Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Малыхин, Оценки тригонометрических сумм по модулю p^r , *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 5, 793–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3092>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:24:18

ОЦЕНКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ ПО МОДУЛЮ p^r

Ю. В. Малыхин

Для натурального q через $\mathbb{Z}_q$ мы будем обозначать кольцо вычетов по модулю q , а через $\mathbb{Z}_q^*$ – мультипликативную группу этого кольца. Для $x \in \mathbb{Z}_q$ обозначим $e_q(x) := e^{2\pi i x/q}$.

Пусть G – подгруппа $\mathbb{Z}_q^*$ порядка t , $a \in \mathbb{Z}_q$. Тригонометрическими суммами по подгруппе G называются суммы вида $S(a, G) := \sum_{x \in G} e_q(ax)$. Наша задача будет состоять в оценке величины

$$S(G) := \max_{a \in \mathbb{Z}_q^*} |S(a, G)|$$

в случае, когда q есть степень простого числа: $q = p^r$ (здесь и далее p обозначает простое число, большее 2).

При достаточно больших t оценки тригонометрических сумм по подгруппам $G \subset \mathbb{Z}_q^*$ основаны на оценке величин

$$T_k(G) := \#\{(x_1, \dots, x_{2k}) : x_1 + \dots + x_k = x_{k+1} + \dots + x_{2k} \pmod{q}, x_i \in G\}.$$

Имеет место

ЛЕММА (основное неравенство). Для любых натуральных k и l

$$S(G) \leq (qT_k(G)T_l(G))^{1/(2kl)} t^{1-1/k-1/l}.$$

Оценки такого типа установлены И. М. Виноградовым (метод “сглаживания”) при оценках тригонометрических сумм Г. Вейля (см. [1]–[3]). Подобные неравенства содержатся также в [4]–[6]. Неравенство леммы является специальным вариантом упомянутых и доказано в книге С. В. Конягина и И. Е. Шпарлинского [7].

Рассмотрим простое p и натуральное r . Можно показать, что если $G \subset \mathbb{Z}_{p^r}^*$ и $p \nmid \#G$, то $S(G) = 0$. Поэтому нам достаточно рассмотреть случай $\#G \mid p-1$. Итак, пусть $t \mid p-1$. Для каждого натурального r существует единственная подгруппа $G_r \subset \mathbb{Z}_{p^r}^*$ порядка t . Классический случай простого модуля, т.е. $r = 1$, достаточно полно исследован. Современные оценки см. в [8], [9]. Случай $r = 2$ рассмотрен в [10]. В данной работе мы получим оценки для величины $S(G_r)$ для всех $r \geq 3$ с помощью оценок для $T_k(G_2)$ и $S(G_2)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $T_n(G_2) \leq Ap^{-2}t^{2n}$. Тогда при $r \geq 3$

$$S(G_r) \leq C(A, r)tp^{-\delta_{r,n}}, \quad \text{где} \quad \delta_{r,n} = \frac{1}{2n^2(n+1)^{r-3}}, \quad (1)$$

для некоторой функции C .

Число n находится с помощью следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. (i) Пусть $S(G_1) \leq S_1 < t$, $S(G_2) \leq S_2 < t$, $A > 0$. Тогда при

$$n = \max\left(1, \left\lceil \frac{\frac{1}{2} \ln(pt) - 2 \ln S_1 - \ln A}{\ln t - \ln S_1} \right\rceil, \left\lceil \frac{\frac{1}{2} \ln(p^2t) - 2 \ln S_2 - \ln A}{\ln t - \ln S_2} \right\rceil\right) \quad (2)$$

выполняется неравенство $T_n(G_2) \leq (2A+1)p^{-2}t^{2n}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00066, и программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-3004.2003.1.

(ii) Если дополнительно известно, что $T_2(G_2) \leq T$, то можно взять

$$n = \max \left(2, \left\lceil \frac{1}{2} \frac{\ln(pt) - 2 \ln S_1 - \ln A}{\ln t - \ln S_1} \right\rceil, \left\lceil \frac{1}{2} \frac{\ln(p^2 T) - 4 \ln S_2 - \ln A}{\ln t - \ln S_2} \right\rceil \right). \quad (3)$$

Из этих теорем вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. При $(a, p) = 1$, $r \geq 3$ имеем $|\sum_{x=1}^{p-1} e_{p^r}(ax^{p^{r-1}})| \leq C(r)p^{1-1/(32 \cdot 5^{r-3})}$.

