Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Алиев, Краевые задачи для одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 6, 803–814

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm309>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 10:25:41

УДК 517.946

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Р. Алиев

В работе получены достаточные условия существования единственного регулярно решения краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений порядка $2k$ с переменными коэффициентами, причем эти условия выражены лишь в терминах операторных коэффициентов исследуемых уравнений.

Библиография: 14 названий.

Введение. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряженный положительно-определенный оператор в H .

Рассмотрим краевую задачу для операторно-дифференциального уравнения высокого четного порядка с разрывным коэффициентом

$$(-1)^k u^{(2k)}(t) + \rho(t) A^{2k} u(t) + \sum_{j=1}^{2k} A_j(t) u^{(2k-j)}(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0; \infty), \quad (0.1)$$

$$u^{(j)}(0) = 0, \quad j = \overline{0, k-1}, \quad (0.2)$$

где $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$, $u(t) \in W_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$, $A_j(t)$, $j = \overline{1, 2k}$, – линейные, вообще говоря, неограниченные операторы, определенные почти при всех $t \in \mathbb{R}_+$, а $\rho(t)$ – скалярная кусочно постоянная функция.

Здесь и в дальнейшем, производная $u^{(j)} \equiv d^j u / dt^j$ понимается в смысле теории обобщенных функций.

Через $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ обозначено гильбертово пространство всех вектор-функций, определенных в $\mathbb{R}_+$ со значениями в H , которые имеют конечную норму

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} = \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_H^2 dt \right)^{1/2},$$

а $W_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$, $\overset{\circ}{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$ – следующие гильбертовы пространства:

$$W_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H) = \{u(t) \mid u^{(2k)}(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H), \quad A^{2k} u(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)\},$$

$$\overset{\circ}{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H) = \{u(t) \mid u(t) \in W_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H), \quad u^{(j)}(0) = 0, \quad j = \overline{0, k-1}\}$$

с нормой [1]

$$\|u\|_{W_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)} = (\|u^{(2k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \|A^{2k}u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2)^{1/2}.$$

Под $L(X, Y)$ будем понимать множество линейных ограниченных операторов, действующих из гильбертова пространства X в другое гильбертово пространство Y , а $L_\infty(\mathbb{R}_+; B)$ – множество B -значных существенно ограниченных оператор-функций в $\mathbb{R}_+$, где B – банахово пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Если вектор-функция $u(t)$ из $W_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$ удовлетворяет уравнению (0.1) почти всюду в $\mathbb{R}_+$, а граничные условия (0.2) выполняются в смысле

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|A^{2k-j-1/2}u^{(j)}(t)\|_H = 0, \quad j = \overline{0, k-1}, \quad (0.3)$$

то $u(t)$ будем называть *регулярным решением* краевой задачи (0.1), (0.2).

В дальнейшем, ради простоты изложения результатов будем предполагать функцию $\rho(t)$ разрывной лишь в одной точке, т.е.

$$\rho(t) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } 0 \leq t \leq T, \\ \beta, & \text{если } T < t < +\infty, \end{cases} \quad (0.4)$$

где α, β – положительные, вообще говоря, не равные друг другу числа, причем

$$\inf_t \rho(t) = \alpha, \quad \sup_t \rho(t) = \beta.$$

Отметим, что задача Коши для операторно-дифференциальных уравнений исследована многими авторами, например, см. работу [2] и имеющиеся там ссылки. В этой работе также изучено асимптотическое поведение решений. Краевые же задачи для операторно-дифференциальных уравнений вида (0.1) с непрерывными, постоянными коэффициентами, т.е. случай $\rho(t) \equiv 1$, $t \in \mathbb{R}_+$, и $A_j(t) \equiv A_j$, $j = \overline{1, 2k}$, рассматривались в статьях [3]–[6], в которых для них указаны достаточные условия существования единственного регулярного решения. Этот случай изучен и в [7]. Фредгольмовость таких задач исследована в широком аспекте при дополнительных условиях на операторные коэффициенты в работе [8]. Краевые задачи для уравнений вида (0.1) с переменными коэффициентами в случае $\rho(t) \equiv 1$, $t \in \mathbb{R}_+$, изучены в работе [9]. В книге [10] исследованы краевые задачи для операторно-дифференциальных уравнений на конечном отрезке с непрерывными коэффициентами, где операторы $A_j(t)$ вполне подчинены операторам A^{-j} .

