Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Л. Притыкин, Конечно-автоматные преобразования строго почти периодических последовательностей, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 5, 751–756

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3084>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 17:10:27

УДК 519.115.8+519.713

КОНЕЧНО-АВТОМАТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРОГО ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Ю. Л. Притыкин

Различные варианты понятия почти периодичности являются естественным обобщением понятия периодичности. Понятие строгой почти периодичности возникло в символической динамике, но впоследствии также оказалось продуктивным в математической логике и теории алгоритмов. В работе рассмотрен класс существенно почти периодических последовательностей (т.е. строго почти периодических с приписанным в начале произвольным префиксом). Доказано, что свойство существенной почти периодичности сохраняется при конечно-автоматных преобразованиях, а также под действием конечных преобразователей. Класс существенно почти периодических последовательностей содержится в классе почти периодических последовательностей. Доказано, что это включение строгое.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Строго почти периодические последовательности (под другим названием) изучались в работах Морса и Хедлунда [1], [2], а также рядом других авторов. Это понятие возникло в символической динамике, но впоследствии оказалось продуктивным как в математической логике, так и в теории алгоритмов.

Класс автоматных образов строго почти периодических последовательностей (определения см. ниже), очевидно, содержит класс существенно почти периодических последовательностей, под которыми мы понимаем строго почти периодические с приписанным в начале произвольным префиксом. Действительно, для получения последовательности $a\omega$ из строго почти периодической последовательности ω можно воспользоваться так называемым конечным автоматом с задержкой: в его памяти хранится конечное слово a , и во время работы он сначала выдает это слово, а потом входную последовательность с задержкой $|a|$ (для этого автомат хранит в памяти последние $|a|$ символов последовательности). Основной результат статьи (теорема 2) заключается в том, что указанные классы совпадают. Другими словами, теорема 2 утверждает, что свойство существенной почти периодичности сохраняется при конечно-автоматных преобразованиях. В последней части статьи рассмотрено обобщение понятия конечного автомата – конечный преобразователь, и для него доказано аналогичное утверждение.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 06-01-00122, и программы “Ведущие научные школы”, грант № 358.2003.1.

Стоит заметить, что в [3] было рассмотрено расширение класса строго почти периодических последовательностей – класс почти периодических последовательностей (определение см. ниже). В частности, было доказано, что этот класс также замкнут относительно автоматных преобразований. Ясно, что класс почти периодических последовательностей содержит класс существенно строго почти периодических. Оказывается, это включение строгое (теорема 1).

Пусть A – конечный алфавит. Будем рассматривать последовательности над этим алфавитом – отображения $\omega: \mathbb{N} \rightarrow A$ (где $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$). Через A^* обозначим множество всех слов над алфавитом A . Если $i \leq j$ натуральные, то через $[i, j]$ обозначим отрезок натурального ряда с концами в i и j , т.е. множество $\{i, i+1, i+2, \dots, j\}$. Через $\omega[i, j]$ обозначим отрезок последовательности ω – слово $\omega(i)\omega(i+1)\dots\omega(j)$. Говорят, что $[i, j]$ – *вхождение* в последовательность ω слова $x \in A^*$, если $\omega[i, j] = x$. Через $|x|$ будем обозначать длину слова x . Мы представляем себе последовательность расположенной горизонтально и идущей слева направо до бесконечности, поэтому будем использовать выражения “левее” и “правее” для меньших и больших индексов соответственно.

2. Почти периодичность. Последовательность ω называется *почти периодической*, если для каждого слова x , входящего в нее бесконечное число раз, найдется такое натуральное l , что на каждом отрезке длины l последовательности ω найдется вхождение слова x .

Последовательность ω называется *строго почти периодической*, если для каждого слова x , входящего в нее хотя бы один раз, найдется такое натуральное l , что на каждом отрезке длины l последовательности ω найдется вхождение слова x .

Для удобства введем еще одно определение. Будем называть последовательность ω *существенно строго почти периодической*, если она есть конкатенация некоторого конечного слова и строго почти периодической последовательности.

Каждая существенно строго почти периодическая последовательность, очевидно, является почти периодической. Покажем, что класс почти периодических последовательностей строго шире класса существенно строго почти периодических.

