Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Табалдыев, О строгих гомологических размерностях алгебр непрерывных функций, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 5, 757–769

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3085>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:06:17

УДК 517.98

О СТРОГИХ ГОМОЛОГИЧЕСКИХ РАЗМЕРНОСТЯХ АЛГЕБР НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

С. Б. Табалдыев

Доказано, что для каждого целого неотрицательного n и для $n = \infty$ существует компактное топологическое пространство Ω такое, что строгая глобальная размерность и строгая биразмерность $C(\Omega)$ банаховой алгебры всех непрерывных функций на Ω равны n . Также получены некоторые “формулы аддитивности” для строгих гомологических размерностей строгих банаховых алгебр.

Библиография: 21 название.

1. Введение. В настоящее время известно несколько гомологических теорий топологических алгебр. Каждая со своими объектами для изучения и задачами, различным запасом алгебр и модулей. Гомологическая теория банаховых алгебр (см. [1]–[4]) – самая ранняя из них. Другие теории – это, например, гомологическая теория алгебр Фреше и гомологические теории полных локально выпуклых алгебр (см. [2], [4]–[6]). Из более поздних заслуживает внимания гомологическая теория стереотипных алгебр [7], и самые важные из новых теорий – две теории квантованных банаховых алгебр, отвечающие операторно-проективному и хаагерупову тензорным произведениям соответственно (см. [8]).

В данной работе мы будем рассматривать гомологическую теорию строгих банаховых алгебр, которая была построена в [9], [10], и в которой по сравнению с классической гомологической теорией банаховых алгебр проективное тензорное произведение $\hat{\otimes}$ во всех определениях и формулировках основных теорем заменено на слабое тензорное произведение $\check{\otimes}$. Строгие алгебры часто называют инъективными алгебрами, а слабое тензорное произведение – инъективным тензорным произведением [11]. Нас интересует задача о множестве значений строгих гомологических размерностей алгебр $C(\Omega)$ непрерывных функций на компактных топологических пространствах. Напомним, что банахова алгебра A называется *строгой* (или *щ-алгеброй*), если существует непрерывный линейный оператор $R: A \check{\otimes} A \rightarrow A$ такой, что $R(a \otimes b) = ab$ для любых $a, b \in A$. Все алгебры $C(\Omega)$ являются строгими ввиду хорошо известного изометрического изоморфизма Гротендика $C(\Omega) \check{\otimes} C(\Omega) \cong C(\Omega \times \Omega)$. Как известно, банаховы алгебры гладких функций $C^k[a, b]$, $k = 1, 2, \dots$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00982.

также являются строгими [10]. Кроме того, банаховы алгебры ℓ_p , $1 \leq p \leq \infty$, p -суммируемых последовательностей с поточечным умножением являются строгими только при $p = 1$ или ∞ (см. [10]). Легко видеть, что замкнутая подалгебра строгой банаховой алгебры всегда является строгой, а если A и B – две строгие банаховы алгебры, то слабое тензорное произведение $A \hat{\otimes} B$ является строгой банаховой алгеброй относительно умножения, корректно определенного формулой

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2, \quad a_1, a_2 \in A, \quad b_1, b_2 \in B.$$

По теореме о глобальной размерности А. Я. Хелемского [12] (см. также [13]), любая коммутативная банахова алгебра A с бесконечным спектром имеет глобальную размерность $\text{dg}_{\hat{\otimes}} A$, строго большую единицы. Эта теорема не имеет аналогов ни для ассоциативных алгебр, ни для локально выпуклых алгебр. Напомним еще некоторые факты о гомологических размерностях алгебр $C(\Omega)$. Пусть $[0, \omega_n]$ – отрезок трансфинитных чисел вплоть до n -го несчетного с порядковой топологией. Тогда в алгебре $C[0, \omega_n]$ имеется максимальный идеал, гомологическая размерность которого строго больше $n - 1$ (Хелемский [1] для $n = 1$ и затем Моран [14] для $n \geq 2$). Моран также указал в алгебре непрерывных функций на некотором отрезке из трансфинитных чисел максимальный идеал бесконечной гомологической размерности. Позднее А. Н. Кричевец [15] построил примеры алгебр $C(\Omega)$, глобальная размерность $\text{dg}_{\hat{\otimes}} C(\Omega)$ и биразмерность $\text{db}_{\hat{\otimes}} C(\Omega)$ которых принимают любые четные натуральные значения, и указал в этих алгебрах примеры максимальных идеалов, гомологические размерности которых принимают любые натуральные значения.

С вопросом о множестве значений гомологических размерностей функциональных (т.е. полупростых и коммутативных) банаховых алгебр тесно связан вопрос об аддитивности гомологических размерностей. Пусть A – унитаризация бипроективной коммутативной банаховой алгебры с бесконечным спектром, а B – произвольная унитарная банахова алгебра. Тогда справедливы формулы аддитивности Селиванова [16; теоремы 5.10, 5.8]

$$\text{dg}_{\hat{\otimes}} A \hat{\otimes} B = \text{dg}_{\hat{\otimes}} A + \text{dg}_{\hat{\otimes}} B, \quad \text{db}_{\hat{\otimes}} A \hat{\otimes} B = \text{db}_{\hat{\otimes}} A + \text{db}_{\hat{\otimes}} B$$

(причем в случае общих унитарных банаховых алгебр контрпримеров к этим равенствам не найдено). Так как здесь $\text{dg}_{\hat{\otimes}} A = \text{db}_{\hat{\otimes}} A = 2$, из этих формул следует, что множество значений гомологических размерностей функциональных банаховых алгебр содержит все четные неотрицательные целые числа, а вместе с любым нечетным числом содержит и все натуральные числа, большие его. Таким образом, множество всех значений указанных гомологических размерностей – это нуль, все натуральные числа, за исключением некоторого отрезка нечетных натуральных чисел, начиная с 1, и бесконечность. Однако заметим, что до сих пор не известно примеров функциональных банаховых алгебр какой-либо нечетной глобальной размерности или биразмерности.