Работ, изучающих краевые задачи и задачу Коши для дифференциальных уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами, достаточно (см., например, [11], [12] и имеющиеся там ссылки). Изучение таких задач обосновывается тем, что многие задачи о стационарном и нестационарном распределении температуры в телах, составленных из разнородных кусков, задачи дифракции и другие приводят к рассмотрению уравнений эллиптического, параболического или гиперболического типа с разрывными коэффициентами и дополнительными условиями на решение в точках разрыва коэффициентов. А поскольку такие задачи могут быть приведены к краевым задачам для операторно-дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами,

то предлагаемая работа представляет собой научный интерес. Заметим, что корректная и однозначная разрешимость краевых задач для дифференциальных уравнений вида (0.1) при постоянных операторных коэффициентах и функции $\rho(t)$ вида (0.4) изучена в [13] в случае $k = 1$ и в [14] в случае $k = 2$. Некоторые моменты методики изучения в работах [13], [14] послужили для нас основанием построения общего метода исследования при переменных операторных коэффициентах краевых задач для дифференциальных уравнений высокого четного порядка, главная часть которых терпит разрывы, что и является одной из целей данной заметки.

В настоящей работе получены достаточные условия существования единственного регулярного решения задачи (0.1), (0.2), которые тесно связаны с найденными оценками сверху норм операторов промежуточных производных через главную часть уравнения (0.1) в подпространстве $\mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$.

Указанные условия разрешимости выражены лишь в терминах операторных коэффициентов уравнения (0.1).

Работа состоит из трех пунктов. В п. 1 доказывается теорема об изоморфизме между пространствами $\mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$ и $L_2(\mathbb{R}_+; H)$, осуществляемом оператором, который порожден главной частью уравнения (0.1) и краевыми условиями (0.2). Далее, п. 2 посвящен оценкам сверху норм операторов промежуточных производных на полуоси. Наконец, в п. 3, при использовании результатов п. 1 и п. 2, найдены условия разрешимости краевой задачи (0.1), (0.2).

Основными результатами данной статьи являются теоремы 1.1, 2.1 и 3.1.

1. Некоторые вспомогательные предложения. Напомним, что в проводимых исследованиях предполагаем, что $\rho(t)$ — функция вида (0.4).

Сперва рассмотрим главную часть уравнения (0.1)

$$(-1)^k u^{(2k)}(t) + \rho(t) A^{2k} u(t) = f(t), \quad (1.1)$$

где $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$, $u(t) \in \mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$.

Через $\mathcal{P}_0$ обозначим оператор, действующий из пространства $\mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$ в $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ следующим образом:

$$\mathcal{P}_0 u(t) \equiv (-1)^k u^{(2k)}(t) + \rho(t) A^{2k} u(t), \quad u(t) \in \mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H).$$

Тогда имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1.1. *Оператор $\mathcal{P}_0$ изоморфно отображает $\mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$ на $L_2(\mathbb{R}_+; H)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно увидеть, что однородное уравнение $\mathcal{P}_0 u(t) = 0$ имеет только нулевое решение из пространства $\mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$. Вытекает это из того, что решение однородного уравнения $\mathcal{P}_0 u(t) = 0$ из $\mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$ имеет следующий вид:

$$\widetilde{u}(t) = \begin{cases} \widetilde{u}_1(t) = \sum_{i=1}^k e^{\alpha^{1/(2k)} \omega_i t} A \widetilde{\xi}_i + \sum_{i=k+1}^{2k} e^{-\alpha^{1/(2k)} \omega_i (T-t)} A \widetilde{\xi}_i, & \text{если } 0 \leq t < T, \\ \widetilde{u}_2(t) = \sum_{i=1}^k e^{\beta^{1/(2k)} \omega_i (t-T)} A \widetilde{\xi}_{2k+i}, & \text{если } T < t < +\infty, \end{cases}$$

