Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Рафиков, Об оценивании функции регрессии, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 5, 797–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3093>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:42:27

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ФУНКЦИИ РЕГРЕССИИ

Е. Рафиков

Пусть $X \subset \mathbb{R}^d$ и $Y \subset \mathbb{R}$ – борелевские множества, и на их произведении $Z = X \times Y$ определена борелевская вероятностная мера ρ . Обозначим условную меру на Y как $\rho(y|x)$, а проекцию ρ на X как ρ_X . Пусть $f_\rho: X \rightarrow Y$ – функция регрессии меры ρ , т.е.

$$f_\rho(x) = \int_Y y d\rho(y|x) = E\{y|x\}.$$

В статье изучается задача оценивания функции $f_\rho(x)$ по конечной ρ -выборке $z = \{z_1, \dots, z_m\}$, $z_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, m$, длины m , в случае, когда мера ρ неизвестна. Будем дополнительно предполагать, что f_ρ принадлежит некоторому заранее известному функциональному классу $\mathcal{H}$ в пространстве непрерывных ограниченных функций $\mathcal{C}(X)$. Функцию, построенную по выборке z и оценивающую $f_\rho(x)$, будем обозначать как $f_z: X \rightarrow Y$ и называть *функцией-оценщиком*.

Естественной характеристикой качества оценивания функции f_ρ представляется скорость убывания вероятностных хвостов (при стремлении $\varepsilon \rightarrow 0$ и $m \rightarrow \infty$)

$$\Pr_{z \in Z^m} \{\|f_z - f_\rho\|_{L_2(X, \rho_X)}^2 > \varepsilon\}, \quad (1)$$

исследованием которой мы занимаемся ниже.

Многие авторы изучали вопросы качества и оптимальности оценивания f_ρ в случае, когда на меру ρ наложены дополнительные условия ограниченности вида $|y| < M$ ρ -п.н. для некоторого $M > 0$, см. [1]–[3]. Мы покажем, что ряд важных оценок переносится также и на случай *неограниченной* меры ρ . А именно, везде ниже будем предполагать, что ρ удовлетворяет следующим условиям:

$$\exists C_1, C_2 > 0 \text{ такие, что } \forall t > 0: \Pr_\rho\{|y| > t\} < C_1 \cdot \exp\{-C_2 \cdot t^4\}, \text{ и } f_\rho(x) \in \mathcal{H}, \quad (2)$$

где $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X)$ – компактное множество. В статье приводятся обобщения нескольких утверждений из работы [2].

Пусть ξ – случайная величина со значениями в $\mathbb{R}$. Говорят, что она удовлетворяет свойству *субгауссовости*, если существуют положительные $C_1, C_2 > 0$ такие, что для $t > 0$

$$\Pr\{|\xi| > t\} < C_1 \cdot \exp\{-C_2 \cdot t^2\}.$$

Нам понадобится следующий классический результат (см. [4]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ – независимые случайные величины со значениями в $\mathbb{R}$, удовлетворяющие свойству субгауссовости с одинаковыми параметрами $C_1, C_2 > 0$. Тогда существует постоянная $C = C(C_1, C_2) > 0$ такая, что для всех $t > 0$ выполняется неравенство

$$\Pr\{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m > t\} \leq e^{-Ct^2/m}.$$

Для функции $f: X \rightarrow Y$ из $L_2(X, \rho_X)$ назовем ее *ошибкой* выражение

$$\mathcal{E}(f) := \mathcal{E}_\rho(f) := \int_Z (f(x) - y)^2 d\rho.$$

Тогда можно проверить, что

$$\mathcal{E}(f) - \mathcal{E}(f_\rho) = \|f - f_\rho\|_{L_2(X, \rho_X)}^2, \quad \mathcal{E}(f_\rho) = \inf_{f \in L_2(\rho_X)} \mathcal{E}(f) \text{ и } f_\rho(x) = \arg \min_{f \in \mathcal{H}, f \in L_2(\rho_X)} \mathcal{E}(f),$$

а значит для оценщика $f_{\mathbf{z}} \in L_2(X, \rho_X)$ интересные нас вероятностные хвосты (1) можно также записать в виде

$$\Pr_{\mathbf{z} \in Z^m} \{\|f_{\mathbf{z}} - f_{\rho}\|_{L_2(X, \rho_X)}^2 > \varepsilon\} = \Pr_{\mathbf{z} \in Z^m} \{\mathcal{E}(f) - \mathcal{E}(f_{\rho}) > \varepsilon\}.$$

Обозначим *эмпирическую ошибку* как

$$\mathcal{E}_{\mathbf{z}}(f) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (f(x_i) - y_i)^2,$$

и определим *дефект* функции $f: X \rightarrow Y$ следующим образом:

$$L_{\mathbf{z}}(f) := L_{\mathbf{z}, \rho}(f) := \mathcal{E}(f) - \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(f); \quad \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m), \quad z_i = (x_i, y_i).$$

Везде ниже будем считать, что $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X)$ – компактное подмножество.

