Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. М. Насибов, Об одном неравенстве типа Трудин-
гера и его применении к одному нелинейному уравне-
нию Шрёдингера, *Матем. заметки*, 2006, том 80, вы-
пуск 5, 786–789

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3090>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 17:45:13

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА ТРУДИНГЕРА И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К ОДНОМУ НЕЛИНЕЙНОМУ УРАВНЕНИЮ ШРЁДИНГЕРА

Ш. М. Насибов

В настоящей заметке доказывается одно неравенство типа Трудингера и оно применяется к исследованию вопроса единственности первой начально-краевой задачи для одного нелинейного эволюционного уравнения Шрёдингера.

1. Введение, обозначения и результаты. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная или неограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим для нелинейного эволюционного уравнения Шрёдингера следующую начально-краевую задачу:

$$iu_t + \Delta u = g|u|^p u, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

Здесь $g \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$, $\rho \in \mathbb{R}_+$ – параметры уравнения (1), u_0 – заданная на Ω функция.

Уравнение (1) возникает в различных разделах математической физики и интенсивно исследуется в научной литературе: задача (1)–(3) исследована в [1]–[5] и др., а задача Коши для уравнения (1) изучена в [6], [7] и др.

Обозначения: $\dot{H}^1(\Omega) \equiv \dot{W}_2^1(\Omega)$ – пространство Соболева, $\|\cdot\|_p$, $p \geq 1$, – норма в $L^p(\Omega)$, $\|\cdot\|$ – норма в $L^2(\Omega)$. Далее будем придерживаться стандартных обозначений, принятыми в книге [8].

Под *слабым глобальным обобщенным решением* задачи (1)–(3) понимается следующее: функция $u \in C([0, T]; H^{-1}) \cap L^\infty([0, T]; \dot{H}^1(\Omega))$ удовлетворяет (1)–(3) в смысле распределения при $\forall T > 0$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1 (о глобальном существовании). А) Пусть $g < 0$, $\rho \in (0, 2)$, $u_0 \in \dot{H}^1(\Omega)$. Тогда задача (1)–(3) имеет слабое глобальное решение.

Б) Пусть $g < 0$, $\rho = 2$. Далее, предположим, что начальная функция $u_0 \in \dot{H}^1(\Omega)$ такова, что для нее выполняется условие

$$|g| \cdot \|u_0\|^2 < \|\psi_0\|^2, \quad (4)$$

где ψ_0 – радиально-симметричная функция, $\psi_0 = \psi_0(r)$, $r = |x|$, которая является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dr^2} \psi_0(r) + \frac{1}{r} \frac{d\psi_0}{dr} - \psi_0 + \psi_0^3 = 0, & 0 < r < \infty, \\ \psi_0'(0) = 0, \quad \psi_0(\infty) = 0, \quad \psi_0(r) \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap C^2([0, \infty)). \end{cases} \quad (5)$$

Тогда задача (1)–(3) имеет слабое глобальное решение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $g > 0$ задача (1)–(3) имеет слабое глобальное решение $\forall u_0 \in \dot{H}^1(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вопрос единственности задачи (5) исследован в [9], [10].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Доказательство части А) теоремы 1 содержится в [2], а части Б) – в [4].

Мы привели ее здесь для удобства изложения.

Для доказательства единственности слабого решения задачи (1)–(3) сначала установим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная или неограниченная область. Пусть $u(x)$ – любая функция из пространства $\dot{H}^1(\Omega)$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\int_{\Omega} \left[\exp \left(\theta \frac{|u|^2}{\|\nabla u\|^2} \right) - 1 \right] dx \leq C_T \frac{\|u\|^2}{\|\nabla u\|^2}, \quad (6)$$

где

$$0 < \theta < \frac{4\pi}{e}, \quad C_T = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^m}{m!} \frac{1}{\pi^{m-1}} \frac{m^{3m-2}}{(2m-1)^{2m-1}}.$$

ТЕОРЕМА 3. Слабое глобальное решение задачи (1)–(3) единственно.

Сделаем некоторые замечания. Когда Ω – ограниченная область, Трудингер доказал [11], что существуют определенные постоянные K_1 и K_2 , не зависящие от u и Ω , такие, что

$$\int_{\Omega} \exp \left(\frac{|u|^2}{K_1 \|\nabla u\|^2} \right) dx \leq K_2 |\Omega| \quad \forall u_0 \in \dot{H}^1(\Omega). \quad (7)$$

Когда Ω – ограниченная область, из неравенства (6) и неравенства Пуанкаре $\|u\| \leq \frac{1}{\pi} |\Omega| \cdot \|\nabla u\|^2$ следует (7).