Перейдем к обсуждению строгих гомологических размерностей строгих банаховых алгебр. Прежде всего, здесь неверна теорема о глобальной размерности. Действительно, по теореме Курмакаевой [9; теорема 1] для любого бесконечного метризуемого компакта M выполнены равенства $\text{dg}_{\hat{\otimes}} C(M) = \text{db}_{\hat{\otimes}} C(M) = 1$ (а для

любого конечного компакта M – равенства $\mathrm{dg}_{\otimes} C(M) = \mathrm{db}_{\otimes} C(M) = 0$). Здесь символы $\mathrm{dg}_{\otimes}$ и $\mathrm{db}_{\otimes}$ соответственно обозначают глобальную размерность и биразмерность для строгих алгебр. Далее, строгие глобальная размерность и биразмерность в общем случае не аддитивны. Действительно, по теореме Гротендика, если M – метризуемый компакт, мы имеем изоморфизм

$$\underbrace{C(M) \otimes \cdots \otimes C(M)}_n \cong C(M^n),$$

где M^n – топологическая декартова степень M . Между тем, пространство M^n метризуемо и компактно и, следовательно, для любого бесконечного компакта M по теореме Курмакаевой мы имеем равенства $\mathrm{dg}_{\otimes} C(M^n) = \mathrm{db}_{\otimes} C(M^n) = 1$.

Вопрос о том, какие значения, кроме 0 и 1, принимают строгие глобальные размерности и биразмерности алгебр $C(\Omega)$ не был исследован. Нетрудно проверить, что упомянутые выше примеры Кричевца алгебр $C(\Omega)$ четных гомологических размерностей переносятся без существенных изменений на случай строгих размерностей (см. пример 1 ниже). До сих пор не было известно примеров алгебр $C(\Omega)$ нечетных строгих размерностей, начиная с 3, или бесконечной строгой размерности.

В настоящей работе получены “формулы аддитивности”, которые позволяют дать полное описание множества значений строгих гомологических размерностей алгебр $C(\Omega)$. А именно, справедливы равенства (теорема 3)

$$\begin{aligned} \mathrm{dg}_{\otimes} C(M \times K_+^n) &= \mathrm{dg}_{\otimes} C(M) + n \cdot \mathrm{dg}_{\otimes} C(K_+) = \mathrm{dg}_{\otimes} C(M) + 2n, \\ \mathrm{db}_{\otimes} C(M \times K_+^n) &= \mathrm{db}_{\otimes} C(M) + n \cdot \mathrm{db}_{\otimes} C(K_+) = \mathrm{db}_{\otimes} C(M) + 2n, \end{aligned}$$

где K_+ – одноточечная компактификация дискретного топологического пространства K мощности $|K| \geq \aleph_{2n}$, K_+^n – топологическая декартова степень K_+ , а M – метризуемый компакт. Кроме того, доказана (теорема 4) аддитивная формула для строгой малой глобальной размерности

$$\mathrm{ds}_{\otimes} C(M \times K_+^n) = \mathrm{ds}_{\otimes} C(M) + n \cdot \mathrm{ds}_{\otimes} C(K_+),$$

где M – метризуемый компакт и $|K| \geq \aleph_n$. Также построен пример алгебры $C(\Omega)$ бесконечной строгой малой глобальной размерности (теорема 5). Как следствие, мы получаем, что в строгом случае гомологические размерности могут принимать все целые неотрицательные значения и значение бесконечность (следствие 8), что является главным результатом настоящей работы.

2. Предварительные сведения. Сначала напомним некоторые факты из теории множеств. Пусть заданы множества K_i , $i = 1, \dots, n$. Зафиксируем какое-нибудь $i \in \{1, \dots, n\}$. Пусть подмножество M произведения $K_1 \times \cdots \times K_n$ обладает следующим свойством: для любых фиксированных $a_j \in K_j$, $j \neq i$, пересечение

$$M \cap (\{a_1\} \times \cdots \times \{a_{i-1}\} \times K_i \times \{a_{i+1}\} \times \cdots \times \{a_n\})$$

имеет мощность строго меньшую некоторого кардинального числа m . Тогда будем говорить, что множество M имеет мощность, строго меньшую m по i -й координате. Следующая теорема (эквивалентная формулировка приведена в [15; лемма 4.3]) восходит к Серпинскому (ср. [17; теорема XV.9.1]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть заданы множества $K_1, \dots, K_n$, причем $|K_i| = \aleph_i$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Пусть подмножества $M_i, i = 1, \dots, n$, множества $K_1 \times \dots \times K_n$ имеют мощность, строго меньшую $\aleph_i$ по i -й координате соответственно. Тогда $\bigcup_{i=1}^n M_i \neq K_1 \times \dots \times K_n$.

Заметим, что в этой теореме можно взять все мощности на “единицу” меньше (для нас важно, что можно взять K_1 счетным), а доказательство леммы 4.3 из [15] методом математической индукции проходит без изменений.

ТЕОРЕМА 2. Пусть заданы множества $K_1, \dots, K_n$, причем $|K_i| = \aleph_{i-1}$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Пусть подмножества $M_i, i = 1, \dots, n$, множества $K_1 \times \dots \times K_n$ имеют мощность, строго меньшую $\aleph_{i-1}$ по i -й координате соответственно. Тогда $\bigcup_{i=1}^n M_i \neq K_1 \times \dots \times K_n$.

Нетрудно доказать следующее следствие, которое мы будем применять при доказательстве теорем 3 и 4.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть заданы множества $K_1, \dots, K_n$, причем $|K_i| \geq \aleph_{i-1}$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Пусть подмножества $M_i, i = 1, \dots, n$, множества $K_1 \times \dots \times K_n$ конечны по i -й координате соответственно. Тогда $\bigcup_{i=1}^n M_i \neq K_1 \times \dots \times K_n$.