Для доказательства теорем нам потребуются несколько лемм.

ЛЕММА 1. Если $r > s$, то $T_k(G_r) \leq T_k(G_s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать лемму в случае $r = s + 1$. Покажем, что гомоморфизм $\text{mod } p^s: \mathbb{Z}_{p^{s+1}} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^s}$ переводит G_{s+1} в G_s , притом взаимно однозначно. Пусть $d = (p-1)/t$. Тогда $G_{s+1} = \{x^{p^s d}: x \in \mathbb{Z}_{p^{s+1}}^*\}$. Поскольку $\forall a \in \mathbb{Z}_{p^s}^* a^{p^{s-1}(p-1)} = 1$, для $(x, p) = 1$ получаем

$$x^{p^s d} = (x^d)^{p^s} = (x^d)^{p^{s-1}} = x^{p^{s-1}d} \pmod{p^s}.$$

Теперь ясно, что $\text{mod } p^s$ переводит G_{s+1} в G_s , причем сюръективно, а, значит, биективно. Поэтому каждому решению уравнения $x_1 + \dots + x_k = x_{k+1} + \dots + x_{2k} \pmod{p^{s+1}}$ соответствует свое решение уравнения $x_1 + \dots + x_k = x_{k+1} + \dots + x_{2k} \pmod{p^s}$.

ЛЕММА 2. Имеем

$$\sum_{a \in \mathbb{Z}_{p^r}} |S(a, G_r)|^l = \sum_{a \in \mathbb{Z}_{p^r}^*} |S(a, G_r)|^l + \sum_{a \in \mathbb{Z}_{p^{r-1}}} |S(a, G_{r-1})|^l.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\mathbb{Z}_{p^r} = \mathbb{Z}_{p^r}^* \sqcup \{a \in \mathbb{Z}_{p^r}: p \mid a\}$. Когда a в исходной сумме пробегает первое множество, получаем первое слагаемое. Второе множество можно отождествить с $\mathbb{Z}_{p^{r-1}}$: если $p \mid a$, то положим $\varphi(a) = a/p$. Тогда φ будет биекцией $\{a \in \mathbb{Z}_{p^r}: p \mid a\} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^{r-1}}$. Теперь заметим, что $S(a, G_r) = S(\varphi(a), G_{r-1})$, поэтому суммируя $|S(a, G_r)|^l$ по второму множеству, получаем второе слагаемое.

Теперь докажем основную теорему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Обозначим $k_r := n(n+1)^{r-2}$.

Построим индукцией по r такие функции $C_1(A, r)$ и $C_2(A, r)$, что

$$S(G_r) \leq C_1(A, r)tp^{-1/(2k_2 k_{r-1})} \quad \text{при } r \geq 3 \quad (4)$$

и

$$T_{k_r}(G_r) \leq C_2(A, r)p^{-r}t^{2k_r} \quad \text{при } r \geq 2.$$

База индукции: при $r = 2$ положим $C_2(A, 2) = A$.

Пусть мы построили функции C_1 и C_2 для всех номеров, меньших r . Построим их для r . Применяя основное неравенство при $q = p^r$, $k = k_2$, $l = k_{r-1}$, $G = G_r$, получим

$$\begin{aligned} S(G_r) &\leq (p^r A p^{-2} t^{2k_2} C_2(A, r-1) p^{-r+1} t^{2k_{r-1}})^{1/(2k_2 k_{r-1})} t^{1-1/k_2-1/k_{r-1}} \\ &= \{A \cdot C_2(A, r-1)\}^{1/(2k_2 k_{r-1})} t p^{-1/(2k_2 k_{r-1})}. \end{aligned}$$

Полагая $C_1(A, r) = \{A \cdot C_2(A, r-1)\}^{1/(2k_2 k_{r-1})}$, получаем (4).

