Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Радзиевский, Теоремы существования обобщенных по Дзядыку моментных представлений, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 2, 253–260

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm31>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:04:43

УДК 517.43+517.5

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ПО ДЗЯДЫКУ МОМЕНТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Г. В. Радзиевский

В работе, в частности, доказано, что для любой последовательности комплексных чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ найдется линейный замкнутый оператор A , действующий в гильбертовом пространстве, и два вектора x и y , принадлежащие областям определения всех степеней оператора A , для которых $c_n = (A^n x, y)$. Если же ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ имеет радиус сходимости $R > 0$, то в представлении $c_n = (A^n x, y)$ оператор A можно выбрать ограниченным со спектральным радиусом, равным $1/R$.

Библиография: 8 названий.

Исследования аппроксимаций Паде различных функций привело В. К. Дзядыка к понятию обобщенной проблемы моментов. Чтобы сформулировать эту задачу, введем необходимые обозначения. Везде далее (кроме замечания 2) $\mathfrak{H}$ – бесконечномерное гильбертово пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, а I – тождественный в $\mathfrak{H}$ оператор. Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_0$ – соответственно множества положительных и неотрицательных целых чисел.

Дзядыком в [1], [2; гл. VII, § 2] сформулирована следующая

ОБОБЩЕННАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ. Пусть $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ – произвольная последовательность комплексных чисел. Требуется найти гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ и две такие последовательности векторов $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ и $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ с элементами a_n и b_n из $\mathfrak{H}$, что

$$c_{j+k} = (a_j, b_k), \quad j, k \in \mathbb{N}_0. \quad (1)$$

Эти соотношения будем называть *обобщенным по Дзядыку моментным представлением последовательности* $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Следует отметить, что в [1], [2] данная задача сформулирована в несколько более частном случае. А именно, в [1], [2] требовалось найти меру μ на множестве X , совпадающем либо с отрезком $[0; 1]$, либо с полуосью $[0; \infty)$, либо со всей осью $(-\infty; \infty)$, и две такие последовательности функций $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ и $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ с элементами из $L_2(X, d\mu)$, чтобы выполнялись равенства (1). Кроме того, в [1], [2] присутствовало дополнительное условие о линейной независимости каждой конечной подпоследовательности у последовательностей функций $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ и $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Это условие, как легко видеть, равносильно требованию отличия от нуля определителей Ганкеля $\det[c_{j+k}]_{j,k=0}^n$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$.

Работа поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований Украины, проект Ф7/329-2001.

При выполнении этого требования сформулированная выше задача была решена в [2, гл. VII, теорема 1], где (см. также [3], [4]) приведен ряд ее применений к аппроксимации Паде.

Заметим, что в связи с аппроксимацией Паде подобная задача, хотя и в неявном виде, возникала ранее (см., например, [5, часть 2, § 2.3] и цитированную там литературу, а также [4]). А именно, требуется найти ограниченный линейный оператор A , действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и два таких вектора x и y из $\mathfrak{H}$, что

$$c_n = (A^n x, y), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2)$$

причем здесь и далее $A^0 := I$. Если существует представление (2) последовательности $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, то, полагая векторы $a_j := A^j x$ и $b_k := (A^k)^* y$ из (2), получаем (1). Следовательно, представление моментной последовательности $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ в виде (2) является более общим нежели ее представление в виде (1). Счетная система равенств (2) допускает запись в виде одного равенства. Действительно, введем порождающую функцию

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (3)$$

последовательности $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, и пусть $R_A(z) := (I - zA)^{-1}$. Тогда равенства (2) равносильны такому равенству:

$$f(z) = (R_A(z)x, y). \quad (4)$$

Отсюда, в частности, заключаем, что требование ограниченности оператора A в представлении (2) накладывает весьма жесткое ограничение на последовательность $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$: ее порождающая функция обязана быть голоморфной в окрестности нуля. При таком ограничении доказанная далее теорема 1 гарантирует существование представления (4), а значит, и (2). Если же отказаться от требования ограниченности оператора A , то, как следует из доказанных здесь теорем 1 и 2, любую последовательность $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ можно представить в виде (2), причем линейный оператор A и векторы x и y выбраны так, что от представления (2) всегда можно перейти к представлению (1). Эти две теоремы, установленные в работе, дают полное решение более общей задачи, нежели задача о представлении обобщенной по Дзядыку моментной последовательности.