ЛЕММА 1. Пусть функция $f \in \mathcal{H}$ имеет конечную ошибку $\mathcal{E}(f)$. Тогда для некоторой константы $C = C(\mathcal{H}, \rho) > 0$ и для всех $\varepsilon > 0$ имеет место оценка

$$\Pr_{\mathbf{z} \in Z^m} \{L_{\mathbf{z}}(f) > \varepsilon\} \leq 2 \exp\{-Cm\varepsilon^2\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что случайные величины $\xi_i(f) = (y_i - f(x_i))^2 - \mathbb{E}_{\rho}\{(y - f(x))^2\}$ независимы. Из условия (2) следует, что они также и субгауссовы с некоторыми одинаковыми параметрами $C_1 = C_1(\mathcal{H}, \rho)$ и $C_2 = C_2(\mathcal{H}, \rho)$. Непосредственное применение утверждения 1 дает нам необходимую оценку.

Обозначим через $N(\mathcal{H}, \varepsilon)$ число покрытий для $\mathcal{H}$ в пространстве $\mathcal{C}(X)$, т.е. наименьшее число шаров радиуса ε в $\mathcal{C}(X)$ с центрами в $\mathcal{H}$, необходимых для покрытия $\mathcal{H}$. Справедлива

ЛЕММА 2. Существуют константы $C_j(\mathcal{H}, \rho) > 0$, $j = 1, 2$, такие, что для $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\Pr_{\mathbf{z} \in Z^m} \left\{ \sup_{f \in \mathcal{H}} |L_{\mathbf{z}}(f)| > \varepsilon \right\} \leq 2N\left(\mathcal{H}, \frac{\varepsilon}{C_1(\mathcal{H}, \rho)}\right) \cdot \exp\{-C_2(\mathcal{H}, \rho) \cdot m\varepsilon^2\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Числа $c_k(\mathcal{H}, \rho)$ ниже обозначают некоторые положительные постоянные. Пусть $f_1, f_2 \in \mathcal{H}$ – произвольные функции. Заметим, что

$$|L_{\mathbf{z}}(f_1) - L_{\mathbf{z}}(f_2)| \leq |\mathcal{E}(f_1) - \mathcal{E}(f_2)| + |\mathcal{E}_{\mathbf{z}}(f_1) - \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(f_2)|.$$

Оценим оба слагаемых в правой части по отдельности. Так как

$$(f_1(x) - y)^2 - (f_2(x) - y)^2 = (f_1(x) - f_2(x))(f_1(x) + f_2(x) - 2y),$$

получаем

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}(f_1) - \mathcal{E}(f_2)| &= \left| \int_Z (f_1(x) - f_2(x))(f_1(x) + f_2(x) - 2y) d\rho \right| \\ &\leq \|f_1 - f_2\|_{\infty} \int_Z |(f_1(x) - y) + (f_2(x) - y)| d\rho \leq c_1(\mathcal{H}, \rho) \cdot \|f_1 - f_2\|_{\infty}, \\ |\mathcal{E}_{\mathbf{z}}(f_1) - \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(f_2)| &= \frac{1}{m} \left| \sum_{i=1}^m (f_1(x_i) - f_2(x_i))(f_1(x_i) + f_2(x_i) - 2y_i) \right| \\ &\leq \|f_1 - f_2\|_{\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |(f_1(x_i) - y_i) + (f_2(x_i) - y_i)|. \end{aligned}$$

Из условия (2) следует, что случайные величины $\xi_i(f) = |(f_1(x_i) - y_i) + (f_2(x_i) - y_i)|$ независимы и субгауссовы с некоторыми параметрами $C_j = C_j(\mathcal{H}, \rho)$, $j = 1, 2$. В силу утверждения 1 имеем

$$\Pr_{\mathbf{z} \in Z^m} \{ |\mathcal{E}_z(f_1) - \mathcal{E}_z(f_2)| > \|f_1 - f_2\|_\infty \cdot t \} \leq e^{-c_2(\mathcal{H}, \rho) \cdot mt^2},$$

откуда для любого $t > 0$ получаем неравенство

$$\Pr_{\mathbf{z} \in Z^m} \{ |L_z(f_1) - L_z(f_2)| > c_3(\mathcal{H}, \rho) \cdot (\|f_1 - f_2\|_\infty + t) \} \leq e^{-c_2(\mathcal{H}, \rho) \cdot mt^2}.$$