где $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2k}$ – корни уравнения $(-1)^k \lambda^{2k} + 1 = 0$, причем $\operatorname{Re} \omega_i < 0$, $i = \overline{1, k}$, $\operatorname{Re} \omega_i > 0$, $i = \overline{k+1, 2k}$, а векторы $\tilde{\xi}_i \in D(A^{2k-1/2})$, $i = \overline{1, 3k}$, – искомые элементы пространства H (см., например, [1]). Для определения этих элементов из условия $\tilde{u}(t) \in \overset{\circ}{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$ получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} \tilde{u}^{(j)}(0) = \tilde{u}_1^{(j)}(0) = 0, & j = \overline{0, k-1}, \\ \tilde{u}^{(j)}(T) = \tilde{u}_1^{(j)}(T) = \tilde{u}_2^{(j)}(T), & j = \overline{0, 2k-1}, \end{cases}$$

из которых несложно получается, что все $\tilde{\xi}_j = 0$, $j = \overline{1, 3k}$, т.е. $\tilde{u}(t) = 0$, правда приходится преодолевать немало технических трудностей (в случаях $k = 1$ и $k = 2$ это показано в [14]).

Теперь покажем, что уравнение $\mathcal{P}_0 u(t) = f(t)$ имеет решение из $\overset{\circ}{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$ при любом $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$.

Действительно, рассмотрим уравнение в пространстве $W_2^{2k}(\mathbb{R}; H)$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$,

$$\mathcal{P}_\alpha v(t) \equiv (-1)^k v^{(2k)}(t) + \alpha A^{2k} v(t) = F(t), \quad (1.2)$$

где

$$F(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } t \in [0; T], \\ 0, & \text{если } t \in \mathbb{R} \setminus [0; T]. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что решение уравнения (1.2) из пространства $W_2^{2k}(R; H)$ представляется в виде

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda^{2k} E + \alpha A^{2k})^{-1} \left(\int_0^T f(s) e^{-i\lambda s} ds \right) e^{it\lambda} d\lambda.$$

Действительно, по теореме Планшереля

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_2^{2k}(\mathbb{R}; H)}^2 &= \|v^{(2k)}\|_{L_2(\mathbb{R}; H)}^2 + \|\alpha A^{2k} v\|_{L_2(\mathbb{R}; H)}^2 \\ &= \|\lambda^{2k} \hat{v}(\lambda)\|_{L_2(R; H)}^2 + \|\alpha A^{2k} \hat{v}(\lambda)\|_{L_2(R; H)}^2 \\ &\leq \|\lambda^{2k} (\lambda^{2k} E + \alpha A^{2k})^{-1}\|_{H \rightarrow H}^2 \|\hat{f}(\lambda)\|_{L_2(R; H)}^2 \\ &\quad + \|\alpha A^{2k} (\lambda^{2k} E + \alpha A^{2k})^{-1}\|_{H \rightarrow H}^2 \|\hat{f}(\lambda)\|_{L_2(R; H)}^2 \\ &\leq \operatorname{const} \|\hat{f}(\lambda)\|_{L_2(R; H)}^2 = \operatorname{const} \|f(t)\|_{L_2([0; T]; H)}^2, \end{aligned}$$

где $\hat{v}(\lambda)$, $\hat{f}(\lambda)$ – преобразования Фурье функций $v(t)$, $f(t)$ соответственно.

Далее, определим сужение решения $v(t)$ на $[0; T]$ и обозначим его через $u_\alpha(t)$.

Аналогичным образом рассматриваем уравнение

$$\mathcal{P}_\beta v(t) \equiv (-1)^k v^{(2k)}(t) + \beta A^{2k} v(t) = F(t), \quad (1.3)$$

где

$$F(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } t \in (T; +\infty), \\ 0, & \text{если } t \in \mathbb{R} \setminus (T; +\infty), \end{cases}$$

и определяем решение $u_\beta(t)$ уравнения (1.3) из пространства $W_2^{2k}((T; +\infty); H)$.