Пусть теперь ℓ^∞ – пространство всех ограниченных комплексных последовательностей $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ с нормой $\|x\| = \sup\{|x_n| : n \geq 1\}$, а c_0 – его замкнутое подпространство, состоящее из последовательностей, стремящихся к нулю. Пусть $e_n \in c_0$ – последовательность, у которой n -й член равен 1, а остальные равны 0 ($n = 1, 2, \dots$). В доказательстве теоремы 3 мы будем использовать следующую лемму Филлипса (см. [18] или [2; раздел V.2.2]): для любого непрерывного линейного оператора $T: \ell^\infty \rightarrow c_0$ числовая последовательность $T(e_n)_n$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Все банаховы алгебры и модули рассматриваются над полем комплексных чисел. Через $C(\Omega)$ мы обозначаем банахову алгебру всех непрерывных комплекснозначных функций на компактном топологическом пространстве Ω с поточечным умножением и равномерной нормой. Как известно, любой замкнутый идеал I этой алгебры состоит из всех непрерывных функций, равных нулю на некотором замкнутом подмножестве $\Delta \subseteq \Omega$. Напомним, что спектром идеала I называется дополнение $\Omega \setminus \Delta$. Пусть Ω_0 – некоторое открытое подмножество Ω . Тогда идеал со спектром Ω_0 обозначается через $I(\Omega_0)$.

Напомним определение слабого (другой термин – инъективного) тензорного произведения $\otimes$ банаховых пространств (см. [2], [3]). Пусть E и F – банаховы пространства. Определим на чисто алгебраическом тензорном произведении $E \otimes F$ этих пространств норму по формуле

$$\|u\| = \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^n \alpha(x_k) \beta(y_k) \right| : \alpha \in E^*, \beta \in F^*, \|\alpha\|, \|\beta\| \leq 1 \right\},$$

где $u \in E \otimes F$, $u = \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k$; E^*, F^* – сопряженные к E и F банаховы пространства. Слабым тензорным произведением $E \otimes F$ называется пополнение линейного пространства $E \otimes F$ по этой норме. Известно [19], что для любых компактных

топологических пространств Ω_1 и Ω_2 существует естественный изометрический изоморфизм $C(\Omega_1) \hat{\otimes} C(\Omega_2) \cong C(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Более того, для идеалов $I(Z_1) \triangleleft C(\Omega_1)$ и $I(Z_2) \triangleleft C(\Omega_2)$ имеется естественный изометрический изоморфизм $I(Z_1) \hat{\otimes} I(Z_2) \cong I(Z_1 \times Z_2)$.

Пусть A – строгая банахова алгебра. Левый банахов A -модуль X называется *строгим*, если существует такой непрерывный линейный оператор $R: A \hat{\otimes} X \rightarrow X$, что $R(a \otimes x) = a \cdot x$ для любых $a \in A$, $x \in X$. Например, все ℓ_p при $1 \leq p \leq \infty$ являются строгими ℓ_1 -модулями, но ни один из них при $p \neq \infty$ не является строгим ℓ_∞ -модулем [10]. Как известно, замкнутый подмодуль строгого модуля всегда строгий.

Пусть X – левый банахов A -модуль, а E – банахово пространство. Нетрудно доказать, что тензорное произведение $X \hat{\otimes} E$ является левым банаховым A -модулем относительно внешнего умножения, определяемого формулой $a \cdot (x \otimes u) = (a \cdot x) \otimes u$ для $a \in A$, $x \in X$ и $u \in E$. Легко видеть, что если X – строгий модуль, то модуль $X \hat{\otimes} E$ также строгий.

Напомним (см., например, [2] или [3]), что последовательность левых банаховых A -модулей

$$\cdots \rightarrow X_n \xrightarrow{\varphi_{n-1}} X_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\varphi_1} X_1 \xrightarrow{\varphi_0} X_0 \rightarrow 0$$

называется *комплексом*, если $\varphi_k \circ \varphi_{k+1} = 0$ для всех $k = 0, 1, \dots$. Комплекс левых банаховых A -модулей называется *допустимым*, если он расщепляется как комплекс банаховых пространств. Это означает, что существует *стягивающая гомотопия*, т.е. семейство непрерывных линейных операторов $s_i: X_i \rightarrow X_{i+1}$ таких, что $s_{i-1} \circ \varphi_{i-1} + \varphi_i \circ s_i = 1_{X_i}$ для $i = 0, 1, \dots$.

Пусть строгая банахова алгебра A унитарна. Напомним [9], что унитарный строгий левый банахов A -модуль X называется (строго) *проективным*, если он является прямым слагаемым левого A -модуля $A \hat{\otimes} E$ для некоторого банахова пространства E . Критерий проективности замкнутого идеала I в алгебрах непрерывных функций $C(\Omega)$ и в строгой и в обычной теориях [9], [2] – это паракомпактность спектра идеала I . Например, если Ω – метризуемый компакт, то все замкнутые идеалы в алгебре $C(\Omega)$ проективны.

Пусть A – унитарная строгая банахова алгебра. Будем обозначать категорию всех унитарных строгих левых банаховых A -модулей через $A\text{-}\hat{\otimes}\text{-unmod}$. Если B – еще одна унитарная строгая банахова алгебра, то мы рассматриваем категорию унитарных банаховых бимодулей, левых по A и правых по B , которую обозначаем через $A\text{-}\hat{\otimes}\text{-unmod} \text{-}\hat{\otimes}\text{-}B$. Хорошо известно, что последняя категория изоморфна $A \hat{\otimes} B^{\text{op}}\text{-}\hat{\otimes}\text{-unmod}$, где B^{op} – алгебра с противоположным умножением. Напомним, что *обертывающая алгебра* A^e унитарной строгой банаховой алгебры A – это алгебра $A \hat{\otimes} A^{\text{op}}$. Таким образом, категории $A\text{-}\hat{\otimes}\text{-unmod} \text{-}\hat{\otimes}\text{-}A$ и $A^e\text{-}\hat{\otimes}\text{-unmod}$ изоморфны.

