Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Тажетдинов, О специальных конгруэнц-подгруппах симплектических групп, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 5, 770–772

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3086>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 16:12:03

УДК 514.154+519.45

О СПЕЦИАЛЬНЫХ КОНГРУЭНЦ-ПОДГРУППАХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГРУПП

С. Тажетдинов

Доказывается, что каждая специальная конгруэнц-подгруппа $SSp(V, I)$ симплектической группы $Sp(V(R))$, где R – кольцо стабильного ранга 1 с обратимым элементом 2 и $\dim V(R) \geq 4$, порождается содержащимися в ней симплектическими трансвекциями. Этот результат используется для полного описания нормальных подгрупп группы $Sp(V(R))$.

Библиография: 8 названий.

Коммутативное кольцо R называется *кольцом стабильного ранга 1*, если в нем каждое равенство $\text{id}(a, b) = R$, где $a, b \in R$, влечет за собой существование такого элемента $\alpha \in R$, что $a + \alpha b$ обратим в R . Примерами колец стабильного ранга 1 являются локальные и полулокальные кольца, кольца, регулярные по Нейману, и кольца размерности 0 (см. [1]).

Пусть R – кольцо стабильного ранга 1 с обратимым элементом 2 и $V = V(R)$ – симплектическое пространство над R размерности $r = 2m$, $m \geq 2$, т.е. свободный R -модуль с r свободными порождающими и заданной на нем невырожденной косимметрической билинейной формой $\beta(x, y)$. Группа автоморфизмов ρ пространства V , оставляющих форму $\beta(x, y)$ инвариантной, т.е. удовлетворяющих соотношению $\beta(x\rho, y\rho) = \beta(x, y)$ при всех $x, y \in V$, называется *симплектической группой* над V и обозначается $Sp(V)$.

Пусть I – идеал кольца R , отличный от R . Гомоморфизм колец $\lambda_I: R \rightarrow RI$ индуцирует гомоморфизм симплектических пространств (мы сохраняем обозначение)

$$\lambda_I: V(R) \rightarrow V(R/I). \quad (1)$$

Пространство $V(R/I)$ образовано векторами $x\lambda_I$, $x \in V(R)$, причем форма $\beta(x\lambda_I, y\lambda_I)$ задается как $\beta(x, y)\lambda_I$. Считая $V(R/R)$ 0-модулем, распространим (1) и на случай $I = R$. Гомоморфизм (1) индуцирует сюръективный (см. [1]) гомоморфизм симплектических групп $\pi_I: Sp(V(R)) \rightarrow Sp(V(R/I))$, при котором $\lambda_I(\rho\pi_I) = \rho\lambda_I$ для $\rho \in Sp(V(R))$. Здесь $SSp(V(R/R))$ означает единичную группу.

Пусть теперь I – произвольный идеал кольца R . Общая и специальная конгруэнц-подгруппы $GSp(V, I)$ и $SSp(V, I)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} GSp(V, I) &= (\text{center } Sp(V(R/I)))\pi_I^{-1}, \\ SSp(V, I) &= (1)\pi_I^{-1} = \text{Ker } \pi_I. \end{aligned}$$

Заметим, что $GSp(V, R) = SSp(V, R) = Sp(V)$, $GSp(V, 0) = \text{center } Sp(V)$, $SSp(V, 0) = \{1\}$.

Для $x \in V$ определим $\text{id}(x)$ как наименьший идеал J со свойством $x\lambda_I = 0$, а для $\rho \in Sp(V)$ определим вес $J(\rho)$ как наименьший идеал J со свойством $\rho \in GSp(V, J)$. Если H – подгруппа, то по определению положим $J(H) = \sum_{\rho \in H} J(\rho)$.

Далее, вектор $u \in V$ называется *унимодулярным*, если $\text{id}(u) = R$. Если u – унимодулярный вектор и $\alpha \in R$, то элемент $\tau_{u,\alpha} \in Sp(V)$ вида $x\tau_{u,\alpha} = x + \alpha\beta(u, x)u$ называется *симплектической трансвекцией*. Если u – унимодулярный вектор и $x \in V$, $\beta(u, x) = 0$, то элемент $\sigma_{u,x} \in Sp(V)$ вида

$$y\sigma_{u,x} = y + \beta(u, y)x + \beta(x, y)u$$

называется *унитарной трансвекцией*.