Значит, решение уравнения $\mathcal{P}_0 u(t) = f(t)$ из пространства $\dot{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$ представляется в виде

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = u_\alpha(t) + \sum_{i=1}^k e^{\alpha^{1/(2k)} \omega_i t A} \xi_i \\ \quad + \sum_{i=k+1}^{2k} e^{-\alpha^{1/(2k)} \omega_i (T-t) A} \xi_i, & \text{если } 0 \leq t < T, \\ u_2(t) = u_\beta(t) + \sum_{i=1}^k e^{\beta^{1/(2k)} \omega_i (t-T) A} \xi_{2k+i}, & \text{если } T < t < +\infty, \end{cases}$$

где $\omega_i, i = \overline{1, 2k}$, удовлетворяют вышеуказанным условиям, а векторы $\xi_i \in D(A^{2k-1/2})$, $i = \overline{1, 3k}$, — элементы из пространства H , однозначно определяющиеся из условия $u(t) \in \dot{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$ следующими соотношениями:

$$\begin{cases} u^{(j)}(0) = u_1^{(j)}(0) = 0, & j = \overline{0, k-1}, \\ u^{(j)}(T) = u_1^{(j)}(T) = u_2^{(j)}(T), & j = \overline{0, 2k-1} \end{cases}$$

(в случаях $k = 1$ и $k = 2$ это показано в [14]).

Теперь же покажем ограниченность оператора $\mathcal{P}_0$.

Ввиду того, что

$$(u^{(2k)}, \rho(t) A^{2k} u)_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} + (\rho(t) A^{2k} u, u^{(2k)})_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} = 2 \operatorname{Re}(u^{(2k)}, \rho(t) A^{2k} u)_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}$$

имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 &= \|u^{(2k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + (-1)^k 2 \operatorname{Re}(u^{(2k)}, \rho(t) A^{2k} u)_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &\quad + \|\rho(t) A^{2k} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \leq 2(\|u^{(2k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \|\rho(t) A^{2k} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2) \\ &\leq 2(\|u^{(2k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \beta^2 \|A^{2k} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2) \leq 2 \max(1; \beta^2) \|u\|_{\dot{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)}^2, \end{aligned}$$

из чего вытекает ограниченность оператора $\mathcal{P}_0$.

Таким образом, оператор $\mathcal{P}_0$ ограничен и взаимно однозначно действует из пространства $\dot{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$ на пространство $L_2(\mathbb{R}_+; H)$.

Далее, применяя теорему Банаха об обратном операторе, завершаем доказательство теоремы, т.е. оператор $\mathcal{P}_0$ осуществляет изоморфизм пространств $\dot{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$ и $L_2(\mathbb{R}_+; H)$. Теорема доказана.

Через $\mathcal{P}$ обозначим оператор, порожденный уравнением (0.1) и краевыми условиями (0.2), который действует из пространства $\dot{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$ в $L_2(\mathbb{R}_+; H)$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть

$$K_j(t) = A_j(t) A^{-j} \in L_\infty(\mathbb{R}_+; L(H; H)), \quad j = \overline{1, 2k}.$$

Тогда оператор $\mathcal{P}$ является ограниченным оператором из $\dot{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$ в $L_2(\mathbb{R}_+; H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того, что для любого $u(t) \in \mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} &\leq \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} + \left\| \sum_{j=1}^{2k} A_j(t) u^{(2k-j)} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &\leq \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} + \sum_{j=1}^{2k} \sup_t \|K_j(t)\|_{H \rightarrow H} \|A^j u^{(2k-j)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}, \end{aligned}$$

применяя теорему 1.1 и теорему о промежуточных производных [1], из последнего неравенства получим

$$\|\mathcal{P}u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \leq \text{const} \|u\|_{W_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)}.$$

Теорема доказана.

2. Об оценках норм операторов промежуточных производных. Прежде чем перейти к оценкам сверху норм операторов промежуточных производных через главную часть уравнения (0.1) в пространстве $\mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$, докажем следующее коэрцитивное неравенство, применяемое в дальнейшем.

