Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Буслаев, С. Ф. Буслаева, О периодической непрерывной дроби Роджерса–Рамануджана, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 6, 827–837

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm311>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:16:40

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ДРОБИ РОДЖЕРСА–РАМАНУДЖАНА

В. И. Буслаев, С. Ф. Буслаева

В работе исследуются свойства сходимости непрерывной дроби

$$1 + \frac{qz}{1 + \frac{q^2 z}{1 + \dots}}$$

Роджерса–Рамануджана при $q = \exp(2\pi i \tau)$, где τ – рациональное число. Показано, что функция H_q , к которой сходится дробь, при некоторых рациональных τ является контрпримером к гипотезе Шталя (гиперэллиптическому варианту известной гипотезы Бейкера–Гаммеля–Уиллса). Показано также, что при всех рациональных τ число “лишних” (spurious) полюсов диагональных аппроксимаций Падэ гиперэллиптической функции H_q не превосходит половины ее рода.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Непрерывной дробью Роджерса–Рамануджана называется правильная S -дробь

$$1 + \frac{qz}{1 + \frac{q^2 z}{1 + \dots}}. \quad (1)$$

Дробь (1) была рассмотрена Роджерсом и Рамануджаном независимо друг от друга в начале двадцатого столетия. Из критерия Ворпицкого [1] сходимости непрерывных дробей следует, что непрерывная дробь (1) сходится при $\{|z| < 1/4\}$ к некоторой голоморфной функции, если $|q| \leq 1$, и сходится при всех $z \in \mathbb{C}$ к некоторой мероморфной функции, если $|q| < 1$. Функция, к которой сходится непрерывная дробь (1), может быть найдена при q , совпадающих с корнем из 1, стандартными методами теории периодических непрерывных дробей, а при остальных $|q| \leq 1$ – при помощи функции Роджерса–Рамануджана

$$G_q(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{q^{n^2}}{(1-q) \dots (1-q^n)}. \quad (2)$$

Действительно, легко проверяется, что функция Роджерса–Рамануджана удовлетворяет функциональному равенству

$$G_q(z) = G_q(qz) + qzG_q(q^2 z). \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00564, и Российской программы по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации, грант № НШ-1551.2003.1.

Поэтому для функции $H_q(z) = G_q(z)/G_q(qz)$ имеет место равенство

$$H_q(z) = 1 + \frac{qz}{H_q(qz)}, \quad (4)$$

а следовательно, и цепочка равенств

$$H_q(z) = 1 + \frac{qz}{H_q(qz)} = 1 + \frac{qz}{1 + \frac{q^2 z}{H_q(q^2 z)}} = \dots$$

Из этой цепочки равенств стандартным образом следует, что функция, к которой сходится непрерывная дробь (1), имеет в точке $z = 0$ разложение в степенной ряд, совпадающее с разложением функции $H_q(z)$.

В 1972 году Хиршхорн [2] получил явные формулы для числителей и знаменателей подходящих дробей непрерывной дроби (1). Обозначим через $\pi_{q,n}(z)$ n -ю подходящую дробь непрерывной дроби (1), а через $P_{q,n}(z)$ и $Q_{q,n}(z)$ – ее числитель и знаменатель. Хиршхорн доказал, что

$$P_{q,n}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} z^k q^{k^2} \frac{(1 - q^{n+2-2k}) \dots (1 - q^{n+1-k})}{(1 - q) \dots (1 - q^k)}, \quad (5)$$

$$Q_{q,n}(z) = P_{q,n-1}(qz) = 1 + \sum_{k=1}^{[n/2]} z^k q^{k(k+1)} \frac{(1 - q^{n+1-2k}) \dots (1 - q^{n-k})}{(1 - q) \dots (1 - q^k)}. \quad (6)$$

Легко видеть, что при $|q| < 1$ из формул (5), (6) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{q,n}(z) = G_q(z) \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{q,n}(z) = G_q(qz)$$

равномерно на компактах, лежащих в $\mathbb{C}$.