Допустимый комплекс унитарных строгих левых банаховых A -модулей

$$\cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{\varphi_{n-1}} P_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\varphi_0} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} X \rightarrow 0,$$

где все A -модули P_i проективны, называется *проективной резольвентой* модуля $X \in A\text{-}\hat{\otimes}\text{-unmod}$ (см. [9], [10]). *Длиной* такой резольвенты называется наименьшее

n такое, что $P_i = 0$ при $i > n$, или ∞ , если такого n не существует. Длина самой короткой проективной резольвенты A -модуля X называется его (строгой) *гомологической размерностью*. Она обозначается ${}_A \text{dh}_{\otimes} X$. Гомологическая размерность для унитарного строгого банахового A -бимодуля X определяется как у левого A^e -модуля. Точная верхняя грань гомологических размерностей всех унитарных строгих левых банаховых A -модулей называется (строгой) *глобальной размерностью* алгебры A и обозначается $\text{dg}_{\otimes} A$. Напомним (см., например, [3; определение 6.2.5]), что левый A -модуль называется (алгебраически) *неприводимым*, если он не имеет ненулевых собственных подмодулей и не является (одномерным) модулем с нулевым умножением. Нетрудно видеть, что если алгебра имеет единицу, то любой неприводимый модуль над этой алгеброй унитарен. Точная верхняя грань гомологических размерностей всех неприводимых строгих левых банаховых A -модулей называется (строгой) *малой глобальной размерностью* алгебры A и обозначается $\text{ds}_{\otimes} A$. (В случае, если A не имеет неприводимых строгих левых банаховых модулей, то мы полагаем $\text{ds}_{\otimes} A = -\infty$.)

Гомологическая размерность алгебры A , рассмотренной как строгий банахов A -бимодуль, называется (строгой) *бизмерностью* или (строгой) *когомологической размерностью* A и обозначается $\text{db}_{\otimes} A$. Последний термин связан с эквивалентным определением этого понятия, а именно, это наименьшее n такое, что группы когомологий Хохшильда $\mathcal{H}_{\otimes}^k(A, X)$, взятые в соответствующем для строгих алгебр варианте, с коэффициентами во всех строгих бимодулях X и для всех $k > n$, тривиальны (ср. [2], [3]). Напомним, что для произвольной строгой банаховой алгебры A выполнено неравенство $\text{dg}_{\otimes} A \leq \text{db}_{\otimes} A$ (см. [10; теорема 1.3]).

Пусть теперь A и B – унитарные строгие банаховы алгебры. Все следующие утверждения вплоть до конца пункта, полученные в классической $\hat{\otimes}$ -теории Ю. В. Селивановым (см. [4], [16], [20]), переносятся на $\check{\otimes}$ -случай с очевидными изменениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\varepsilon: P \rightarrow X$ и $\eta: Q \rightarrow Y$ – проективные резольвенты модулей X и $Y \in A\text{-}\check{\otimes}\text{-unmod}$, то $\varepsilon \check{\otimes} \eta: P \check{\otimes} Q \rightarrow X \check{\otimes} Y$ – проективная резольвента $X \check{\otimes} Y \in A \check{\otimes} B\text{-}\check{\otimes}\text{-unmod}$.

О тензорных произведениях комплексов и резольвент см., например, [2], [21].

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $X \in A\text{-}\check{\otimes}\text{-unmod}$, и $Y \in B\text{-}\check{\otimes}\text{-unmod}$, то

$${}_{A \check{\otimes} B} \text{dh}_{\otimes} X \check{\otimes} Y \leq {}_A \text{dh}_{\otimes} X + {}_B \text{dh}_{\otimes} Y.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Если A и B – унитарные строгие банаховы алгебры, то

$$\text{db}_{\otimes} A \check{\otimes} B \leq \text{db}_{\otimes} A + \text{db}_{\otimes} B.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $X \in A \check{\otimes} B\text{-}\check{\otimes}\text{-unmod}$, то справедливо неравенство

$${}_{A \check{\otimes} B} \text{dh}_{\otimes} X \leq \text{db}_{\otimes} A + {}_B \text{dh}_{\otimes} X.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Если A и B – унитарные строгие банаховы алгебры, то

$$\text{dg}_{\otimes} A \check{\otimes} B \leq \text{db}_{\otimes} A + \text{dg}_{\otimes} B.$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Если A и B – унитарные строгие банаховы алгебры и если $\mathrm{dg}_{\otimes} A = \mathrm{db}_{\otimes} A$ или $\mathrm{dg}_{\otimes} B = \mathrm{db}_{\otimes} B$, то

$$\mathrm{dg}_{\otimes} A \check{\otimes} B \leq \mathrm{dg}_{\otimes} A + \mathrm{dg}_{\otimes} B.$$

Описание всех неприводимых строгих левых банаховых модулей над алгеброй $A \check{\otimes} B$, когда одна из алгебр A или B коммутативна, сводится к случаю $\hat{\otimes}$ -алгебр ввиду одномерности (как линейных пространств) неприводимых модулей над коммутативными алгебрами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть A и B – унитарные строгие банаховы алгебры, причем B коммутативна. Тогда для любых двух неприводимых модулей $X \in A\text{-}\check{\otimes}\text{-unmod}$ и $Y \in B\text{-}\check{\otimes}\text{-unmod}$ модуль $X \check{\otimes} Y \in A \check{\otimes} B\text{-}\check{\otimes}\text{-unmod}$ неприводим и при этом все неприводимые строгие левые банаховы $A \check{\otimes} B$ -модули имеют указанный вид.