ТЕОРЕМА 1. *Существует почти периодическая последовательность над алфавитом $\{0, 1\}$, не являющаяся существенно строго почти периодической.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим цепочку двоичных слов: $a_0 = 1$, $a_1 = 10011$, $a_2 = 1001101100011001001110011$ и т.д. Слово a_{n+1} получается из a_n по такому правилу:

$$a_{n+1} = a_n \bar{a}_n \bar{a}_n a_n a_n,$$

где $\bar{x}$ обозначает слово, полученное из слова x заменой всех символов 1 на 0 и 0 на 1. Введем обозначение

$$c_n = \underbrace{a_n a_n \dots a_n}_{10}$$

и рассмотрим последовательность

$$\omega = c_0 c_1 c_2 c_3 \dots$$

Докажем, что она и является искомой.

Длина a_n равна 5^n , поэтому длина начального отрезка $c_0c_1 \dots c_{n-1}$ последовательности ω равна

$$10(1 + 5 + \dots + 5^{n-1}) = \frac{5}{2}(5^n - 1).$$

Для удобства введем обозначение

$$l_n = \frac{5}{2}(5^n - 1) = |c_0c_1 \dots c_{n-1}|.$$

Покажем, что ω почти периодична. Пусть непустое слово x встречается в ω бесконечное количество раз. Возьмем такое n , что $|x| < 5^n$. Пусть $[i, j]$ – вхождение слова x в ω такое, что $i \geq l_n$. Из построения последовательности следует, что для каждого k всю последовательность ω , начиная с позиции l_k , можно рассматривать не только как конкатенацию символов 0 и 1, но и как конкатенацию слов a_k и $\bar{a}_k$. Поэтому в силу выбора i слово x является подсловом одного из четырех слов a_na_n , $a_n\bar{a}_n$, $\bar{a}_na_n$, $\bar{a}_n\bar{a}_n$. Заметим, что слово 10011 содержит всевозможные слова длины два 00, 01, 10, 11, поэтому слово a_{n+1} содержит каждое из слов a_na_n , $a_n\bar{a}_n$, $\bar{a}_na_n$, $\bar{a}_n\bar{a}_n$. Отсюда получаем, что слово x является подсловом слова a_{n+1} . Аналогично, x является подсловом слова $\bar{a}_{n+1}$ (01100 тоже содержит каждое из слов 00, 01, 10, 11). На каждом отрезке длины $2|a_{n+1}|$, расположенном правее позиции l_{n+1} , найдется вхождение слова a_{n+1} или $\bar{a}_{n+1}$, поэтому для $l = \frac{5}{2}(5^{n+1} - 1) + 2 \cdot 5^{n+1}$ выполнено, что на каждом отрезке длины l найдется вхождение слова x .

Докажем теперь для каждого натурального $n > 0$, что слово c_n не встречается в последовательности ω правее позиции l_{n+1} . Тем самым мы покажем, что для последовательности, полученной из ω отрезанием начального отрезка длины не более l_n , найдется слово, а именно, c_n , которое входит в нее ненулевое конечное количество раз, т.е. такая последовательность не является строго почти периодической. Таким образом, будет доказано, что ω не является существенно строго почти периодической.

Пусть ν – последовательность, полученная из ω отрезанием начального отрезка длины l_{n+1} . Как уже было замечено, для каждого k , $1 \leq k \leq n+1$, ее можно представить как конкатенацию слов a_k и $\bar{a}_k$. Предположим, c_n входит в ν , и пусть $[i, j]$ – одно из таких вхождений. При $n > 0$ слово c_n начинается с a_1 , поэтому $[i, i+4]$ является вхождением слова a_1 в ν . Заметим, что если $a_1 = 10011$ входит в $a_1a_1 = 1001110011$, $a_1\bar{a}_1 = 1001101100$, $\bar{a}_1a_1 = 0110010011$ или $\bar{a}_1\bar{a}_1 = 0110001100$, то только с нулевой или с пятой позиции. Поэтому $5 \mid i$, т.е. начало вхождения слова c_n в ν совпадает с началом какого-нибудь из слов a_1 и $\bar{a}_1$, из которых, можно считать, и составлено ν . Индукцией по m докажем, что $5^m \mid i$ при $1 \leq m \leq n$, т.е. если представить ν в виде конкатенации слов a_m и $\bar{a}_m$, то начало вхождения c_n совпадает с началом одного из этих слов. База для $m = 1$ уже доказана. Зная это утверждение для $m = k$, мы можем представить ν и c_n составленными из “букв” a_k и $\bar{a}_k$, причем c_n входит в ν . Тогда, чтобы доказать утверждение для $m = k+1$, можно применить точно такое же рассуждение, как и в случае $m = 1$, только заменить 1 и 0 на a_k и $\bar{a}_k$, и a_1 и $\bar{a}_1$ на a_{k+1} и $\bar{a}_{k+1}$, и при этом использовать, что c_n начинается с a_{k+1} .

