Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Кощеев, Связность по Власову–Вулберту множеств в гильбертовом пространстве, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 5, 790–792

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3091>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:44:11

СВЯЗНОСТЬ ПО ВЛАСОВУ–ВУЛБЕРТУ МНОЖЕСТВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. А. Кощев

Пусть X – гильбертово пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Для $x \in X$, $M \subset X$, $M \neq \emptyset$

$$d(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|, \quad P_M x = \{y \in M : \|x - y\| = d(x, M)\}$$

означают расстояние от x до множества M и множество ближайших к x элементов из M соответственно.

Для $x \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ множества

$$V(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| \leq r\}, \quad \dot{V}(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| < r\}$$

называют *замкнутым* и *открытым шарами* с центром x и радиусом r соответственно,

$$\mathbb{S}(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| = r\} = V(x, r) \setminus \dot{V}(x, r)$$

– сфера с теми же центром и радиусом. Замкнутый шар может быть обозначен и одним символом. Для шара, обозначенного B , $\dot{B}$ означает открытый шар с теми же центром и радиусом.

Пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, L – аффинное подпространство из X , $\text{codim } L = k$, $x \in L$. Множество $\{y \in L : \|x - y\| < r\} \subset L$ будем называть *диск*м коразмерности k и обозначать $D(x, r) = D_L(x, r)$. Замыкание $\bar{D}(x, r) = \text{cl } D(x, r)$ называем *замкнутым диск*ом коразмерности k , а

$$\text{Fr}_L D(x, r) = \{y \in L : \|x - y\| = r\} = \overline{D(x, r)} \setminus D(x, r)$$

– *границей диска* относительно L . Шары пространства X при таком определении являются дисками коразмерности $k = 0$.

Рассмотрим семейства замкнутых множеств $M \subset X$:

- $(U) = \{M \subset X : \forall x \in X \ P_M x \text{ одноточечно или пусто}\};$
- $(T) = \{M \subset X : \forall x \in X \ P_M x \text{ непусто и одноточечно}\};$
- $(P_0) = \{M \subset X : \forall x \in X \ P_M x \text{ пусто или связно}\};$
- $(P) = \{M \subset X : \forall x \in X \ P_M x \text{ непусто и связно}\};$
- $(\dot{V}) = \{M \subset X : \forall x \in X, \forall r > 0 \ \dot{V}(x, r) \cap M \text{ пусто или связно}\};$
- $(V) = \{M \subset X : \forall x \in X, \forall r > 0 \ V(x, r) \cap M \text{ пусто или связно}\}.$

Множества из этих семейств имеют следующие названия:

- $M \in (U)$ – множество единственности;
- $M \in (T)$ – чебышевское множество;
- $M \in (P_0)$ – P_0 -связное множество;
- $M \in (P)$ – P -связное множество;
- $M \in (\dot{V})$ – $\dot{V}$ -связное множество;
- $M \in (V)$ – V -связное множество.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00949, и программы Государственной поддержки “Ведущие научные школы”, грант № НШ-5120.2006.1.

Соотношения между этими семействами рассматривались в [1]–[3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Множество $M \subset X$ назовем $\check{V}_k$ -связным (V_k -связным), если для любого диска $D = D(x, r)$, $\text{codim } D = k$, множество $D \cap M$ ($\bar{D} \cap M$ соответственно) пусто или связно. $\check{V}_k$ -связные множества называем *связными по Власову–Вулберту* в коразмерности k . При $k = 0$ нижний индекс опускается.

Имеют место включения

$$(V) \subset (\check{V}), \quad (V_k) \subset (\check{V}_k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Доказательство первого из них можно найти в [1]; второе включение, означающее, что всякое V_k -связное множество $\check{V}_k$ -связно, доказывается аналогично.

Отметим также одно легко доказываемое равенство для $\check{V}_k$ -связных множеств. Для любых $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\check{V}_k$ -связного замкнутого множества $M \subset X$ и диска D , $\text{codim } D = k$,

$$\text{cl}(M \cap D) = M \cap \bar{D}$$

при условии, что $M \cap D \neq \emptyset$.