ЛЕММА 2.1. Для любого $u(t) \in \mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|\rho^{-1/2}(t) u^{(2k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \|\rho^{1/2}(t) A^{2k} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + 2\|A^k u^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \\ \leq \alpha^{-1} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $u(t) \in \mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$, то с помощью интегрирования по частям несложно получить следующие равенства:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_0 u, A^{2k} u)_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} &= ((-1)^k u^{(2k)}, A^{2k} u)_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} + (\rho(t) A^{2k} u, A^{2k} u)_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &= \|A^k u^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \|\rho^{1/2}(t) A^{2k} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_0 u, \rho^{-1}(t) (-1)^k u^{(2k)})_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} &= ((-1)^k u^{(2k)}, \rho^{-1}(t) (-1)^k u^{(2k)})_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &\quad + (\rho(t) A^{2k} u, \rho^{-1}(t) (-1)^k u^{(2k)})_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &= \|\rho^{-1/2}(t) u^{(2k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \|A^k u^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \|A^k u^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 &= [(A^k u^{(k-1)}, A^k u^{(k)})_H - (A^k u^{(k-2)}, A^k u^{(k+1)})_H \\ &\quad + \dots + (-1)^{k-1} (A^k u, A^k u^{(2k-1)})_H]_0^{+\infty} \\ &\quad + (-1)^k \int_0^{+\infty} (A^k u, A^k u^{(2k)})_H dt = (-1)^k (A^{2k} u, u^{(2k)})_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}. \end{aligned}$$

Далее, складывая равенства (2.1) и (2.2) и учитывая неравенства из анализа, имеем

$$\begin{aligned} & \|\rho^{-1/2}(t)u^{(2k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 + \|\rho^{1/2}(t)A^{2k}u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 + 2\|A^k u^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 \\ &= (\mathcal{P}_0 u, A^{2k}u + \rho^{-1}(t)(-1)^k u^{(2k)})_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} \leq \frac{\alpha^{-1}}{2} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 \\ &+ \frac{1}{2} \|\rho^{1/2}(t)A^{2k}u + \rho^{-1/2}(t)(-1)^k u^{(2k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 = \frac{\alpha^{-1}}{2} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 \\ &+ \frac{1}{2} \|\rho^{1/2}(t)A^{2k}u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 + \frac{1}{2} \|\rho^{-1/2}(t)u^{(2k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 + \|A^k u^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тем самым, из неравенства (2.3) получаем справедливость леммы. Лемма доказана.

Из теоремы 1.1 следует, что норма $\|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}$ эквивалентна норме $\|u\|_{W_2^{2k}(\mathbb{R}_+;H)}$ в пространстве $\dot{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+;H)$ и как известно, операторы промежуточных производных

$$A^{2k-j} \frac{d^j}{dt^j} : \dot{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+;H) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+;H), \quad j = \overline{0, 2k-1},$$

непрерывны, поэтому нормы этих операторов можно оценить через $\|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}$, а именно, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $u(t) \in \dot{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+;H)$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\|A^{2k-j} u^{(j)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} \leq \gamma_j \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}, \quad j = \overline{0, 2k-1}, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \alpha^{-1}, & \gamma_j &= 2^{-j/k} \alpha^{-(2k-j)/2k}, & j &= \overline{1, k-1}, \\ \gamma_k &= 2^{-1} \alpha^{-1/2}, & \gamma_j &= 2^{((2k-j)/(2k))[(j-k)k-2]} \alpha^{-1/2} \beta^{(j-k)/(2k)}, & j &= \overline{k+1, 2k-1}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала применяя к левой части (2.1) неравенство Буняковского–Шварца, а в дальнейшем, неравенство Юнга, получаем

$$\begin{aligned} |(\mathcal{P}_0 u, A^{2k}u)_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}| &\leq \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} \|A^{2k}u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} \\ &\leq \alpha^{-1/2} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} \|\rho^{1/2}(t)A^{2k}u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \alpha^{-1} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\rho^{1/2}(t)A^{2k}u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Теперь выбирая $\varepsilon = 1/2$ в неравенстве (2.5) с учетом (2.1), находим

$$\|A^k u^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 \leq \frac{1}{4} \alpha^{-1} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 = \gamma_k^2 \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2.$$

С другой стороны, из (2.1) с учетом неравенства (2.5) имеем

$$\|A^k u^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 + \|\rho^{1/2}(t)A^{2k}u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 \leq \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} \|A^{2k}u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)},$$

откуда следует, что

$$\|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \|A^{2k} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \geq \|\rho^{1/2}(t) A^{2k} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \geq \alpha \|A^{2k} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2.$$

Тем самым, окончательно получаем

$$\|A^{2k} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \leq \alpha^{-1} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} = \gamma_0 \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}.$$