Теорема единственности для задачи (1)–(3) в случае ограниченной области рассмотрена М. В. Владимировым [1], а для задачи Коши для уравнения (1) рассмотрена в работе [7].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из результатов работы [5] следует, что $\forall u(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ при $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ справедливо следующее интерполяционное неравенство:

$$\|u\|_{\gamma+2} \leq [k(\gamma)]^{1/(\gamma+2)} \|\nabla u\|^{\gamma/(\gamma+2)} \|u\|^{2/(\gamma+2)} \quad \forall \gamma > 0, \quad (8)$$

где

$$k(\gamma) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^\gamma} \left(\frac{\gamma+2}{2} \right)^{(\gamma+2)/2} \frac{(\gamma+2)^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}.$$

Полагая $\gamma = 2m - 2$, $m = 1, 2, 3, \dots$, в (8), имеем

$$\|u\|_{2m}^{2m} \leq K_m \|\nabla u\|^{2m} \frac{\|u\|^2}{\|\nabla u\|^2}, \quad \text{где} \quad K_m = \frac{1}{\pi^{m-1}} \frac{m^{3m-2}}{(2m-1)^{2m-1}}.$$

Отсюда

$$\int_{\Omega} \left(\frac{|u|^2}{\|\nabla u\|^2} \right)^m dx \leq K_m \frac{\|u\|^2}{\|\nabla u\|^2}. \quad (9)$$

Суммируя (9) по $m = 1, 2, \dots, N$, получаем

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{m=1}^N \frac{\theta^m}{m!} \left(\frac{|u|^2}{\|\nabla u\|^2} \right)^m \right] dx \leq \left(\sum_{m=1}^N \frac{\theta^m K_m}{m!} \right) \frac{\|u\|^2}{\|\nabla u\|^2}. \quad (10)$$

Требуемая оценка (6) следует из (10) в силу теоремы о монотонной сходимости $\forall u_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, так как ряд в правой части (10) сходится при $0 < \theta < 4\pi/e$. Далее стандартный метод аппроксимации обеспечивает (6) для любой $u \in \dot{H}^1(\Omega)$.

2. Доказательство теоремы 3. Сначала заметим, что любое слабое решение задачи (1)–(3) сохраняет его норму в L_2 , а нормы в $H^1(\Omega)$ и $L^{\gamma+2}(\Omega)$ $\forall \gamma \geq 0$ равномерно ограничены $\forall t \in [0, T]$, $\forall T > 0$. Пусть u_1 и u_2 являются двумя различными слабыми глобальными решениями задачи (1)–(3). Положим $v = u_1 - u_2$. Тогда v удовлетворяет уравнению

$$iv_t + \Delta v = |u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2 \quad \text{в } H^{-1}. \quad (11)$$

Умножая (11) скалярно на $\bar{v}$, учитывая, что $2 \operatorname{Re}(v_t, v) = \frac{d}{dt} \|v\|^2$ п.в., беря мнимые части левой и правой частей полученного соотношения, имеем

$$\frac{d}{dt} \|v\|^2 \leq c \operatorname{Im} \int_{\Omega} \max(|u_1|^\rho, |u_2|^\rho) |v|^2 dx. \quad (12)$$

Полагая $\max(|u_1|^\rho, |u_2|^\rho) = \Phi$, $\|v\|^2 = y$, перепишем (12) в следующем виде:

$$\frac{dy}{dt} \leq c \int_{\Omega} \Phi |v|^{2\varepsilon} |v|^{2(1-\varepsilon)} dx \quad \forall \varepsilon \in (0, 1). \quad (13)$$

Отсюда, применяя неравенство Гёльдера для интегралов, имеем

$$\frac{dy}{dt} \leq c f_\varepsilon^\varepsilon(t) y^{1-\varepsilon}, \quad \text{где } f_\varepsilon = \int_{\Omega} \Phi^{1/\varepsilon} |v|^2 dx. \quad (14)$$

Из (14) следует, что $y^{\varepsilon-1} dy \leq c f_\varepsilon^\varepsilon(t) dt$, откуда

$$\int_0^y dy^\varepsilon \leq c\varepsilon \int_0^t f_\varepsilon^\varepsilon(\tau) d\tau, \quad y^\varepsilon(t) \leq c\varepsilon \int_0^t f_\varepsilon^\varepsilon(\tau) d\tau \leq (c\varepsilon t) \left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} f_\varepsilon(\tau) \right]^\varepsilon$$