Рассмотрим $f_1, \dots, f_N - \varepsilon/(4c_3(\mathcal{H}, \rho))$ -сеть для $\mathcal{H}$, где $N = N(\mathcal{H}, \varepsilon/(4c_3(\mathcal{H}, \rho)))$, т.е. для любой функции $f \in \mathcal{H}$ можно найти некоторый f_j такой, что $\|f - f_j\|_\infty \leq \varepsilon/(4c_3(\mathcal{H}, \rho))$. Из неравенства выше получаем, что существует некоторая универсальная постоянная $c_4(\mathcal{H}, \rho)$ такая, что верно

$$\Pr_{\mathbf{z} \in Z^m} \left\{ |L_z(f) - L_z(f_j)| > \frac{\varepsilon}{4} + t \right\} \leq e^{-c_4(\mathcal{H}, \rho) \cdot mt^2},$$

что дает нам для некоторого $c_5(\mathcal{H}, \rho)$ (не зависящего от j) и для $t = \varepsilon/2$ неравенство

$$\Pr_{\mathbf{z} \in Z^m} \left\{ |L_z(f) - L_z(f_j)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \leq e^{-c_5(\mathcal{H}, \rho) \cdot m\varepsilon^2}.$$

Для завершения доказательства осталось скомбинировать эту оценку с результатом леммы 1. Заметим, что если $\sup_{f \in \mathcal{H}} |L_z(f)| > \varepsilon$, то найдется $j \in \{1, \dots, N\}$, для которого выполняется одно из двух неравенств $|L_z(f_j)| > \varepsilon/2$ или $|L_z(f) - L_z(f_j)| > \varepsilon/2$. Рассмотрим N событий $A_j = \{|L_z(f_j)| > \varepsilon/2\}$ и N событий $B_j = \{|L_z(f) - L_z(f_j)| > \varepsilon/2\}$ в пространстве Z^m , где $j = 1, \dots, N$. Тогда справедливо включение

$$\left\{ \sup_{f \in \mathcal{H}} |L_z(f)| > \varepsilon \right\} \subset \bigcup_{j=1}^N A_j \cup B_j,$$

которое позволяет нам написать вероятностную оценку вида

$$\begin{aligned} \Pr_{\mathbf{z} \in Z^m} \left\{ \sup_{f \in \mathcal{H}} |L_z(f)| > \varepsilon \right\} &\leq \sum_{j=1}^N \Pr_{\mathbf{z} \in Z^m}(A_j) + \Pr_{\mathbf{z} \in Z^m}(B_j) \\ &\leq 2N \left(\mathcal{H}, \frac{\varepsilon}{c_6(\mathcal{H}, \rho)} \right) \cdot \exp\{-c_7(\mathcal{H}, \rho) \cdot m\varepsilon^2\}, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство леммы 2.

Приведем оценки вероятностных хвостов (1) в случае, когда в качестве оценщика f_z выбирается функция

$$f_z := f_{\mathcal{H}, z} := \arg \min_{f \in \mathcal{H}} \mathcal{E}_z(f),$$

на которой достигается минимум эмпирической ошибки. Обозначим также $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(f) := \mathcal{E}(f) - \mathcal{E}(f_\rho)$ и $\mathcal{E}_{\mathcal{H}, z}(f) := \mathcal{E}_z(f) - \mathcal{E}_z(f_\rho)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X)$ – компактное подмножество и мера ρ удовлетворяет условиям (2). Тогда найдутся положительные константы $C_1(\mathcal{H}, \rho)$, $C_2(\mathcal{H}, \rho)$ такие, что для всех $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\Pr_{\mathbf{z} \in Z^m} \{ \mathcal{E}(f_{\mathcal{H}, z}) - \mathcal{E}(f_\rho) > \varepsilon \} \leq 2N \left(\mathcal{H}, \frac{\varepsilon}{C_1(\mathcal{H}, \rho)} \right) \cdot \exp\{-C_2(\mathcal{H}, \rho) \cdot m\varepsilon^2\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы следует из цепочки неравенств