Теперь подберем $C_2(A, r)$ так, чтобы $p^r T_{k_r}(G_r) \leq C_2(A, r)p^{2k_r}$; в силу леммы 2 имеем

$$p^r T_{k_r}(G_r) = \sum_{a \in \mathbb{Z}_{p^r}} |S(a, G_r)|^{2k_r} = \sum_{a \in \mathbb{Z}_{p^r}^*} |S(a, G_r)|^{2k_r} + \sum_{a \in \mathbb{Z}_{p^{r-1}}} |S(a, G_{r-1})|^{2k_r}.$$

Оценим второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \mathbb{Z}_{p^{r-1}}} |S(a, G_{r-1})|^{2k_r} &\leq \sum_{a \in \mathbb{Z}_{p^{r-1}}} |S(a, G_{r-1})|^{2k_{r-1}} t^{2k_r - 2k_{r-1}} \\ &= p^{1-r} T_{k_{r-1}}(G_{r-1}) t^{2k_r - 2k_{r-1}} \leq C_2(A, r-1) t^{2k_{r-1}} t^{2k_r - 2k_{r-1}} \end{aligned}$$

по предположению индукции. Значит, второе слагаемое не превосходит $C_2(A, r-1) t^{2k_r}$.

Оценим первое слагаемое:

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \mathbb{Z}_{p^r}^*} |S(a, G_r)|^{2k_r} &\leq \sum_{a \in \mathbb{Z}_{p^r}^*} |S(a, G_r)|^{2k_{r-1}} \max_{a \in \mathbb{Z}_{p^r}^*} |S(a, G_r)|^{2k_r - 2k_{r-1}} \\ &\leq p^r T_{k_{r-1}}(G_r) \cdot C_1(A, r)^{2k_r - 2k_{r-1}} t^{2k_r - 2k_{r-1}} p^{-(2k_r - 2k_{r-1})/(2k_2 k_{r-1})} \\ &\leq p^r C_2(A, r-1) p^{-r+1} t^{2k_{r-1}} C_1(A, r)^{2k_r - 2k_{r-1}} t^{2k_r - 2k_{r-1}} p^{-1} \\ &= C_2(A, r-1) C_1(A, r)^{2k_r - 2k_{r-1}} t^{2k_r} = A \cdot C_2(A, r-1)^2 t^{2k_r}. \end{aligned}$$

Теперь возьмем $C_2(A, r) = A \cdot C_2(A, r-1)^2 + C_2(A, r-1)$. Тогда

$$p^r T_{k_r}(G_r) \leq A \cdot C_2(A, r-1)^2 t^{2k_r} + C_2(A, r-1) t^{2k_r} = C_2(A, r) t^{2k_r}.$$

Итак, мы получили (4) при всех $r \geq 3$. Поскольку $1/(2k_2 k_{r-1}) = \delta_{r,n}$, теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Докажем утверждение (ii) (утверждение (i) доказывается аналогично). Имеем

$$p^2 T_n(G_2) = \sum_{a \in \mathbb{Z}_{p^2}^*} |S(a, G_2)|^{2n} + \sum_{a \in \mathbb{Z}_p^*} |S(a, G_1)|^{2n} + t^{2n}. \quad (5)$$

Оценим второе слагаемое:

$$\sum_{a \in \mathbb{Z}_p^*} |S(a, G_1)|^{2n} \leq \sum_{a \in \mathbb{Z}_p^*} |S(a, G_1)|^2 \max_{a \in \mathbb{Z}_p^*} |S(a, G_1)|^{2n-2} \leq p t S_1^{2n-2}.$$

Но неравенство $p t S_1^{2n-2} \leq A t^{2n}$ эквивалентно тому, что

$$n \geq \left\lceil \frac{1}{2} \frac{\ln(pt) - 2 \ln S_1 - \ln A}{\ln t - \ln S_1} \right\rceil.$$

Оценим первое слагаемое:

$$\sum_{a \in \mathbb{Z}_{p^2}^*} |S(a, G_2)|^{2n} \leq \sum_{a \in \mathbb{Z}_{p^2}^*} |S(a, G_2)|^4 \max_{a \in \mathbb{Z}_{p^2}^*} |S(a, G_2)|^{2n-4} \leq p^2 T S_2^{2n-4}.$$