СЛЕДСТВИЕ 6. Если A и B – унитарные строгие банаховы алгебры, и если хотя бы одна из алгебр A или B коммутативна, то справедливо неравенство

$$\mathrm{ds}_{\otimes} A \check{\otimes} B \leq \mathrm{ds}_{\otimes} A + \mathrm{ds}_{\otimes} B.$$

Так же, как в классическом случае [4], [16], можно получить “грубые” оценки снизу для $\mathrm{db}_{\otimes}$, $\mathrm{dg}_{\otimes}$ и $\mathrm{ds}_{\otimes}$ алгебры $A \check{\otimes} B$. Но в $\check{\otimes}$ -случае эти оценки, очевидно, точны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $X \in A\text{-}\check{\otimes}\text{-unmod}$ и $Y \in B\text{-}\check{\otimes}\text{-unmod}$ – ненулевые строгие банаховы модули. Тогда

$${}_{A \check{\otimes} B} \mathrm{dh}_{\otimes} X \check{\otimes} Y \geq \max\{{}_A \mathrm{dh}_{\otimes} X, {}_B \mathrm{dh}_{\otimes} Y\}.$$

Аналогично классическому случаю [4], [16] предложение 4 справедливо также для бимодулей. Отсюда и из предложения 3 получаем

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть A и B – унитарные строгие банаховы алгебры. Тогда

$$\mathrm{db}_{\otimes} A \check{\otimes} B \geq \max\{\mathrm{db}_{\otimes} A, \mathrm{db}_{\otimes} B\} \quad \text{и} \quad \mathrm{dg}_{\otimes} A \check{\otimes} B \geq \max\{\mathrm{dg}_{\otimes} A, \mathrm{dg}_{\otimes} B\}.$$

Кроме того, если хотя бы одна из алгебр A или B коммутативна, а другая имеет хотя бы один неприводимый строгий левый банахов модуль, то

$$\mathrm{ds}_{\otimes} A \check{\otimes} B \geq \max\{\mathrm{ds}_{\otimes} A, \mathrm{ds}_{\otimes} B\}.$$

3. Формулы аддитивности.

ПРИМЕР 1. Пусть K – дискретное топологическое пространство, а K_+ – его однотоочечная компактификация. Обозначим $\sup\{\aleph_n : n = 0, 1, \dots\}$ через $\aleph_\omega$. Предположим, что мощность множества K не меньше, чем $\aleph_\omega$. Тогда $\mathrm{db}_{\otimes} C(K_+^n) = \mathrm{dg}_{\otimes} C(K_+^n) = 2n$ для любого натурального n (см. [15]). Просматривая доказательство Кричевца, можно уточнить, что эти равенства остаются в силе, если потребовать лишь неравенство $|K| \geq \aleph_{2n-1}$. Кроме того, легко убедиться, что этот пример переносится на случай строгих размерностей $\mathrm{dg}_{\otimes}$ и $\mathrm{db}_{\otimes}$ с незначительными изменениями в доказательстве.

ТЕОРЕМА 3. Пусть K – дискретное топологическое пространство мощности $|K| \geq \aleph_{2n}$. Пусть K_+ – его одноточечная компактификация, а M – метризуемый компакт. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{dg}_{\check{\otimes}} C(M \times K_+^n) &= \operatorname{dg}_{\check{\otimes}} C(M) + n \cdot \operatorname{dg}_{\check{\otimes}} C(K_+) = \operatorname{dg}_{\check{\otimes}} C(M) + 2n, \\ \operatorname{db}_{\check{\otimes}} C(M \times K_+^n) &= \operatorname{db}_{\check{\otimes}} C(M) + n \cdot \operatorname{db}_{\check{\otimes}} C(K_+) = \operatorname{db}_{\check{\otimes}} C(M) + 2n. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = C(M)$, $B = C(K_+^n)$. Банахово пространство $\ell^\infty(K^n)$ всех ограниченных функций на K^n является строгим левым банаховым B -модулем относительно внешнего умножения $(b \cdot x)(s) = b(s)x(s)$, где $b \in B$, $x \in \ell^\infty(K^n)$, $s \in K^n$. Предположим $\omega \in M$. Обозначим $M \setminus \{\omega\}$ через M_ω . Пусть $\mathbf{C}_\omega = C(M)/I(M_\omega)$ – фактормодуль. Ввиду следствий 3 и 5 достаточно доказать равенства

$${}_A \check{\otimes} {}_B \operatorname{dh}_{\check{\otimes}} \mathbf{C}_\omega \check{\otimes} \ell^\infty(K^n) = {}_A \operatorname{dh}_{\check{\otimes}} \mathbf{C}_\omega + {}_B \operatorname{dh}_{\check{\otimes}} \ell^\infty(K^n) = {}_A \operatorname{dh}_{\check{\otimes}} \mathbf{C}_\omega + 2n.$$

Пусть для $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} W_i &= I(\underbrace{K \times \dots \times K}_{n} \times K_+ \times K \times \dots \times K), \\ \widetilde{W}_i &= I(K \times \dots \times K) \check{\otimes} \ell_\infty(K) \check{\otimes} I(K \times \dots \times K), \end{aligned}$$

где множители K_+ и $\ell^\infty(K)$ стоят на i -м месте.

Согласно [15; § 4], перенесенному на строгий случай с очевидными изменениями, строгий левый банахов B -модуль $\ell^\infty(K^n)$ имеет проективную резольвенту длины $2n$ следующего вида:

$$0 \rightarrow I(K^{2n}) \xrightarrow{\tilde{\rho}} \bigoplus_{i=1}^n [(W_i \check{\otimes} I(K^n)) \oplus (I(K^n) \check{\otimes} \widetilde{W}_i)] \rightarrow \dots \rightarrow \ell^\infty(K^n) \rightarrow 0,$$

где после замены знаков можно считать, что $\tilde{\rho}(x) = (x, \dots, x)$, $x \in I(K^{2n})$. Если $\omega \in M$ – изолированная точка, то $\mathbf{C}_\omega$ – проективный $C(M)$ -модуль и утверждение теоремы следует из примера 1 (ввиду которого указанную резольвенту нельзя сделать короче) и предложения 4.

Пусть ω – неизолированная точка. Умножим тогда эту резольвенту тензорно (в смысле слабого тензорного произведения) на следующую проективную резольвенту левого $C(M)$ -модуля $\mathbf{C}_\omega$:

$$0 \rightarrow I(M_\omega) \rightarrow C(M) \rightarrow \mathbf{C}_\omega \rightarrow 0.$$

По предложению 1 мы получим проективную резольвенту строгого левого банахова $C(M \times K_+^n)$ -модуля $\mathbf{C}_\omega \check{\otimes} \ell^\infty(K^n)$ длины $2n + 1$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow I(M_\omega \times K^{2n}) \\ \xrightarrow{\rho} \left[\bigoplus_{i=1}^n [(I(M_\omega) \check{\otimes} W_i \check{\otimes} I(K^n)) \oplus (I(M_\omega \times K^n) \check{\otimes} \widetilde{W}_i)] \right] \oplus I(M \times K^{2n}) \\ \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{C}_\omega \check{\otimes} \ell^\infty(K^n) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

После замены знаков мы можем считать, что $\rho(x) = (x, \dots, x)$ для всех $x \in I(M_\omega \times K^{2n})$.