Понятие $\check{V}$ -связности ввел Д. Вулберт [4]. Один из сильнейших результатов для чебышевских множеств был получен Л. П. Власовым [1; теорема 4.2].

ТЕОРЕМА 1 (Л. П. Власов). *В равномерно выпуклом банаховом пространстве Y каждое P_0 -связное множество V -связно. В частности, в гильбертовом пространстве всякое чебышевское множество и всякое множество единственности V -связно.*

В настоящей работе рассматриваются множества единственности из X и доказывается их связность по Власову–Вулберту в любой конечной коразмерности.

ЗАМЕЧАНИЕ. В авторской формулировке теоремы 1 вместо P_0 -связности фигурирует P -связность и нет упоминания о множествах единственности. Однако при ее доказательстве Власов не использует свойство существования элемента наилучшего приближения для $y \in Y$. Это обстоятельство было замечено И. Г. Царьковым [3], который утверждения теоремы 1 распространил на более широкие классы пространств по сравнению с равномерно выпуклыми.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть M – замкнутое множество единственности с ограниченным дополнением в вещественном гильбертовом пространстве X , $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любого диска $D \subset X$, $\text{codim } D = k$, множество $M \cap \bar{D}$ связно или пусто. Если $M \cap D = \emptyset$, то $M \cap \bar{D}$ пусто или одноточечно.*

Другими словами, M V_k -связно (а следовательно, и $\check{V}_k$ -связно) и для любого аффинного подпространства $L \subset X$, $\text{codim } L = k$, $M \cap L$ является множеством единственности как относительно L , так и относительно X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулируя доказываемую теорему для коразмерности $k = 0$, получаем теорему 1 для множества единственности в гильбертовом пространстве.

Предположим, что теорема 2 верна для всех $k \leq n$. Покажем, что она верна и для $k = n + 1$.

Сначала докажем, что для любого аффинного подпространства $L \subset X$, $\text{codim } L = n + 1$, $M \cap L$ является множеством единственности относительно L . Предположим противное: найдутся $L' \subset X$, $\text{codim } L' = n + 1$, и диск $D = D_{L'}(x, r) \subset L'$, $\text{codim } D = n + 1$, такие, что $M \cap D = \emptyset$, а $M \cap \bar{D}$ содержит, по крайней мере, две точки a, b , $a \neq b$.

Рассмотрим аффинное подпространство $K \subset X$, $\text{codim } K = n$, $L' \subset K$, и прямую $l \subset K$, ортогональную L' и проходящую через x . Не ограничивая общности доказательства, можно считать, что $x = 0$ и L', K являются линейными подпространствами X .

Множество L' является гиперплоскостью в K и разделяет K на два открытых в K полупространства K_1, K_2 . Рассмотрим диск $G = D_K(0, r) \subset K$ с теми же центром и радиусом, что и у D , $\text{codim } G = n$. Очевидно, $G \cap M \neq \emptyset$, иначе $a, b \in \bar{D} \subset \bar{G}$, что

противоречит индуктивному предположению о том, что $M \cap K$ является множеством единственности относительно K . По теореме 1, примененной к пространству K и множеству единственности $M \cap K$, с учетом (1) пересечение $M \cap K$ с диском G связно. Диск D разделяет диск G на два выпуклых и открытых относительно K множества $K_1 \cap G$ и $K_2 \cap G$, ибо $D \subset G$, $\text{Fr}_L D \subset \text{Fr}_K G$. Так как $D \cap M = \emptyset$, связное множество $G \cap M$ содержится в одном из двух множеств $G \cap K_1$ или $G \cap K_2$. Пусть, для определенности, $G \cap M \subset G \cap K_1$. Положим

$$y = (\overline{G} \setminus G) \cap l \cap K_2, \quad y_t = ty, \quad t \geq 0.$$