В работе не приведены приложения этих результатов к аппроксимации Паде, поскольку для этого пришлось бы просто повторить соответствующие рассуждения из [2]–[5].

Перейдем теперь к формулировкам и доказательствам основных результатов работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть порождающая функция f последовательности $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ голоморфна в окрестности нуля, а радиус сходимости ряда (3) равен $R(f)$. Тогда для любого бесконечномерного гильбертового пространства $\mathfrak{H}$ существует линейный ограниченный оператор A , действующий в $\mathfrak{H}$ и имеющий спектральный радиус $r(A) = 1/R(f)$, и элементы $x, y \in \mathfrak{H}$, для которых справедливо представление (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем числа

$$t_n := (n^2 |c_n|)^{1/n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

где через $\alpha^{1/n}$ обозначено арифметическое значение корня n -й степени из числа $\alpha \geq 0$. Согласно формуле Коши–Адамара $1/R(f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}$, и поэтому

$$\frac{1}{R(f)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |t_n|. \quad (6)$$

Рассмотрим матрицы

$$B_n := [\delta_{j,s-1}]_{j,s=1}^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

где $\delta_{j,s}$ – символ Кронекера. Каждой матрице B_n сопоставим линейный оператор B_n , действующий в комплексном $(n+1)$ -мерном арифметическом унитарном пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$ и имеющий в каноническом базисе $e_{l,n} = [\delta_{l,1}, \dots, \delta_{l,n+1}]^T$, $l = 1, \dots, n+1$, этого пространства матрицу B_n , причем систему векторов $e_{1,n}, \dots, e_{n+1,n}$ считаем ортонормированной. Скалярное произведение в $\mathbb{C}^{n+1}$ обозначим через $(\cdot, \cdot)_n$.

Полагая $\text{sign } \alpha := \alpha/|\alpha|$ для неравного нулю комплексного числа α и $\text{sign } 0 := 0$, определим векторы

$$x_1 := [c_0, \text{sign } c_1]^T \in \mathbb{C}^2, \quad x_n := \left[0, \dots, 0, \frac{\text{sign } c_n}{n}\right]^T \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (8)$$

$$y_n := \left[\frac{1}{n}, 0, \dots, 0\right]^T \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Представим теперь гильбертово пространство l_2 в виде прямой суммы пространств $\mathbb{C}^{n+1}$, т.е.

$$l_2 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}^{n+1}, \quad (10)$$

а скалярное произведение в l_2 обозначим через $(\cdot, \cdot)$.

И наконец, по введенным числам t_n , операторам B_n и векторам x_n и y_n зададим оператор

$$A := \bigoplus_{n=1}^{\infty} t_n B_n,$$

действующий в пространстве l_2 , и векторы

$$x := \bigoplus_{n=1}^{\infty} x_n, \quad y := \bigoplus_{n=1}^{\infty} y_n, \quad (11)$$

принадлежащие l_2 , и покажем, что для них справедливо представление (4).

Пусть $\theta_{n,n}$ – нулевой оператор в $\mathbb{C}^{n+1}$. Поскольку матрица оператора B_n в ортонормированном базисе пространства $\mathbb{C}^{n+1}$ имеет вид (7), то $B_n^k = \theta_{n,n}$ при $k > n$, а $\|B_n^k\| = 1$ при $1 \leq k \leq n$. Значит,

$$A^k = \left(\bigoplus_{n=1}^{k-1} \theta_{n,n} \right) \oplus \left(\bigoplus_{n=k}^{\infty} t_n^k B_n^k \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

причем здесь и далее в аналогичных формулах при $k = 1$ левая часть равенства совпадает со вторым слагаемым из правой. Тем самым, $\|A^k\| = \sup_{n \in \mathbb{N}: n \geq k} |t_n|^k$. Отсюда,

принимая во внимание формулу Гельфанда для вычисления спектрального радиуса оператора и равенство (6), имеем

$$r(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |t_n| = \frac{1}{R(f)}. \quad (12)$$