Для идеала I кольца R определим подгруппу

$$E(V, I) = \text{gr}(\tau_{u,\alpha} \mid u \in V, \text{id}(u) = R, \alpha \in I).$$

В настоящей заметке мы покажем, что каждая специальная конгруэнц-подгруппа $SSp(V, I)$ порождается содержащимися в ней симплектическими трансвекциями (теорема 1). Этот результат, который имеет и самостоятельный интерес, используется для получения полного описания нормальных подгрупп группы $Sp(V)$ (теорема 2). Итак, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть R – кольцо стабильного ранга 1 с обратимым элементом 2 и $\dim(V(R)) \geq 4$. Тогда $SSp(V, I) = E(V, I)$ для каждого идеала I кольца R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $E(V, I) \leq SSp(V, I)$ очевидно, поскольку если $\alpha \in I$, то $\tau_{u,\alpha} \in SSp(V, I)$. Пусть теперь $\varphi \in SSp(V, I)$. Докажем, что $\varphi \in E(V, I)$. Из теоремы 5.6 (d) работы [2] легко следует, что $\varphi = \psi^{-1}\theta\psi$, где $\psi \in Sp(V)$ и θ является произведением унитарных трансвекций вида $\sigma_{u,x}$, $\text{id}(x) \in I$ (элемент $E(u, x)$ в работе [2] совпадает с $\sigma_{u,-x}$). Далее, повторяя ход рассуждений работы [3; с. 193–197], получаем, что, в свою очередь, каждая унитарная трансвекция $\sigma_{u,x}$ является произведением симплектических трансвекций $\tau_{u,\alpha}$, причем если $\text{id}(x) \subseteq I$, то $\alpha \in I$ для всех множителей $\tau_{u,\alpha}$. Поэтому достаточно показать, что $\psi^{-1}\tau_{u,\alpha}\psi \in E(V, I)$ для всех $\alpha \in I$, но это вытекает из известного тождества $\psi^{-1}\tau_{u,\alpha}\psi = \tau_{u,\psi,\alpha}$. Теорема доказана.

Эта теорема оказывается недостающим звеном в процессе полного описания нормальных подгрупп группы $Sp(V(R))$. А именно, следствие из теоремы работы [4] с учетом только что доказанной теоремы дает возможность придать описаниям нормальных подгрупп группы $Sp(V(R))$ следующую окончательную форму.

ТЕОРЕМА 2. Пусть R – кольцо стабильного ранга 1 с обратимым элементом 2 и $\dim V(R) \geq 4$. Подгруппа H нормальна в группе $Sp(V)$ тогда и только тогда, когда

$$SSp(V, J) \leq H \leq GSp(V, J)$$

для некоторого однозначно определенного идеала J (совпадающего, следовательно, с $J(H)$).

Из теорем, являющихся частными случаями этой теоремы, отметим только теорему 4.5 работы [2], в которой аналогичное описание получено другими методами при дополнительном предположении обратимости элемента 3 в кольце R . Теперь это ограничение оказывается лишним.

Пользуясь случаем, отметим, что в работах [5], [6] даны описания субнормальных подгрупп группы $Sp(V)$ над некоторыми кольцами стабильного ранга 1, совпадающие для нормальных подгрупп с данным здесь описанием.

Отметим также, что при $\dim V(R) = 2$ группа $Sp(V)$ совпадает со специальной линейной группой $SL_2(V)$, и для этой группы исчерпывающие описания нормальных подгрупп даны в работах [7], [8].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Kirkwood, B. R. McDonald, “The symplectic group over a ring with one in its stable range”, *Pacific J. Math.*, **92**:1 (1981), 111–125.
- [2] H. Ishibashi, “Multiplicative and transitive symplectic groups”, *J. Algebra*, **84** (1983), 115–127.
- [3] B. R. McDonald, *Geometric Algebra over Local Rings*, Marcel Dekker, New York–Basel, 1976.
- [4] С. Тажетдинов, “Нормальное строение симплектических групп над кольцами стабильного ранга 1”, *Матем. заметки*, **39**:4 (1986), 512–517.
- [5] С. Тажетдинов, “Субнормальное строение симплектических групп над локальными кольцами”, *Матем. заметки*, **37**:2 (1985), 289–298.
- [6] С. Тажетдинов, “Субнормальное строение симплектических групп над $(2, 3)$ -полными кольцами”, *Сиб. матем. ж.*, **34**:6 (1993), 165–169.
- [7] D. L. Costa, G. E. Keller, “On the normal subgroups of $SL(2, A)$ ”, *J. Pure Appl. Algebra*, **53**:3 (1988), 201–226.
- [8] D. L. Costa, G. E. Keller, “The $E(2, A)$ sections of $SL(2, A)$ ”, *Ann. of Math. (2)*, **134**:1 (1991), 159–188.

С. Тажетдинов

Каракалпакский государственный университет им. Бердаха

Поступило

02.10.2000