Таким образом, мы показали, что $5^n \mid i$, т.е. если представлять себе ν и c_n составленными из “букв” a_n и $\bar{a}_n$, то мы доказали, что

$$c_n = \underbrace{a_n a_n \dots a_n}_{10}$$

входит в ν . Но на каждом отрезке последовательности ν из 10 подряд идущих “букв” a_n и $\bar{a}_n$ можно найти вхождение “пятибуквенного” слова a_{n+1} или $\bar{a}_{n+1}$, а в нем вхождение “буквы” $\bar{a}_n$. Противоречие.

Более того, из доказательства видно, как построить бесконечное, даже континуальное множество почти периодических последовательностей, не являющихся существенно строго почти периодическими. Можно действовать, например, так: каждой последовательности $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \{9, 10\}$ сопоставить последовательность, построенную так же, как и ω из доказательства теоремы 1, только в качестве c_n брать слово

$$c_n^{(\tau)} = \underbrace{a_n a_n \dots a_n}_{\tau(n)}.$$

Ясно, что построенные таким образом ω_τ будут различны для различных τ (для различных τ_1 и τ_2 достаточно рассмотреть минимальное n , в котором они различаются: тогда в $c_n^{(\tau_1)}$ и $c_n^{(\tau_2)}$ разное количество a_n , но после них в ω_{τ_1} и ω_{τ_2} идет $a_{n+1} = a_n \bar{a}_n \bar{a}_n a_n a_n$). Осталось заметить, что всевозможных τ континуум.

3. Автоматные преобразования. Конечным автоматом назовем совокупность $F = \langle A, B, Q, \tilde{q}, f \rangle$, где A и B – конечные множества, называемые соответственно входной и выходной алфавит, Q – конечное множество состояний, $\tilde{q} \in Q$ – выделенное состояние, называемое начальным, и

$$f: Q \times A \rightarrow Q \times B$$

– функция переходов. Последовательность $\langle p_n, \beta(n) \rangle_{n=0}^\infty$, где $p_n \in Q$, $\beta(n) \in B$ назовем *автоматным преобразованием* последовательности α из букв алфавита A , если $p_0 = \tilde{q}$ и для каждого n выполняется $\langle p_{n+1}, \beta(n) \rangle = f(p_n, \alpha(n))$. Последовательность β назовем тогда *результатом* преобразования α автоматом F и обозначим $F(\alpha)$. Очевидно, для каждого F и α результат $F(\alpha)$ существует и определен однозначно. Если $[i, j]$ – вхождение слова x в последовательность α , причем $p_i = q$, то будем говорить, что автомат F подходит к этому вхождению слова x в состоянии q .

В [3] было доказано следующее утверждение: *если F – конечный автомат, ω – почти периодическая последовательность, то $F(\omega)$ тоже почти периодическая.*

Оказывается, эту теорему можно дополнить.

ТЕОРЕМА 2. *Если F – конечный автомат, ω – существенно почти периодическая последовательность, то $F(\omega)$ тоже существенно строго почти периодическая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что достаточно доказать теорему для ω – строго почти периодических, так как существенно строго почти периодическая последовательность (в нашем случае $F(\omega)$) остается существенно строго почти периодической при приписывании к ней произвольного префикса.

Итак, пусть ω – строго почти периодическая последовательность. По указанной выше теореме последовательность $F(\omega)$ почти периодическая. Предположим, что она не является существенно строго почти периодической. Это означает, что для любого натурального N можно найти такое слово, которое входит в $F(\omega)$ правее позиции N , и после этого уже не входит. Действительно, отрезав от $F(\omega)$ начальный отрезок $[0, N]$, мы не получим строго почти периодическую последовательность, значит, найдется слово, входящее в нее ненулевое конечное количество раз. Тогда возьмем самое правое вхождение этого слова.

Пусть $[i_0, j_0]$ – самое правое вхождение некоторого слова y_0 в последовательность $F(\omega)$. Для некоторого натурального l_0 слово $x_0 = \omega[i_0, j_0]$ входит в любой отрезок длины l_0 последовательности ω (в силу строгой почти периодичности). При этом если q_0 – состояние, в котором автомат F подошел к позиции i_0 , то ко всем дальнейшим вхождениям слова x_0 в ω автомат не может подойти в состоянии q_0 , иначе бы он выдал полностью слово y_0 .