Как уже отмечалось, $B_n^k = \theta_{n,n}$ при $k > n$. Следовательно,

$$R_{t_n B_n}(z) = \sum_{k=0}^n t_n^k B_n^k z^k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

при этом $t_n^0 := 0$, если $t_n = 0$. Из вида (7) матриц операторов B_n и определений (8) и (9) векторов x_n и y_n вытекают соотношения $(B_n^k x_n, y_n)_n = (\delta_{k,n} \operatorname{sign} c_n)/n^2$ при $k, n \in \mathbb{N}$ и $(x_1, y_1)_1 = c_0$, из которых с учетом определения (5) чисел t_n и равенств (13) получаем, что

$$(R_{t_1 B_1}(z)x_1, y_1)_1 = c_0 + c_1 z, \quad (R_{t_n B_n}(z)x_n, y_n)_n = c_n z^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

Но так как

$$(R_A(z)x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (R_{t_n B_n}(z)x_n, y_n)_n,$$

то отсюда следует требуемое представление (4). То, что спектральный радиус оператора A связан с радиусом сходимости ряда (3) формулой $r(A) = 1/R(f)$, было показано выше в (12).

Итак, теорема 1 доказана в случае, когда гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ совпадает с l_2 . Но поскольку все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства изометричны, то указанная конструкция дает необходимое представление в произвольном бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Если же $\mathfrak{H}$ – несепарабельное гильбертово пространство, то оно допускает представление $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{H}_1$ – бесконечномерное сепарабельное, а $\mathfrak{H}_2$ – несепарабельное гильбертовы пространства. Применяя доказанное утверждение теоремы 1 для пространства $\mathfrak{H}_1$, получаем $f(z) = (R_{A_1}(z)x_1, y_1)$, где оператор A_1 действует в $\mathfrak{H}_1$ и $r(A_1) = 1/R(f)$, а x_1 и y_1 – некоторые векторы из $\mathfrak{H}_1$. Далее, полагая $A = A_1 \oplus \theta$ (здесь θ – нулевой оператор, действующий в $\mathfrak{H}_2$), а $x = x_1 \oplus \theta$ и $y = y_1 \oplus \theta$ (здесь уже θ – нулевой вектор из $\mathfrak{H}_2$), находим нужное представление в несепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого числа $r \in [1/R(f); \infty)$ и произвольного бесконечномерного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ существует линейный ограниченный оператор A , действующий в $\mathfrak{H}$ и имеющий спектральный радиус $r(A) = r$, и элементы $x, y \in \mathfrak{H}$, для которых справедливо представление (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ в виде суммы $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{H}_2$ – какое-либо одномерное подпространство пространства $\mathfrak{H}$. Применяя теорему 1, находим оператор A_1 с $r(A_1) = 1/R(f)$, действующий в $\mathfrak{H}_1$, и векторы $x_1, y_1 \in \mathfrak{H}_1$, для которых $f(z) = (R_{A_1}(z)x_1, y_1)$. Далее, введем оператор A_2 , действующий в $\mathfrak{H}_2$ по правилу: $A_2 x = r x$, $x \in \mathfrak{H}_2$, и рассмотрим в $\mathfrak{H}$ оператор $A = A_1 \oplus A_2$ и векторы $x = x_1 \oplus \theta$ и $y = y_1 \oplus \theta$ (здесь θ – нулевой вектор пространства $\mathfrak{H}_2$). Тогда $r(A) = r$, а $(R_A(z)x, y) = f(z)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $D_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ – круг конечного радиуса $R > 0$ с центром в нуле, ∂D_R – его граница, а $0 < p \leq \infty$. Обозначим через $H_p(D_R)$ пространство Харди голоморфных в круге D_R функций (см., например, [6]), а через $C(\partial D_R)$ – пространство непрерывных на окружности ∂D_R функций с нормой максимума модуля функции на ∂D_R . Если $f \in H_1(D_R)$, то утверждение теоремы 1 с заменой в нем произвольного гильбертового пространства $\mathfrak{H}$ на банахово пространство $C(\partial D_R)$ можно извлечь из [7; гл 2, теорема 2.4]. При этом равенство (4) запишется в виде $f(z) = y(R_A(z)x)$, где y – некоторый линейный непрерывный функционал на $C(\partial D_R)$. Если же еще усилить требование на f и считать, что $f \in H_2(D_R)$, то из конструкции, имеющейся в [7] и в заключительной части доказательства теоремы 1, можно получить утверждение теоремы 1 в произвольном бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Как уже отмечалось, утверждение (4) теоремы 1 допускает равносильную запись в виде (2). Оказывается, что в такой формулировке теорему 1 удастся уточнить, заменив в ней голоморфную в окрестности нуля функцию произвольным степенным рядом, имеющим нулевой радиус сходимости. Естественно, что в этом случае представление (4), как и равносильное ему представление (2), с ограниченным оператором невозможно, поскольку для ограниченного оператора A функция $(R_A(\cdot)x, y)$ а priori будет голоморфной в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/r(A)\}$. (Хотя, как показано в следствии, функция $(R_A(\cdot)x, y)$ может допускать голоморфное продолжение и за пределы круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/r(A)\}$ и, в частности, при $r(A) > 0$ она может оказаться целой.) Однако, если отказаться от требования ограниченности оператора A , то представление (2) удастся построить для произвольной последовательности $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Чтобы сформулировать соответствующее уточнение теоремы 1, введем необходимые определения и обозначения.