Рассмотрим диски

$$G_t = D_K(y_t, r_t), \quad r_t^2 = \|y_t\|^2 + r^2, \quad t \geq 0.$$

Очевидно $D \subset G_t$, $a, b \in \overline{D} \setminus D \subset \overline{G_t} \setminus G_t$ для любого $t \geq 0$. Кроме того, при всех $t \geq 0$ $G_t \cap M \neq \emptyset$, так как иначе, как и в случае $t = 0$, получим противоречие с индуктивным предположением о том, что $M \cap K$ является множеством единственности относительно K . Диск D разделяет каждый из дисков G_t , $G_t \cap M$ связно и $D \cap M = \emptyset$; поэтому для любого $t \geq 0$ либо

$$M \cap G_t \subset G_t \cap K_1, \quad M \cap G_t \cap K_2 = \emptyset,$$

либо

$$M \cap G_t \subset G_t \cap K_2, \quad M \cap G_t \cap K_1 = \emptyset. \quad (2)$$

Напомним, что при $t = 0$ мы выбрали для определенности случай

$$M \cap G_0 = M \cap G \subset G \cap K_1 = G_0 \cap K_1.$$

Проверим монотонность по включению семейства множеств $\{G_t \cap K_i\}_{t \geq 0}$, $i = 1, 2$, по параметру t , т.е. для $t_1 < t_2$

$$G_{t_2} \cap K_1 \subset G_{t_1} \cap K_1, \quad G_{t_1} \cap K_2 \subset G_{t_2} \cap K_2. \quad (3)$$

В самом деле, пусть $u \in G_{t_2} \cap K_1$, $v \in G_{t_1} \cap K_2$. Так как $(u, y) < 0$, $(v, y) > 0$, имеем

$$\begin{aligned} \|u - t_1 y\|^2 &\leq r_{t_2}^2 + (t_1^2 - t_2^2)\|y\|^2 + 2(t_2 - t_1)(u, y) = r_{t_1}^2 + 2(t_2 - t_1)(u, y) < r_{t_1}^2, \\ \|v - t_2 y\|^2 &\leq r_{t_1}^2 + (t_2^2 - t_1^2)\|y\|^2 + 2(t_1 - t_2)(v, y) = r_{t_2}^2 + 2(t_1 - t_2)(v, y) < r_{t_2}^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим множества

$$A = \{t \geq 0 : G_t \cap K_1 \cap M \neq \emptyset\} \subset \mathbb{R}, \quad B = \{t \geq 0 : G_t \cap K_2 \cap M \neq \emptyset\} \subset \mathbb{R}.$$

Множество $A \neq \emptyset$, так как $0 \in A$. Из условия теоремы об ограниченности дополнения $X \setminus M$ следует, что $B \neq \emptyset$. В силу (2) $A \cap B = \emptyset$. Из монотонности (3) имеем

$$t^* = \sup_{t \in A} t \leq \inf_{t \in B} t < \infty.$$

Диски G_t открыты в K , поэтому $t^* \notin A \cup B$; следовательно, $G_{t^*} \cap M = \emptyset$, но это противоречит индуктивному предположению о том, что $K \cap M$ – множество единственности в K , так как $a, b \in M \cap \overline{G_{t^*}}$.

Для доказательства V_k -связности M при $k = n+1$ остается воспользоваться теоремой 1 применительно к подпространству $L \subset X$, $\text{codim } L = n+1$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. П. Власов, *УМН*, **28:6** (1973), 3–66. [2] В. С. Балаганский, Л. П. Власов, *УМН*, **51:6** (1996), 125–188. [3] И. Г. Царьков, *Матем. заметки*, **40:2** (1986), 174–196. [4] D. E. Wulbert, *Continuity of metric projections. Approximation theory in a normed linear lattice*, Thesis, Univ. Texas Comp. Center. Austin, 1966.

В. А. Кошечев

Институт математики и механики

УрО РАН, г. Екатеринбург

E-mail: viktor.koshcheev@imm.uran.ru

Поступило

16.05.2006