Далее, учитывая то, что $u(t) \in \overset{\circ}{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$, и принимая во внимание неравенство Буняковского–Шварца, находим систему следующих соотношений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|A^{2k-1} u'\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \leq \|A^{2k} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \|A^{2k-2} u''\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}, \\ \|A^{2k-2} u''\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \leq \|A^{2k-1} u'\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \|A^{2k-3} u'''\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}, \\ \dots\dots\dots \\ \|A^{k+1} u^{(k-1)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \leq \|A^{k+2} u^{(k-2)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \|A^k u^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Положим $r = 1, 2, \dots, k-1$,

$$l_1 = \frac{k-r}{k}, \quad l_j = j \cdot l_1, \quad j = 2, \dots, r, \\ l_{r+1} = \frac{r}{k}(k-r-1), \quad l_{r+2} = \frac{r}{k}(k-r-2), \quad \dots, \quad l_{k-1} = \frac{r}{k}$$

и возведем неравенство с номером q , $q = \overline{1, k-1}$, из системы (2.6) в l_q -ю степень, а затем перемножив полученные неравенства, имеем

$$\begin{aligned} \|A^{2k-r} u^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} &\leq \|A^{2k} u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^{(k-r)/k} \|A^k u^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^{r/k} \\ &\leq \alpha^{-(k-r)/k} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^{(k-r)/k} \cdot 2^{-r/k} \cdot \alpha^{-r/(2k)} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^{r/k} \\ &= 2^{-r/k} \cdot \alpha^{-(2k-r)/(2k)} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}. \end{aligned}$$

Тем самым, получаем

$$\|A^{2k-j} u^{(j)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \leq 2^{-j/k} \cdot \alpha^{-(2k-j)/(2k)} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} = \gamma_j \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}, \\ j = \overline{1, k-1}.$$

Теперь докажем справедливость оценок норм операторов промежуточных производных (2.4) при $j = \overline{k+1, 2k-1}$.

Простые операции вычислительного характера показывают, что для любого $\lambda > 0$ и для любого q , $k < q \leq 2k-1$, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| \frac{1}{\lambda} A^{2k-q-1} u^{(q+1)} + A^{2k-q} u^{(q)} + \lambda A^{2k-q+1} u^{(q-1)} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \|A^{2k-q-1} u^{(q+1)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \|A^{2k-q} u^{(q)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda^2 \|A^{2k-q+1}u^{(q-1)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 + \frac{2}{\lambda} \operatorname{Re}(A^{2k-q-1}u^{(q+1)}, A^{2k-q}u^{(q)})_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} \\
& + 2\lambda \operatorname{Re}(A^{2k-q}u^{(q)}, A^{2k-q+1}u^{(q-1)})_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} \\
& + 2 \operatorname{Re}(A^{2k-q-1}u^{(q+1)}, A^{2k-q+1}u^{(q-1)})_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} \\
& = \frac{1}{\lambda^2} \|A^{2k-q-1}u^{(q+1)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 + \|A^{2k-q}u^{(q)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 \\
& + \lambda^2 \|A^{2k-q+1}u^{(q-1)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 - \lambda \|A^{2k-q+1/2}u^{(q-1)}(0)\|_H^2 \\
& - \frac{1}{\lambda} \|A^{2k-q-1/2}u^{(q)}(0)\|_H^2 - 2 \operatorname{Re}(A^{2k-q-1/2}u^{(q)}(0), A^{2k-q+1/2}u^{(q-1)}(0))_H \\
& - 2 \|A^{2k-q}u^{(q)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 = \lambda^2 \|A^{2k-q+1}u^{(q-1)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 - \|A^{2k-q}u^{(q)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 \\
& + \frac{1}{\lambda^2} \|A^{2k-q-1}u^{(q+1)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 \\
& - \|\lambda^{1/2} A^{2k-q+1/2}u^{(q-1)}(0) + \lambda^{-1/2} A^{2k-q-1/2}u^{(q)}(0)\|_H^2.
\end{aligned}$$

А отсюда вытекает, что

$$\|A^{2k-q}u^{(q)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 \leq \lambda^2 \|A^{2k-q+1}u^{(q-1)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 + \frac{1}{\lambda^2} \|A^{2k-q-1}u^{(q+1)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2. \quad (2.7)$$