Пусть A – линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и имеющий область определения $\mathfrak{D}(A)$. Оператор A^k определяется по индукции соотношениями: $A^0 := I$, $A^1 := A$, а при $k = 2, 3, \dots$

$$\mathfrak{D}(A^k) := \{f \in \mathfrak{D}(A^{k-1}) : A^{k-1}f \in \mathfrak{D}(A)\}, \quad A^k f := A(A^{k-1}f), \quad f \in \mathfrak{D}(A^k). \quad (14)$$

Отсюда, в частности, следует, что $A^{j+k}f = A^j(A^k f)$ для всех векторов $f \in \mathfrak{D}(A^{j+k})$ и индексов $j, k \in \mathbb{N}_0$. Обозначим через $\mathfrak{D}_\infty(A) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{D}(A^k)$, и пусть $\widetilde{A^k}$ – замыкание оператора A^k для $k \in \mathbb{N}$.

Во введенных обозначениях справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ – такая числовая последовательность, что степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ имеет нулевой радиус сходимости, а $\mathfrak{H}$ – произвольное бесконечномерное гильбертово пространство. Тогда найдется такой линейный неограниченный замкнутый оператор A , действующий в $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{D}_\infty(A)$ всюду плотно в $\mathfrak{H}$, операторы A^k при $k = 2, 3, \dots$ допускают замыкание, множество

$$\mathfrak{M} := \mathfrak{D}_\infty(A) \cap \mathfrak{D}_\infty(A^*) \cap \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{D}((A^k)^*) \right) \quad (15)$$

всюду плотно в $\mathfrak{H}$, и найдутся векторы x и y из $\mathfrak{M}$, для которых справедливы представления

$$c_{j+k} = (A^{j+k}x, y) = (A^j x, (A^k)^* y) = (A^j x, (A^*)^k y), \quad j, k \in \mathbb{N}_0. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО использует ряд построений, введенных при доказательстве теоремы 1, поэтому далее без пояснений используются обозначения из этого доказательства. Здесь последовательность $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ выбирается иной, нежели в (5), а именно, положим

$$d_n := \max\{1, |c_n|\}, \quad t_n := (n^2 d_n^2 |c_n|)^{1/n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

и введем оператор A , действующий в пространстве l_2 , представленном в виде (10), по правилу

$$\mathfrak{D}(A) := \left\{ f = \bigoplus_{n=1}^{\infty} f_n \in l_2 : f_n \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^2 \|B_n f_n\|^2 < \infty \right\},$$

$$Af := \bigoplus_{n=1}^{\infty} t_n B_n f_n, \quad f \in \mathfrak{D}(A).$$

Считая θ_n нулевым элементом пространства $\mathbb{C}^{n+1}$, запишем согласно определению (14) степени оператора A :

$$\mathfrak{D}(A^k) = \left\{ f = \bigoplus_{n=1}^{\infty} f_n \in l_2 : f_n \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad \sum_{n=j}^{\infty} |t_n^j|^2 \|B_n^j f_n\|^2 < \infty, \quad j = 1, \dots, k \right\}, \quad (18)$$