Всюду далее будем считать, что $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ – действительное число. При иррациональных τ сходимость многочленов $P_{q,n}(z)$ была проанализирована в работе Любински [3]. Опираясь на формулы Хиршхорна, Любински доказал, что если τ иррационально и Λ^β – подпоследовательность натуральных чисел такая, что $\lim_{n \in \Lambda^\beta} q^n = \beta$, то равномерно на компактах, лежащих в круге голоморфности функции G_q ,

$$\lim_{n \in \Lambda^\beta} P_{q,n}(z) = G_q(z) \overline{G_q(\overline{q\beta z})} \quad \text{и} \quad \lim_{n \in \Lambda^\beta} Q_{q,n}(z) = G_q(qz) \overline{G_q(\overline{q\beta z})}. \quad (7)$$

Как следствие равенств (7) Любински получил следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ (Любински). Пусть $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ иррационально, и Λ^β – подпоследовательность натуральных чисел такая, что $\lim_{n \in \Lambda^\beta} q^n = \beta$. Тогда

$$\lim_{n \in \Lambda^\beta} \pi_{q,n}(z) = G_q(z)/G_q(qz)$$

равномерно на компактах, лежащих в

$$\{|z| < R_q\} \setminus (F_q \cup \overline{q^2 \beta F_q}),$$

где G_q – функция Роджерса–Рамануджана, определенная равенством (2), R_q – ее радиус голоморфности, F_q – множество нулей функции $G_q(qz)$. При этом множество $F_q \cup q^2\beta F_q$ нельзя заменить в этом утверждении никаким меньшим его подмножеством.

Из определения функции $H_q(z)$ и функционального равенства (3) следует, что множество F_q нулей функции $G_q(qz)$ совпадает с множеством полюсов функции H_q . Утверждение Любински лежит в основе построенного им контрпримера к высказанной в 1961 году Бейкером, Гаммелем и Уиллсом [4] гипотезе, получившей широкую известность под названием Паде-гипотезы.

ГИПОТЕЗА (Бейкер–Гаммель–Уиллс). Пусть функция f голоморфна в некоторой окрестности точки $z = 0$ и мероморфна в единичном круге $D = \{|z| < 1\}$. Тогда найдется бесконечная подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(f)$ натуральных чисел такая, что диагональные аппроксимации Паде $[n/n]_f$ функции f стремятся к f при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$, равномерно на компактах, лежащих в D и не содержащих полюсов f .

Напомним, что аппроксимацией Паде типа $n, m \in \mathbb{N}$ функции f называется рациональная функция $[n/m]_f = P_{n,m}/Q_{n,m}$ такая, что

$$\deg P_{n,m} \leq n, \quad \deg Q_{n,m} \leq m, \quad Q_{n,m} \neq 0, \\ (Q_{n,m}f - P_{n,m})(z) = O(z^{n+m+1}) \quad \text{при } z \rightarrow 0.$$

Хорошо известно, что $[n/n]_{H_q} = \pi_{q,2n}$. Так как из любой последовательности Λ натуральных чисел можно выбрать подпоследовательность $\Lambda^* \subseteq \Lambda$, для которой существует предел $\lim_{n \in \Lambda^*} q^n$, то утверждение Любински показывает, что функция H_q будет являться контрпримером к гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса, если только множество $(\{|z| < R_q\} \cap \beta F_q) \setminus F_q$ непусто при любом $|\beta| = 1$. При помощи пакета программ Mathematica/Matlab Любински проверил, что указанные множества непусты при $q = \exp(4\pi i/(99 + \sqrt{5}))$.

В 1997 году, еще до того, как Любински построил вышеуказанный контрпример к гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса, Шталь [5] высказал гипотезу, аналогичную Паде-гипотезе, но для более узкого класса функций, а именно, для класса гиперэллиптических, мероморфных в единичном круге функций. Напомним, что алгебраическая функция f называется гиперэллиптической, если ее можно записать в виде $f = r_1 + r_2\sqrt{P}$, где r_1, r_2 – рациональные функции, P – многочлен, не имеющий кратных корней. Число $(m-1)/2$, где $m = \deg P$, называется родом гиперэллиптической функции.

ГИПОТЕЗА (Шталь). Пусть функция f гиперэллиптическая и мероморфна в единичном круге $D = \{|z| < 1\}$. Тогда найдется бесконечная подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(f)$ натуральных чисел такая, что $[n/n]_f \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$, равномерно на компактах, лежащих в D и не содержащих полюсов f .