Далее, выбирая

$$\lambda = \|A^{2k-q-1}u^{(q+1)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^{1/2} \|A^{2k-q+1}u^{(q-1)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^{-1/2}$$

в неравенстве (2.7), имеем

$$\|A^{2k-q}u^{(q)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^2 \leq 2 \|A^{2k-q+1}u^{(q-1)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} \|A^{2k-q-1}u^{(q+1)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}, \quad (2.8)$$

$$q = \overline{k+1, 2k-1}.$$

Аналогично, повторяя вышеприведенные рассуждения в системе неравенств (2.8), и далее, используя лемму 2.1, получаем

$$\begin{aligned}
\|A^{2k-q}u^{(q)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} & \leq 2^{(q-k)(2k-q)/2} \|A^k u^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^{(2k-q)/k} \|u^{(2k)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^{(q-k)/k} \\
& \leq 2^{(q-k)(2k-q)/2} \cdot 2^{-(2k-q)/k} \cdot \alpha^{-(2k-q)/(2k)} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^{(2k-q)/k} \\
& \quad \times \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{(q-k)/(2k)} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}^{(q-k)/k} \\
& = 2^{((2k-q)/(2k))[(q-k)k-2]} \cdot \alpha^{-1/2} \cdot \beta^{(q-k)/(2k)} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\|A^{2k-j}u^{(j)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} & \leq 2^{(2k-j)/(2k)} [(j-k)k-2] \cdot \alpha^{-1/2} \cdot \beta^{(j-k)/(2k)} \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)} \\
& = \gamma_j \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}, \quad j = \overline{k+1, 2k-1}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

3. Теорема разрешимости краевой задачи (0.1), (0.2) и некоторые замечания. В этом пункте получен основной результат работы, т.е. находятся условия, налагаемые только на операторные коэффициенты уравнения (0.1), которые обеспечивают существование единственного регулярного решения краевой задачи (0.1), (0.2).

А именно, справедлива следующая основная

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть операторы

$$K_j(t) = A_j(t)A^{-j}, \quad j = \overline{1, 2k},$$

ограничены в H и выполняется неравенство

$$\tau = \sum_{j=1}^{2k} \mu_j \sup_t \|K_j(t)\|_{H \rightarrow H} < 1,$$

где числа $\mu_j = \gamma_{2k-j}$, $j = \overline{1, 2k}$, определяются из теоремы 2.1. Тогда краевая задача (0.1), (0.2) при любом $f(t)$ из пространства $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ имеет единственное регулярное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим краевую задачу (0.1), (0.2) в виде следующего операторного уравнения:

$$\mathcal{P}_0 u(t) + (\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)u(t) = f(t),$$

где

$$f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H), \quad u(t) \in \mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H).$$

Из теоремы 1.1 следует, что у оператора $\mathcal{P}_0$ существует ограниченный обратный оператор $\mathcal{P}_0^{-1}$, действующий из пространства $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ на пространство $\mathring{W}_2^{2k}(\mathbb{R}_+; H)$. Тогда после замены $u(t) = \mathcal{P}_0^{-1}v(t)$, где $v(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$, имеем следующее уравнение в $L_2(\mathbb{R}_+; H)$:

$$(E + (\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)\mathcal{P}_0^{-1})v(t) = f(t).$$

Теперь покажем, что при справедливости условий теоремы норма оператора $(\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)\mathcal{P}_0^{-1}$ меньше единицы.

Действительно, используя теорему 2.1, находим

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)\mathcal{P}_0^{-1}v\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+; H)} &= \|(\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{2k} A_j(t)u^{(2k-j)} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \leq \sum_{j=1}^{2k} \|A_j(t)u^{(2k-j)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{2k} \sup_t \|K_j(t)\|_{H \rightarrow H} \|A^j u^{(2k-j)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{2k} \sup_t \|K_j(t)\|_{H \rightarrow H} \cdot \mu_j \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &= \sum_{j=1}^{2k} \mu_j \sup_t \|K_j(t)\|_{H \rightarrow H} \|v\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} = \tau \|v\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}. \end{aligned}$$

Тем самым, получим

$$\|(\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)\mathcal{P}_0^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+; H)} \leq \tau < 1.$$