Предположим, что

$$A \check{\otimes} B \operatorname{dh}_{\check{\otimes}} C_\omega \check{\otimes} \ell^\infty(K^n) < 2n + 1.$$

Тогда существуют такие морфизмы левых $C(M \times K_+^n)$ -модулей

$$\begin{aligned} \sigma_{i1}: I(M_\omega) \check{\otimes} W_i \check{\otimes} I(K^n) &\rightarrow I(M_\omega \times K^{2n}), \\ \sigma_2: I(M \times K^{2n}) &\rightarrow I(M_\omega \times K^{2n}), \quad \sigma_{i3}: I(M_\omega \times K^n) \check{\otimes} \widetilde{W_i} \rightarrow I(M_\omega \times K^{2n}), \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n$, что

$$\sum_{i=1}^n (\sigma_{i1}(x) + \sigma_{i3}(x)) + \sigma_2(x) = x, \quad x \in I(M_\omega \times K^{2n}).$$

Выберем последовательность попарно различных точек $\gamma_m \in M_\omega$, которая сходится к ω , и пусть $f_m \in I(M_\omega)$, $m = 1, 2, \dots$, таковы, что $f_m(\gamma_m) = 1$. Для $p \in K$ обозначим через $e_p \in I(K)$ функцию на K_+ такую, что $e_p(t) = 0$ при $t \neq p$ и $e_p(p) = 1$. Введем еще следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= (s_1, \dots, s_n) \in K^n, \quad \mathbf{e}_\mathbf{s} = e_{s_1} \otimes \dots \otimes e_{s_n} \in I(K^n), \\ \mathbf{e}_\mathbf{s}^i &= e_{s_1} \otimes \dots \otimes e_{s_{i-1}} \otimes 1 \otimes e_{s_{i+1}} \otimes \dots \otimes e_{s_n} \in W_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} F_{ij}(m, \mathbf{s}, \mathbf{t}) &= \sigma_{ij}(f_m \otimes \mathbf{e}_\mathbf{s} \otimes \mathbf{e}_\mathbf{t})(\gamma_m, \mathbf{s}, \mathbf{t}), \\ F_2(m, \mathbf{s}, \mathbf{t}) &= \sigma_2(f_m \otimes \mathbf{e}_\mathbf{s} \otimes \mathbf{e}_\mathbf{t})(\gamma_m, \mathbf{s}, \mathbf{t}) \end{aligned}$$

для всех $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in K^n$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 3$. Нетрудно показать, что

$$F_{i1}(m, \mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sigma_{i1}(f_m \otimes \mathbf{e}_\mathbf{s} \otimes \mathbf{e}_\mathbf{t})(\gamma_m, \mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sigma_{i1}(f_m \otimes \mathbf{e}_\mathbf{s}^i \otimes \mathbf{e}_\mathbf{t})(\gamma_m, \mathbf{s}, \mathbf{t})$$

стремится к 0 при $s_i \rightarrow \infty$, $i = 1, 2, \dots, n$ (ср. [2; теорема V.2.12]). Легко также видеть, что

$$F_2(m, \mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sigma_2(f_m \otimes \mathbf{e}_\mathbf{s} \otimes \mathbf{e}_\mathbf{t})(\gamma_m, \mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sigma_2(1 \otimes \mathbf{e}_\mathbf{s} \otimes \mathbf{e}_\mathbf{t})(\gamma_m, \mathbf{s}, \mathbf{t})$$

стремится к 0 при $m \rightarrow \infty$. Наконец, по лемме Филлипса, примененной к сужению σ_{i3} на тензорный множитель $\ell^\infty(K)$, имеем

$$F_{i3}(m, \mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sigma_{i3}(f_m \otimes \mathbf{e}_\mathbf{s} \otimes \mathbf{e}_\mathbf{t})(\gamma_m, \mathbf{s}, \mathbf{t}) \rightarrow 0$$

при $t_i \rightarrow \infty$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Поскольку $F_2(m, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ стремится к 0 при $m \rightarrow \infty$, множество

$$S_2 = \left\{ (m, \mathbf{s}, \mathbf{t}) \in \mathbb{N} \times K^{2n} : |F_2(m, \mathbf{s}, \mathbf{t})| \geq \frac{1}{3} \right\}$$

конечно по переменной m . Аналогично, каждое множество

$$S_{i1} = \left\{ (m, \mathbf{s}, \mathbf{t}) \in \mathbb{N} \times K^{2n} : |F_{i1}(m, \mathbf{s}, \mathbf{t})| \geq \frac{1}{3n} \right\}$$

конечно по переменной s_i , и каждое множество

$$S_{i3} = \left\{ (m, \mathbf{s}, \mathbf{t}) \in \mathbb{N} \times K^{2n} : |F_{i3}(m, \mathbf{s}, \mathbf{t})| \geq \frac{1}{3n} \right\}$$

конечно по переменной t_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^n (F_{i1}(m, \mathbf{s}, \mathbf{t}) + F_{i3}(m, \mathbf{s}, \mathbf{t})) + F_2(m, \mathbf{s}, \mathbf{t}) = 1, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{s}, \mathbf{t} \in K^n,$$

из чего сразу следует, что

$$\mathbb{N} \times K^{2n} = S_2 \cup \left[\bigcup_{i=1}^n (S_{i1} \cup S_{i3}) \right].$$

Это противоречит следствию 1. Далее доказательство очевидно.