Пусть теперь $[r, s]$ – самое правое вхождение некоторого слова a в последовательность $F(\omega)$, причем $r > i_0 + l_0$. На отрезке $\omega[r - l_0, r]$ найдется вхождение $[r', s']$ слова x_0 , причем в силу выбора r будет выполнено $r' > i_0$. Положим тогда

$$i_1 = r', \quad j_1 = s, \quad x_1 = \omega[i_1, j_1], \quad y_1 = F(\omega)[i_1, j_1].$$

Поскольку слово a не входит в $F(\omega)$ правее позиции r , то и слово y_1 , которое содержит a в качестве подслова, не входит в $F(\omega)$ правее позиции i_1 . Это значит, что если q_1 – состояние, в котором автомат подошел к позиции i_1 , то больше никогда в состоянии q_1 к вхождению слова x_1 в последовательность ω автомат не подойдет. Поскольку x_1 начинается со слова $\omega[r', s'] = x_0$, и $r' > i_0$, то $q_1 \neq q_0$. Таким образом, мы нашли слово x_1 , ко всем вхождениям которого, расположенным правее i_1 , автомат не может подойти, находясь в состояниях q_0 или q_1 .

Пусть $m = |Q|$ – количество возможных состояний автомата. Продолжая так дальше рассуждать по индукции, мы построим цепочку слов $x_k = \omega[i_k, j_k]$ и соответствующих различных состояний q_k , где $k < m$, так что ко всем вхождениям x_k в ω правее i_k автомат не может подойти в состояниях $q_0, q_1, \dots, q_k$. При $k = m$ получаем противоречие.

4. Конечные преобразователи. Пусть A, B – конечные алфавиты. Отображение $h: A^* \rightarrow B^*$ называется *гомоморфизмом*, если для любых $u, v \in A^*$ выполнено $h(uv) = h(u)h(v)$. Ясно, что гомоморфизм полностью определяется своими значениями на однобуквенных словах. Если ω – последовательность букв алфавита A , по определению положим

$$h(\omega) = h(\omega(0))h(\omega(1))h(\omega(2)) \dots$$

Пусть $h: A^* \rightarrow B^*$ – гомоморфизм, ω – почти периодическая последовательность над алфавитом A . В [3] было показано, что последовательность $h(\omega)$ будет снова почти периодической. Ясно тогда, что для ω строго почти периодической $h(\omega)$ будет строго почти периодической. Действительно, достаточно показать, что для любого слова $u = \omega[i, j]$ слово $h(u) = h(\omega(i)) \dots h(\omega(j))$ встречается в $h(\omega)$ бесконечно много раз. Но это следует из определения $h(\omega)$ и из того, что ω строго почти периодична, и значит, слово u встречается в ней бесконечно много раз. Очевидно,

для ω существенно почти периодической $h(\omega)$ будет снова существенно строго почти периодической.

Естественным обобщением понятия конечного автомата является понятие *конечного преобразователя* (подробнее см. [3], [4]). Отличие состоит в том, что конечный преобразователь может выдавать слово произвольной длины, прочитав один символ входа. Формально, меняется только определение функции переходов: теперь она имеет вид $f: Q \times A \rightarrow Q \times B^*$. Если последовательность $\langle p_n, v_n \rangle_{n=0}^\infty$, где $p_n \in Q$, $v_n \in B^*$, является преобразованием последовательности α , то результатом преобразования назовем последовательность $v_0 v_1 v_2 \dots$.

Действие конечного преобразователя можно представить в виде композиции автоматного преобразования и гомоморфизма. Каждый из этих типов преобразований, как мы знаем, сохраняет свойство почти периодичности, поэтому получаем следствие: почти периодические последовательности под действием конечных преобразователей переходят в почти периодические. Аналогично, из теоремы 2 и сохранения существенной строгой почти периодичности при гомоморфных отображениях следует, что конечные преобразователи сохраняют также и свойство существенной почти периодичности.

Автор выражает искреннюю благодарность А.Л. Семенову и А.А. Мучнику за привлечение внимания автора к этой теме, а также за ценные и полезные замечания и советы по поводу настоящей работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Morse, G. A. Hedlund, "Symbolic dynamics", *Amer. J. Math.*, **60** (1938), 815–866.
- [2] M. Morse, G. A. Hedlund, "Symbolic dynamics II: Sturmian trajectories", *Amer. J. Math.*, **62** (1940), 1–42.
- [3] An. Muchnik, A. Semenov, M. Ushakov, "Almost periodic sequences", *Theoret. Comput. Sci.*, **304** (2003), 1–33.
- [4] A. Weber, "On the valuedness of finite transducers", *Acta Informatica*, **27** (1989), 749–780.

Ю.Л. Притыкин

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

E-mail: pritykin@lpcs.math.msu.su

Поступило

27.06.2005