Поэтому при справедливости этого неравенства оператор $E + (\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)\mathcal{P}_0^{-1}$ имеет обратный в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ и можно определить $u(t)$ следующей формулой:

$$u(t) = \mathcal{P}_0^{-1}(E + (\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)\mathcal{P}_0^{-1})^{-1}f(t).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если в уравнении (0.1) $k = 1$, $A_j(t) \equiv A_j$, $j = 1, 2$, то полученные результаты совпадают с результатами из [13], [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Условия $\inf_t \rho(t) = \alpha$, $\sup_t \rho(t) = \beta$ не принципиальны, т.е. числа α и β можно поменять местами.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Аналогичным образом можно провести исследования краевой задачи (0.1), (0.2) и получить соответствующие результаты для нее в случае функции $\rho(t)$ вида (0.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Если принять функцию $\rho(t) \equiv 1$, $t \in \mathbb{R}_+$, и сравнить результаты данной статьи с результатами работы [9], то можно усмотреть, что они совпадают.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Указанные условия в теореме 3.1 являются неулучшаемыми в терминах операторных коэффициентов.

Последнее замечание означает, что существуют операторы $A_j(t)$, $j = \overline{1, 2k}$, для которых если не выполняется алгебраическое неравенство, участвующее в условии теоремы 3.1, то задача (0.1), (0.2) не является корректной, и даже уравнение (0.1) не является эллиптическим. В частности, если в уравнении (0.1) взять все $A_j(t) = 0$ при $j \neq k$, а $A_k(t) = 2\alpha^{1/2}A^k e^{i\pi(3k+2)/2}$, то уравнение (0.1) на отрезке $[0; T]$ превратится в уравнение

$$(-1)^k u^{(2k)}(t) + \alpha A^{2k} u(t) + 2\alpha^{1/2} A^k e^{i\pi(3k+2)/2} u^{(k)}(t) = f(t),$$

для которого корни характеристического уравнения

$$(-1)^k \theta^{2k} + \alpha \sigma^{2k} + 2\alpha^{1/2} \sigma^k e^{i\pi(3k+2)/2} \theta^k = 0,$$

где $\sigma \in \sigma(A)$ – спектр оператора A , $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, лежат на мнимой оси, т.е. уравнение (0.1) становится не эллиптическим [7], и в этом случае задача (0.1), (0.2) не корректна.

Автор выражает глубокую благодарность профессору С.С. Мирзоеву за обсуждение настоящей работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
- [2] Agmon S., Nirenberg L. Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space // Comm. Pure Appl. Math. 1963. V. 16. P. 121–239.

- [3] Гасымов М. Г. К теории полиномиальных операторных пучков // Докл. АН СССР. 1971. Т. 199. № 4. С. 747–750.
- [4] Гасымов М. Г. О кратной полноте части собственных и присоединенных векторов полиномиальных операторных пучков // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. 1971. Т. 6. № 2–3. С. 131–147.
- [5] Мирзоев С. С. О кратной полноте корневых векторов полиномиальных операторных пучков, отвечающих краевым задачам на полуоси // Функцион. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. № 2. С. 84–85.
- [6] Мирзоев С. С. Условия корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 2. С. 292–295.
- [7] Дубинский Ю. А. О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка // Матем. сб. 1973. Т. 90 (132). № 1. С. 3–22.
- [8] Шкаликов А. А. Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними // Тр. семинара И. Г. Петровского. 1989. № 14. С. 140–224.
- [9] Мирзоев С. С. Вопросы теории разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними. Дисс. . . . д.ф.-м.н. Баку: БГУ, 1994.
- [10] Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: ЭЛМ, 1985.
- [11] Олейник О. А. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25. № 1–3. С. 3–20.
- [12] Гирсанов И. В. О решении некоторых краевых задач для параболических и эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135. № 6. С. 1311–1313.
- [13] Мирзоев С. С., Алиев А. Р. Об одной краевой задаче для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка с разрывным коэффициентом // Тр. института матем. и мех. АН Азерб. 1997. Т. 7 (15). С. 18–25.
- [14] Алиев А. Р. О корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений с разрывным коэффициентом. Дисс. . . . к.ф.-м.н. Баку: БГУ, 1998.

Бакинский государственный университет
E-mail: alievaraz@yahoo.com

Поступило
10.10.2000
Исправленный вариант
20.03.2002