^{\rho}) \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \sup_{|z|} \frac{\exp(|z|(2\pi + |\operatorname{Im} \lambda_k|))}{\exp(\sigma_j |z|^{\rho})} \\ &= \exp(\sigma_j |z|^{\rho}) \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \exp(\sigma_j^* (2\pi + |\operatorname{Im} \lambda_k|)^{\rho^*}). \end{aligned}$$

Очевидно, что $\sigma_j^* (2\pi + |\operatorname{Im} \lambda_k|)^{\rho^*} < \sigma_{j+1}^* |\operatorname{Im} \lambda_k|^{\rho^*}$, $k > k_1(j)$. Таким образом, с учетом (36) получаем

$$|h(z)| \leq K_j \exp(\sigma_j |z|^{\rho}) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (37)$$

Из (37) следует, что ряд (33) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$ и, таким образом, $h(z) \in H(\mathbb{C})$. Так как (37) выполняется для произвольного $j \in \mathbb{N}$, то $h(z) \in E[\rho, \sigma]$. Тогда из представления (33) следует, что $h(z) \in W_B$. Кроме того, очевидно, $T[h] = a$.

Предположим, что существует функция $h_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c'_k \exp(iz\lambda_k) \in W_B$ такая, что $T[h_1] = a$. Тогда $a(n) = \sum_{k=1}^{\infty} c'_k \exp(in\lambda_k)$. Но из единственности разложения по базису $\exp(in\lambda_k)$, $k \in \mathbb{N}$, в пространстве W_b следует, что $c'_k = c_k \quad \forall k$. Следовательно, $h_1(z) \equiv h(z)$. Таким образом, T осуществляет взаимно-однозначное отображение между W_B и W_b . Очевидно, отображение T является линейным и непрерывным. Так как W_b и W_B являются замкнутыми подпространствами пространств Фреше, то W_b и W_B являются пространствами Фреше. Следовательно [18; с. 175], отображение T^{-1} является линейным и непрерывным.

12. Доказательство основного результата. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда согласно теореме 10 любое решение уравнения (1) однозначно определяется своими значениями на $\mathbb{Z}$. Докажем формулу (5). Пусть $f \in W_B$. Так как $f|_{\mathbb{Z}} \in W_b$, то $f(n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp(in\lambda_k)$, $n \in \mathbb{Z}$, где коэффициенты c_k , $k \in \mathbb{N}$, определяются по формулам (32). По теореме 10 $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp(iz\lambda_k)$, $z \in \mathbb{C}$. Следовательно, имеет место (5). Теорема 1 доказана.

Приведем пример функции $\hat{B}(\lambda)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1 для случая $\rho^* = 2$, $\sigma^* > 1/2$. Положим $\hat{B}(\lambda) = \sin(i\pi\lambda)/\lambda$. Тогда $\lambda'_k = ik$, $\lambda''_k = -ik$, $k \in \mathbb{N}$; $\Omega_1 = \Omega_2 = \{e^k, k \in \mathbb{N}\}$. Нетрудно вычислить, что $\tau_1 = \tau_2 = 1/2$. Следовательно, условия (3) и (4) принимают вид

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} \ln \left| \prod_{n \neq k} (1 - e^{k-n}) \right| = \frac{1}{2}.$$

Последнее равенство выполняется. Действительно,

$$\ln \left| \prod_{n \neq k} (1 - e^{k-n}) \right| = \sum_{n=1}^{k-1} \ln(e^{k-n} - 1) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \ln(1 - e^{k-n}).$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^{k-1} \ln(e^{k-n} - 1) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} \sum_{n=k+1}^{\infty} \ln(1 - e^{k-n}) = 0.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Ф. Леонтьев, *Обобщения рядов экспонент*, Наука, М., 1981.
- [2] Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, *Финитные функции в физике и технике*, Наука, М., 1971.
- [3] С. В. Попенов, “О весовом пространстве функций, аналитических в неограниченной выпуклой области в $\mathbb{C}^m$ ”, *Матем. заметки*, **40:3** (1986), 374–384.
- [4] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.

- [5] И. Ф. Красичков-Терновский, “Однородное уравнение типа свертки на выпуклых областях”, *Докл. АН СССР*, **197**:1 (1971), 29–31.
- [6] А. С. Кривошеев, В. В. Напалков, “Комплексный анализ и операторы свертки”, *УМН*, **47**:6 (1992), 3–58.
- [7] R. Meise, K. Schwerdtfeger, B. A. Taylor, “On kernels of slowly decreasing convolution operators”, *Doğa Mat.*, **10**:1 (1986), 176–197.
- [8] В. В. Напалков, “О базисе в пространстве решений уравнений свертки”, *Матем. заметки*, **43**:1 (1988), 44–55.
- [9] А. С. Кривошеев, “Базис Шаудера в пространстве решений однородного уравнения свертки”, *Матем. заметки*, **57**:1 (1995), 57–71.
- [10] В. А. Ткаченко, “Спектральная теория в пространствах аналитических функционалов для операторов, порождаемых умножением на независимую переменную”, *Матем. сб.*, **112**:3 (1980), 421–466.
- [11] М. М. Драгилев, В. П. Захарюта, Ю. Ф. Коробейник, “Двойственная связь между некоторыми вопросами теории базиса и интерполяции”, *Докл. АН СССР*, **215**:3 (1974), 522–525.
- [12] И. А. Шагапов, *Инвариантные подпространства в пространствах числовых последовательностей*, Дисс. ... к.ф.-м.н., ИМВЦ УНЦ РАН, Уфа, 1999.
- [13] Себаштьян-и-Сильва, “О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях”, *Математика*, **1**:1 (1957), 60–77.
- [14] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*, **2**, Наука, М., 1968.
- [15] А. В. Братищев, Ю. Ф. Коробейник, “О некоторых характеристиках роста субгармонических функций”, *Матем. сб.*, **106**:1 (1978), 44–65.
- [16] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1969.
- [17] А. В. Братищев, “Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и некоторые приложения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:3 (1984), 451–475.
- [18] А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1967.

В. В. Напалков, В. Э. Ким

Институт математики с вычислительным центром Уфимского
научного центра Российской академии наук
E-mail: kim@imat.rb.ru

Поступило

28.05.2004

Исправленный вариант

02.12.2005