$$A^k f = \left(\bigoplus_{n=1}^{k-1} \theta_{n,n} \right) \oplus \left(\bigoplus_{n=k}^{\infty} t_n^k B_n^k f_n \right), \quad f \in \mathfrak{D}(A^k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Обозначим через $\mathfrak{L}$ линейное многообразие пространства l_2 , состоящее из векторов $f = \bigoplus_{n=1}^{\infty} f_n$, для которых элементы f_n принадлежат $\mathbb{C}^{n+1}$ и равны нулю для достаточно больших n . Очевидно, что $\mathfrak{L}$ всюду плотно в l_2 и $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{D}(A^k)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Значит, $\mathfrak{D}_{\infty}(A)$ также всюду плотно в l_2 и у каждого оператора A^k при $k \in \mathbb{N}$ имеется сопряженный. Вычислим эти сопряженные операторы. Пусть B_n^T — транспонированная матрица к матрице B_n , заданной равенством (7), а B_n^T — оператор, действующий в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$ и имеющий в каноническом базисе $e_{1,n}, \dots, e_{n+1,n}$ этого пространства матрицу B_n^T . Согласно формуле (19), для любых векторов $f \in \mathfrak{D}(A^k)$ и $g = \bigoplus_{n=1}^{\infty} g_n \in l_2$ с $g_n \in \mathbb{C}^{n+1}$ справедливо равенство

$$(A^k f, g) = \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{s=1}^{n-k+1} t_n^k (f_n, e_{k+s,n})_n (e_{s,n}, g_n)_n.$$

Считая в этом равенстве f произвольным элементом из $\mathfrak{L}$, заключаем, что уравнение $(A^k f, g) = (f, w)$ разрешимо относительно вектора g тогда и только тогда, когда компоненты вектора $w = \bigoplus_{n=1}^{\infty} w_n \in l_2$ с $w_n \in \mathbb{C}^{n+1}$ представимы в виде $w_n = \bar{t}_n^k B_n^T g_n$, $n \in \mathbb{N}$. Теперь уже несложно получить представление оператора $(A^k)^*$:

$$\mathfrak{D}((A^k)^*) = \left\{ g = \bigoplus_{n=1}^{\infty} g_n \in l_2 : g_n \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad \sum_{n=k}^{\infty} |t_n^k|^2 \|(B_n^T)^k g_n\|^2 < \infty \right\}, \quad (20)$$

$$(A^k)^* g = \left(\bigoplus_{n=1}^{k-1} \theta_{n,n} \right) \oplus \left(\bigoplus_{n=k}^{\infty} \bar{t}_n^k (B_n^T)^k g_n \right), \quad g \in \mathfrak{D}((A^k)^*), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

Аналогично показывается, что

$$\mathfrak{D}((A^k)^{**}) = \left\{ f = \bigoplus_{n=1}^{\infty} f_n \in l_2 : f_n \in \mathbb{C}^{n+1}, \sum_{n=k}^{\infty} |t_n^k|^2 \|B_n^k f_n\|^2 < \infty \right\}, \quad (22)$$

$$k \in \mathbb{N},$$

и $(A^k)^{**} f = A^k f$ для $f \in \mathfrak{D}(A^k)$.

Поскольку [8; гл. 3, теорема 5.29] $(A^k)^{**} = \widetilde{A^k}$, то сравнивая области определений (18) и (22) операторов A^k и $(A^k)^{**}$, заключаем, что при $k = 1$ оператор A^k замкнут, а при $k = 2, 3, \dots$ операторы A^k не замкнуты. Кроме того, из равенств (20) и (21) при $k = 1$ и определения (14) степени оператора имеем

$$\mathfrak{D}((A^*)^k) = \left\{ g = \bigoplus_{n=1}^{\infty} g_n \in l_2 : g_n \in \mathbb{C}^{n+1}, \sum_{n=j}^{\infty} |t_n^j|^2 \|(B_n^T)^j g_n\|^2 < \infty, \quad j = 1, \dots, k \right\} \quad (23)$$

и $(A^*)^k g = (A^k)^* g$ для $g \in \mathfrak{D}((A^k)^*)$.