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f_{\mathcal{H},z}) - \mathcal{E}(f_{\rho}) &= \mathcal{E}(f_{\mathcal{H},z}) + (-\mathcal{E}_z(f_{\mathcal{H},z}) + \mathcal{E}_z(f_{\mathcal{H},z})) + (-\mathcal{E}_z(f_{\mathcal{H}}) + \mathcal{E}_z(f_{\mathcal{H}})) - \mathcal{E}(f_{\mathcal{H}}) \\ &= \underbrace{(\mathcal{E}(f_{\mathcal{H},z}) - \mathcal{E}_z(f_{\mathcal{H},z}))}_{=L_z(f_{\mathcal{H},z})} + \underbrace{(\mathcal{E}_z(f_{\mathcal{H},z}) - \mathcal{E}_z(f_{\mathcal{H}}))}_{\leq 0} + \underbrace{(\mathcal{E}_z(f_{\mathcal{H}}) - \mathcal{E}(f_{\mathcal{H}}))}_{=-L_z(f_{\rho})} \\ &\leq L_z(f_{\mathcal{H},z}) - L_z(f_{\rho})\end{aligned}$$

и следующих простых наблюдений:

$$\begin{aligned}\Pr_{z \in Z^m} \{\mathcal{E}(f_{\mathcal{H},z}) - \mathcal{E}(f_{\rho}) > \varepsilon\} &\leq \Pr_{z \in Z^m} \{L_z(f_{\mathcal{H},z}) - L_z(f_{\rho}) > \varepsilon\} \\ &\leq \Pr_{z \in Z^m} \{|L_z(f_{\mathcal{H},z})| > \varepsilon\} + \Pr_{z \in Z^m} \{|L_z(f_{\rho})| > \varepsilon\} \\ &\leq 2\Pr_{z \in Z^m} \left\{ \sup_{f \in \mathcal{H}} |L_z(f)| > \varepsilon \right\},\end{aligned}$$

а также из леммы 2.

Оказывается удобным записать оценки предыдущей теоремы 1 для случая, когда $\mathcal{H}$ характеризуется скоростью убывания своих энтропийных чисел $\varepsilon_n(\mathcal{H})$ в пространстве $\mathcal{C}(X)$. Напомним, что

$$\varepsilon_n(\mathcal{H}) := \inf \left\{ \varepsilon : \exists f_1, \dots, f_{2^n} \in \mathcal{H} : \mathcal{H} \subset \bigcup_{j=1}^{2^n} (f_j + \varepsilon U(\mathcal{C}(X))) \right\},$$

где $U(\mathcal{C}(X))$ – замкнутый единичный шар в $\mathcal{C}(X)$. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть для некоторых $r > 0$, $C > 0$ и всех натуральных чисел $n \in \mathbb{N}$ верно $\varepsilon_n(\mathcal{H}) \leq Cn^{-r}$. Тогда существуют положительные константы $C_1(r, \rho)$, $C_2(r, \rho) > 0$ такие, что

$$\Pr_{z \in Z^m} \{\mathcal{E}(f_{\mathcal{H},z}) - \mathcal{E}(f_{\rho}) \geq \varepsilon\} \leq e^{-C_1 \cdot m\varepsilon^2}, \quad \text{как только} \quad \varepsilon \cdot m^{r/(1+2r)} > C_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения энтропийных чисел следует, что $N(\mathcal{H}, \varepsilon) \leq 2^{(C/\varepsilon)^{1/r}}$. Тогда оценка из предыдущей теоремы переписется как

$$2N\left(\mathcal{H}, \frac{\varepsilon}{\tilde{C}_1(\mathcal{H}, \rho)}\right) \cdot \exp\{-\tilde{C}_2(\mathcal{H}, \rho) \cdot m\varepsilon^2\} = \exp\{\tilde{C}_3(r, \rho) \cdot \varepsilon^{-1/r} - \tilde{C}_4(r, \rho) \cdot m\varepsilon^2\},$$

где числа $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, $\tilde{C}_3$, $\tilde{C}_4$ положительны. Выберем $\varepsilon \sim m^\gamma$ так, чтобы $\varepsilon^{-1/r}$ и $m\varepsilon^2$ имели одинаковые порядки по m , т.е. чтобы выполнялось равенство $-\gamma/r = 1 + 2\gamma$. Тогда, подставляя решение, получаем $\varepsilon = \tilde{C} \cdot m^{-r/(1+2r)}$, где $\tilde{C} \geq C_2(r, \rho)$ для некоторой постоянной величины $C_2(r, \rho) > 0$. Легко видеть также, что показатель экспоненты примет вид $\{-C_1 m\varepsilon^2\}$ для некоторой положительной константы $C_1 = C_1(r, \rho) > 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] L. Györfi, M. Kohler, A. Krzyżak, H. Walk, *A Distribution-Free Theory of Nonparametric Regression*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York, 2002. [2] F. Cucker, S. Smale, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39** (2001), 1–49. [3] V. Temlyakov, “Approximation in learning theory”, *IMI Preprints*, **5** (2005), 1–43. [4] В.В. Петров, *Суммы независимых случайных величин*, Наука, М., 1972.

Е. Рафиков

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило

28.06.2006