ПРИМЕР 2. Пусть K – дискретное топологическое пространство мощности $|K| \geq \aleph_\omega$, и пусть K_+ – его одноточечная компактификация. Рассмотрим фактормодуль $\mathbf{C} = C(K_+)/I(K)$ и его n -ю тензорную степень $\mathbf{C}_n = \mathbf{C} \check{\otimes} \dots \check{\otimes} \mathbf{C}$. Тогда $\mathrm{ds}_{\check{\otimes}} C(K_+^n) = {}_{C(K_+^n)} \mathrm{dh}_{\check{\otimes}} \mathbf{C}_n = n$ (см. [15]). Методом Кричевца нетрудно доказать, что эти равенства справедливы также при $|K| \geq \aleph_{n-1}$. Это утверждение переносится на случай строгой малой глобальной размерности $\mathrm{ds}_{\check{\otimes}}$ без изменений.

ТЕОРЕМА 4. Пусть K – дискретное топологическое пространство мощности $|K| \geq \aleph_n$, и пусть K_+ – его одноточечная компактификация, а M – метризуемый компакт. Тогда

$$\mathrm{ds}_{\check{\otimes}} C(M \times K_+^n) = \mathrm{ds}_{\check{\otimes}} C(M) + n \cdot \mathrm{ds}_{\check{\otimes}} C(K_+) = \mathrm{ds}_{\check{\otimes}} C(M) + n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega \in M$. Пусть A , B , M_ω , $\mathbf{C}_\omega$ и W_i , $i = 1, 2, \dots, n$, – такие же, как в доказательстве теоремы 3. Пусть $\mathbf{C}_n \in B\text{-}\check{\otimes}\text{-unmod}$ – такой же модуль, как в примере 2. Обозначим строгий левый $A \check{\otimes} B$ -модуль $\mathbf{C}_\omega \check{\otimes} \mathbf{C}_n \in A \check{\otimes} B\text{-}\check{\otimes}\text{-unmod}$ через $\tilde{\mathbf{C}}$. Ввиду следствия 6 достаточно доказать, что

$$A \check{\otimes} B \mathrm{dh}_{\check{\otimes}} \tilde{\mathbf{C}} = A \mathrm{dh}_{\check{\otimes}} \mathbf{C}_\omega + n \cdot {}_{C(K_+)} \mathrm{dh}_{\check{\otimes}} \mathbf{C} = A \mathrm{dh}_{\check{\otimes}} \mathbf{C}_\omega + n.$$

Рассмотрим проективную резольвенту для $C(K_+)$ -модуля $\mathbf{C}$

$$0 \rightarrow I(K) \rightarrow C(K_+) \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow 0$$

и ее n -ю слабую тензорную степень

$$0 \rightarrow I(K^n) \xrightarrow{\rho_1} \bigoplus_{i=1}^n W_i \rightarrow \dots \rightarrow C(K_+^n) \rightarrow \mathbf{C}_n \rightarrow 0,$$

где с точностью до знаков $\rho_1(x) = (x, \dots, x)$ для $x \in I(K^n)$.

Если ω – изолированная точка, то C_ω – проективный A -модуль и утверждение теоремы следует из предложения 4 и примера 2. Поэтому будем считать, что ω – неизолированная точка. Рассмотрим проективную резольвенту левого A -модуля C_ω

$$0 \rightarrow I(M_\omega) \rightarrow C(M) \rightarrow C_\omega \rightarrow 0,$$

а затем возьмем слабое тензорное произведение двух последних резольвент:

$$0 \rightarrow I(M_\omega \times K^n) \xrightarrow{\rho} \left[\bigoplus_{i=1}^n I(M_\omega) \tilde{\otimes} W_i \right] \oplus I(M \times K^n) \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{C} \rightarrow 0,$$

где с точностью до знаков $\rho(x) = (x, \dots, x)$, $x \in I(M_\omega \times K^n)$. По предложению 1 это будет $\tilde{\otimes}$ -проективная резольвента строгого $C(M \times K_+^n)$ -модуля $\tilde{C}$ длины $n + 1$.

Предположим, что ${}_A \tilde{\otimes}_B \text{dh} \tilde{C} < n + 1$. Тогда существуют морфизмы левых банаховых $C(M \times K_+^n)$ -модулей $\sigma_{1i}: I(M_\omega) \tilde{\otimes} W_i \rightarrow I(M_\omega \times K^n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $\sigma_2: I(M \times K^n) \rightarrow I(M_\omega \times K^n)$ такие, что

$$\sum_{i=1}^n \sigma_{1i}(x) + \sigma_2(x) = x, \quad x \in I(M_\omega \times K^n).$$

Так как ω – неизолированная точка, существует последовательность попарно различных точек $\gamma_m \in M_\omega$, сходящаяся к ω . Пусть $f_m \in I(M_\omega)$, $m = 1, 2, \dots$, такковы, что $f_m(\gamma_m) = 1$. Пусть $e_p \in I(K)$, $p \in K$, а также $e_s \in I(K^n)$ и $e_s^i \in W_i$, $s = (s_1, \dots, s_n) \in K^n$, $i = 1, 2, \dots, n$, – те же, что и в доказательстве теоремы 3. Пусть

$$F_{1i}(m, s) = \sigma_{1i}(f_m \otimes e_s)(\gamma_m, s), \quad F_2(m, s) = \sigma_2(f_m \otimes e_s)(\gamma_m, s)$$

для $m \in \mathbb{N}$, $s \in K^n$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ясно, что

$$F_2(m, s) = \sigma_2(f_m \otimes e_s)(\gamma_m, s) = f_m(\gamma_m) \sigma_2(1 \otimes e_s)(\gamma_m, s) = \sigma_2(1 \otimes e_s)(\gamma_m, s)$$

стремится к 0 при $m \rightarrow \infty$. Аналогично,

$$F_{1i}(m, s) = \sigma_{1i}(f_m \otimes e_s)(\gamma_m, s) = \sigma_{1i}(f_m \otimes e_s^i)(\gamma_m, s)$$

стремится к 0 при $s_i \rightarrow \infty$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть

$$S_{1i} = \left\{ (m, s) \in \mathbb{N} \times K^n : |F_{1i}(m, s)| \geq \frac{1}{2n} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$S_2 = \left\{ (m, s) \in \mathbb{N} \times K^n : |F_2(m, s)| \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Тогда каждое множество S_{1i} конечно по переменной s_i , $i = 1, 2, \dots, n$, а множество S_2 конечно по переменной m .