или

$$y(t) \leq (c\varepsilon t)^{1/\varepsilon} \sup_{0 \leq \tau \leq t} f_\varepsilon(\tau). \quad (15)$$

Согласно неравенству Коши–Буняковского имеем

$$f_\varepsilon(\tau) \leq \left(\int_{\Omega} \Phi^{2/\varepsilon} dx \right)^{1/2} \|v\|_4, \quad (16)$$

где

$$\int_{\Omega} \Phi^{2/\varepsilon} \leq \int_{\Omega} |u_1|^{2\rho/\varepsilon} dx + \int_{\Omega} |u_2|^{2\rho/\varepsilon} dx. \quad (17)$$

В силу элементарного неравенства $a^p \leq p^p(e^a - 1) \quad \forall a \geq 0, p \geq 1$, получаем

$$|v_k|^{2\rho/\varepsilon} = \|\nabla v_k\|^{2\rho/\varepsilon} \left(\frac{|v_k|^2}{\|\nabla v_k^2\|^2} \right)^{\rho/\varepsilon} \leq \|\nabla v_k\|^{2\rho/\varepsilon} \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right)^{\rho/\varepsilon} \left[\exp \left(\frac{|v_k|^2}{\|\nabla v_k\|^2} \right) - 1 \right], \quad k = 1, 2.$$

В приведенных ниже оценках положим $\|\nabla v\| \leq C_g$, $\|v\|_4 \leq C_4$, $\|v\| \leq C_2$. Отсюда в силу неравенства (6) с $\theta = 1$

$$\int_{\Omega} |u_k|^{2\rho/\varepsilon} dx \leq C_T \|\nabla u_k\|^{2(\rho-\varepsilon)/\varepsilon} \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right)^{\rho/\varepsilon} \|u_k\|^2 \leq C_T \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right)^{\rho/\varepsilon} C_g^2 C_g^{2(\rho-\varepsilon)/\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in (0, \rho).$$

Стало быть,

$$\left(\int_{\Omega} \Phi^{2/\varepsilon} dx \right)^{1/2} \leq \sqrt{2C_T} \frac{C_2}{C_g} C_g^{\rho/\varepsilon} \varepsilon^{\rho/(2\varepsilon)}. \quad (18)$$

Из (15)–(18) имеем

$$y(t) \leq \frac{C_4 \sqrt{2C_T} C_2}{C_g} (C_1 C_g^\rho t)^{1/\varepsilon} \varepsilon^{(2-\rho)/(2\varepsilon)}. \quad (19)$$

Соотношение (19) получено $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_m = \min(1, \rho)$. Пусть ρ фиксировано и меньше 2. Тогда, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0+$ в (19), получим, что $\forall t \in [0, T]$, $\forall T > 0$ $y(t) \equiv 0$, т.е. $u_1 \equiv u_2$. Теперь пусть $\rho = 2$. Полагая $t_0 C_1 C_g^\rho < 1$ и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0+$ в (19), заключаем, что $u_1 \equiv u_2 \quad \forall t \in [0, t_0]$. Повторяя эту процедуру, получаем, что $u_1 \equiv u_2$ для всех $t \in [0, T]$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] М. В. Владимиров, *Матем. сб.*, **130 (172)**:4 (8) (1986), 520–536. [2] Ш. М. Насибов, *Дифференц. уравнения*, **6**:4 (1980), 660–670. [3] Ш. М. Насибов, *Докл. АН СССР*, **304**:2 (1989), 285–289. [4] Ш. М. Насибов, *Докл. РАН*, **392**:4 (2003), 457–461. [5] Ш. М. Насибов, *Докл. АН СССР*, **307**:3 (1989), 538–542. [6] Ш. М. Насибов, *Докл. АН СССР*, **285**:4 (1985), 807–811. [7] J. Ginibre, G. Velo, *J. Funct. Anal.*, **32** (1979), 1–32. [8] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972. [9] К. Mcleod, J. Serrin, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **78**:11 (1981), 6592–6595. [10] К. Mcleod, J. Serrin, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **99** (1987), 115–145. [11] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.

Ш. М. Насибов

Институт прикладной математики
Бакинского государственного университета
E-mail: nasibov_sharif@hotmail.com

Поступило

22.02.2006