И, наконец, зададим векторы

$$x_1 := \left[d_1 c_0, \frac{\text{sign } c_1}{d_1} \right]^T \in \mathbb{C}^2, \quad x_n := \left[0, \dots, 0, \frac{\text{sign } c_n}{n d_n} \right]^T \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (24)$$

$$y_n := \left[\frac{1}{n d_n}, 0, \dots, 0 \right]^T \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (25)$$

а по ним формулами (11) определим элементы x и y из l_2 .

Принимая во внимание равенства (17)–(19), (24) и (11), заключаем, что

$$\begin{aligned} \|A^k x\|^2 &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{|t_n^k|^2}{n^2 d_n^2} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(n^2 d_n^2 |c_n|)^{2k/n}}{n^2 d_n^2} \\ &\leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(n^2 d_n^3)^{2k/n}}{n^2 d_n^2} < \infty, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

поэтому $x \in \mathfrak{D}_{\infty}(A)$. Аналогично из равенств (17), (20), (21), (23), (25) и (11) следует принадлежность вектора y множествам $\mathfrak{D}_{\infty}(A^*)$ и $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{D}((A^k)^*)$. Поскольку вектор x принадлежит $\mathfrak{D}(A^*)$ и ядрам операторов $(A^*)^2$ и $(A^k)^*$ при всех $k \in \mathbb{N}$, а вектор y принадлежит ядру оператора A , то x принадлежит множествам $\mathfrak{D}_{\infty}(A^*)$ и $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{D}_{\infty}((A^k)^*)$, а y – множеству $\mathfrak{D}_{\infty}(A)$. Значит, векторы x и y принадлежат множеству $\mathfrak{M}$, заданному формулой (15). Теперь утверждение (16) теоремы 2, как и утверждение теоремы 1, проверяется непосредственным вычислением векторов $A^{j+k}x$, $A^j x$ и $(A^k)^* y = (A^*)^k y$, с последующим вычислением скалярных произведений. Всюду плотность множества (15) в l_2 следует из вида (18), (20) и (23) областей определения операторов A^k , $(A^k)^*$ и $(A^*)^k$ и того очевидного факта, что всюду плотное в l_2 множество $\mathfrak{L}$ принадлежит областям определения этих операторов при всех $k \in \mathbb{N}$.

Итак, теорема 2 доказана в случае, когда гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ совпадает с l_2 . Случай произвольного гильбертового пространства сводится к изученному точно так же, как это сделано в заключительной части доказательства теоремы 1. Следует также отметить, что поскольку сведение случая несепарабельного гильбертового пространства к случаю сепарабельного происходит за счет ортогонального добавления нулевого оператора, то при таком сведении всюду плотность множества (15) не изменится, так как к нему ортогонально добавляется все несепарабельное гильбертово пространство $\mathfrak{H}_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в условиях теорем 1, 2 и следствия все члены последовательности $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ вещественны, то и все числа t_n , элементы матриц B_n и координаты векторов x_n и y_n окажутся вещественными. Поэтому в этом случае утверждения теорем 1, 2 и следствия справедливы в произвольном бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ над полем вещественных чисел. Это замечание еще раз подчеркивает различие приведенной в доказательстве теоремы 1 конструкции от построения из [7], которое по существу опирается на методы теории голоморфных векторнозначных функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дзядык В. К. Об обобщении проблемы моментов // Докл. АН УкрССР. Сер. А, физ. -матем. и техн. наук. 1981. № 6. С. 8–12.
- [2] Дзядык В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Наукова думка, 1988.
- [3] Дзядык В. К., Голуб А. П. Обобщенная проблема моментов и аппроксимации Паде. Препринт 81.58. Киев: АН УкрССР, Ин-т математики, 1981.
- [4] Голуб А. П. Обобщенные моментные представления и рациональные аппроксимации. Препринт 87.25. Киев: АН УкрССР, Ин-т математики, 1987.
- [5] Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986.
- [6] Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ, 1963.
- [7] Bart H., Gohberg I., Kaashoek M. A. Minimal Factorization of Matrix and Operator Functions. Operator Theory: Advances and Applications. V. 1. Basel–Boston: Birkhäuser, 1979.
- [8] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

Институт математики НАН Украины
E-mail: radz@imath.kiev.ua

Поступило
18.12.2001