С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^n F_{1i}(m, s) + F_2(m, s) = 1, \quad m \in \mathbb{N}, \quad s \in K^n.$$

Отсюда

$$\mathbb{N} \times K^n = \left(\bigcup_{i=1}^n S_{1i} \right) \cup S_2,$$

а это противоречит следствию 1. Далее очевидно.

ТЕОРЕМА 5. Пусть K – дискретное топологическое пространство мощности $|K| \geq \aleph_\omega$, и пусть K_+ – его одноточечная компактификация, а K_+^∞ – топологическая счетная степень K_+ . Тогда в алгебре $C(K_+^\infty)$ имеется максимальный идеал бесконечной строгой гомологической размерности и, как следствие,

$$\mathrm{dg}_{\otimes} C(K_+^\infty) = \mathrm{dg}_{\otimes} C(K_+^\infty) = \mathrm{db}_{\otimes} C(K_+^\infty) = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем левый $C(K_+^n)$ -модуль C_n такой же, как в примере 2. Обозначим присоединенную бесконечно удаленную точку пространства K_+ через ω . Пусть $\omega_\infty \in K_+^\infty$ – точка, все координаты которой равны ω ; $I_\infty = I(K_+^\infty \setminus \{\omega_\infty\})$ (идеал всех функций из $C(K_+^\infty)$, которые равны 0 в точке ω_∞). Рассмотрим фактормодуль $C_\infty = C(K_+^\infty)/I_\infty$. Тогда для любого натурального n из предложения 4 и примера 2 следует неравенство

$$C(K_+^\infty) \mathrm{dh}_{\otimes} C_\infty \geq C(K_+^n) \mathrm{dh}_{\otimes} C_n = n.$$

Отсюда $C(K_+^\infty) \mathrm{dh}_{\otimes} C_\infty = \infty$. Далее очевидно.

Пусть теперь K – такое же, как в теореме 3, а M – бесконечный метризуемый компакт. Тогда по теореме 3 выполнены равенства

$$\mathrm{dg}_{\otimes} C(M \times K_+^n) = \mathrm{db}_{\otimes} C(M \times K_+^n) = 2n + 1.$$

Учитывая еще пример 1 и теорему 5, получаем

СЛЕДСТВИЕ 8. Размерности $\mathrm{dg}_{\otimes} C(\Omega)$ и $\mathrm{db}_{\otimes} C(\Omega)$ могут принимать все неотрицательные целые значения и значение бесконечность.

Автор благодарен А. Я. Хелемскому за постановку задачи, а также признателен Ю. В. Селиванову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Я. Хелемский, “О гомологической размерности нормированных модулей над банаховыми алгебрами”, *Матем. сб.*, **81 (123)** (1970), 430–444.
- [2] А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, Изд-во МГУ, М., 1986.
- [3] А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии*, Наука, М., 1989.
- [4] Ю. В. Селиванов, *Когомологии банаховых и близких к ним алгебр*, Дисс. ... д.ф.-м.н., МАТИ, М., 2002.
- [5] J. L. Taylor, “Homology and cohomology for topological algebras”, *Adv. Math.*, **9** (1972), 137–182.
- [6] A. Yu. Pirkovskii, “Injective topological modules, additivity formulas for homological dimensions, and related topics”, *Topological Homology: Helemskii’s Moscow Seminar*, Nova Science, New York, 2000, 93–143.

- [7] S. S. Akbarov, “Stereotype spaces, algebras, homologies: an outline”, *Topological Homology: Helemskii’s Moscow Seminar*, Nova Science, New York, 2000, 1–27.
- [8] A. Ya. Helemskii, “Some aspects of topological homology since 1995: A survey”, *Banach Algebras and their Applications*, Contemp. Math., **363**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, 145–179.
- [9] Е. Ш. Курмакаева, “Зависимость строгой гомологической размерности $C(\Omega)$ от топологии Ω ”, *Матем. заметки*, **55**:3 (1994), 76–83.
- [10] Е. Ш. Курмакаева, *Гомологические свойства алгебр непрерывных функций*, Дисс. ... к.ф.-м.н., МГУ, М., 1991.
- [11] N. Th. Varopoulos, “Some remarks on Q -algebras”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **22**:4 (1972), 1–11.
- [12] А. Я. Хелемский, “Низшие значения, принимаемые глобальной гомологической размерностью функциональных банаховых алгебр”, *Тр. семинара им. И. Г. Петровского*, **3** (1978), 223–242.
- [13] S. Pott, “An account on the global dimension theorem of A. Ya. Helemskii”, *Annales Universitatis Saraviensis*, **9** (1999), 155–194.
- [14] W. Moran, “The global dimension of $C(X)$ ”, *J. London Math. Soc. (2)*, **17** (1978), 321–329.
- [15] А. Н. Кричевец, “О гомологической размерности алгебры $C(\Omega)$ ”, *Деп. ВИНТИ* №9012-В86, СО АН СССР, Новосибирск, 1986.
- [16] Yu. V. Selivanov, “Homological dimensions of tensor products of Banach algebras”, *Banach Algebras 97*, Walter de Gruyter, Berlin, 1998, 441–459.
- [17] W. Sierpiński, *Cardinal and Ordinal Numbers*, Warszawa, 1965.
- [18] R. S. Phillips, “On linear transformations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **48**:3 (1948), 516–541.
- [19] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc., **16**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1955.
- [20] Ю. В. Селиванов, “О значениях, принимаемых глобальной размерностью в некоторых классах банаховых алгебр”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1975, № 1, 37–42.
- [21] С. Маклейн, *Гомология*, Мир, М., 1966.

С. Б. Табалдыев

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

Поступило

15.03.2006