Видно, что при n , определенном формулой (3), выполняется неравенство $p^2 T S_2^{2n-4} \leq A t^{2n}$. Значит, сумма всех трех слагаемых в (5) не превосходит $(2A+1)t^{2n}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнено одно из условий:

(i) $S(G_2) \leq A p^\alpha t^\beta < t$ ну $t \geq B p^\gamma$, $\gamma > 1/2$, $\gamma - \beta\gamma - \alpha > 0$,

$$n = \max \left(\left\lceil \frac{\gamma}{2\gamma-1} \right\rceil, \left\lceil 1 + \frac{2-\gamma}{2(\gamma-\beta\gamma-\alpha)} \right\rceil \right);$$

(ii) $T_2(G_2) \leq A p^\alpha t^\beta$ ну $t \geq B p^\gamma$, $\gamma > 1/2$, $4\gamma - \beta\gamma - \alpha - 1 > 0$,

$$n = \max \left(\left\lceil \frac{\gamma}{2\gamma-1} \right\rceil, \left\lceil \frac{2}{4\gamma-\beta\gamma-\alpha-1} \right\rceil \right).$$

Тогда $T_n(G_2) \leq C_3 p^{-2} t^{2n}$, для некоторой функции $C_3 = C_3(A, B, \alpha, \beta, \gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В (i) используется оценка $S(G_1) \leq \sqrt{p}$, которая получается из основного неравенства при $k = l = 1$. Далее можно использовать теорему 2 (или повторить ее доказательство). В (ii) величина $S(G_2)$ оценивается с помощью основного неравенства при $k = l = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Оцениваемая сумма есть просто $S(a, G_2)$ для $\#G_2 = t = p - 1$. Но мы знаем (см. [9]), что $T_2(G_2) \leq Ap^{5/2}$. Применяя следствие 2, (ii) для $A, B = 1/2, \alpha = 5/2, \beta = 0, \gamma = 1$, находим $n = 4$. Далее, подставляя найденное n в теорему 1, получим требуемое неравенство.

Если же t мало, но $t \geq p^\varepsilon$, то, как следует из работ [11] и [12], найдутся такие $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ и $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, что $S(G_1) \leq C_{BK}(\varepsilon)tp^{-\delta_1}$ и $S(G_2) \leq C_B(\varepsilon)tp^{-\delta_2}$. Применяя теорему 2, получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $t \geq p^\varepsilon, \delta_1 = \delta_1(\varepsilon), \delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$. Тогда при

$$n = \max\left(\left\lceil 1 + \frac{1 - \varepsilon}{2\delta_1} \right\rceil, \left\lceil 1 + \frac{2 - \varepsilon}{2\delta_2} \right\rceil\right)$$

будет выполнено неравенство $T_n(G_2) \leq C_4(\varepsilon)p^{-2}t^{2n}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. М. Виноградов, *Избранные труды*, Изд-во АН СССР, М., 1952. [2] И. М. Виноградов, *Метод тригонометрических сумм в теории чисел*, 2-е изд., Наука, М., 1980. [3] И. М. Виноградов, *Особые варианты метода тригонометрических сумм*, Наука, М., 1976. [4] А. А. Карацуба, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:4 (1995), 61–80. [5] А. А. Карацуба, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:5 (1995), 93–102. [6] J. Friedlander, H. Iwaniec, *The Brun-Titchmarsh Theorem*, Lecture Notes in Statist., **247**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. [7] S. Konyagin, I. Shparlinski, *Character Sums with Exponential Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999. [8] С. В. Конягин, *IV Международная конференция "Современные проблемы теории чисел и ее приложения"*, Актуальные проблемы, Ч. III, Москва, 2002, 86–114. [9] D. R. Heath-Brown, S. V. Konyagin, *Quart. J. Math.*, **51** (2000), 221–235. [10] Ю. В. Малыхин, "Оценки тригонометрических сумм по модулю p^2 " (в печати). [11] J. Bourgain, S. V. Konyagin, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **337**:2 (2003), 75–80. [12] J. Bourgain, Mei-Chu Chang, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **339**:7 (2004), 463–466.

Ю. В. Малыхин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: jura05@narod.ru

Поступило

29.12.2005