Легко видеть, что контрпример Любински не опровергает гипотезу Шталя, так как функция H_q при $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ иррационально, не является гиперэллиптической функцией. Функция H_q не опровергает и голоморфного варианта гипотезы Бейкера–Гаммеля–Уиллса ни при каком $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ иррационально, так как из утверждения Любински следует, что сходимость непрерывной дроби (1) отсутствует

только лишь в точках множества $\bigcup_{|\beta|=1} \beta F_q$, а любой круг $\{|z| < R\}$, в котором функция H_q голоморфна, не содержит ни одной точки этого множества. Отметим также, что для гиперэллиптических функций, находящихся в "общем положении", гипотеза Бейкера–Гаммеля–Уиллса верна (см. [6]–[8]). Голоморфный вариант гипотезы Бейкера–Гаммеля–Уиллса, а также гипотеза Шталя были опровергнуты Буслаевым [9] на основе периодической с периодом $m = 3$ непрерывной дроби

$$\frac{z|}{|3 - 3q^2z|} + \frac{qz^2|}{|3 - 3q^4z|} + \frac{q^2z^2|}{|3 - 3q^6z|} + \frac{q^3z^2|}{|3 - 3q^8z|} + \dots,$$

где

$$q = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Заметим, что при $q = \exp(2\pi i k/m)$, где $k, m \in \mathbb{N}$, непрерывная дробь (1) является периодической с периодом m дробью, функция (2) Роджерса–Рамануджана не определена, а функция H_q , к которой сходится непрерывная дробь (1), является гиперэллиптической функцией. В данной статье будет доказано сформулированное выше утверждение Любински для рациональных τ , т.е. для $q = \exp(2\pi i k/m)$, где $k, m \in \mathbb{N}$. Затем на основе доказанного утверждения будет показано, что функция $H_{\exp(\pi i/3)}$ является контрпримером к гипотезе Шталя. Заметим, что проверка условия $(\{|z| < \rho_q\} \cap \overline{\beta F_q}) \setminus F_q \neq \emptyset$, где ρ_q – радиус мероморфности функции H_q , $|\beta| = 1$, необходимого для того, чтобы функция H_q являлась контрпримером к гипотезе Шталя, оказывается с вычислительной точки зрения значительно более простой задачей по сравнению с непериодическим случаем, так как, во-первых, множество F_q полюсов функции H_q при $q = \exp(2\pi i k/m)$ – это некоторое подмножество множества корней многочлена $Q_{q,m-1}$ (см. ниже утверждение 1° дополнения к теореме), вычисляемого либо по известным рекуррентным соотношениям (см. ниже равенство (10)), либо непосредственно по формуле Хиршхорна (6), и во-вторых, число β может принимать только лишь конечное число значений, равных q^l , $l = 1, \dots, m$.

2. Формулировка результата. Перед формулировкой полученной в статье теоремы введем дополнительно к уже имеющимся следующие обозначения. Обозначим через Γ_m множество

$$\Gamma_m = \left\{ z \in \mathbb{C} : z^m = -\frac{t}{4}, 1 \leq t \leq \infty \right\}.$$

Заметим, что в $\mathbb{C} \setminus \Gamma_m$ определены две однозначные голоморфные ветви (отличающиеся знаком) гиперэллиптической функции $\sqrt{1 + 4z^m}$. Выберем ту из них, для которой $\sqrt{1 + 4z^m} = 1$ при $z = 0$. Как уже отмечалось, при $q = \exp(2\pi i k/m)$ функция $G_q(z)$ Роджерса–Рамануджана, а следовательно, и функция $H_q(z) = G_q(z)/G_q(qz)$ не определены. При $q = \exp(2\pi i k/m)$, где $k, m \in \mathbb{N}$ взаимно просты, и $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_m$ положим

$$H_q(z) = \frac{1 - 2zQ_{q,m-2}(z) + \sqrt{1 + 4z^m}}{2Q_{q,m-1}(z)}, \quad (8)$$

$$\tilde{H}_q(z) = \frac{1 - 2zQ_{q,m-2}(z) - \sqrt{1 + 4z^m}}{2Q_{q,m-1}(z)}, \quad (9)$$

где, как и выше, $Q_{q,n}(z)$ – это знаменатель n -й подходящей дроби непрерывной дроби (1), который может быть вычислен либо по формуле Хиршхорна (6), либо по известным

рекуррентным соотношениям (см. равенство (10)). Ниже будет показано, что функциональному уравнению (4) удовлетворяют и функция $H_q(z) = 1 + \dots$, определенная равенством (8), и функция $\tilde{H}_q(z) = -z + \dots$, определенная равенством (9). Основное содержание статьи составляет следующая теорема, распространяющая утверждение Любински на случай рациональных τ .

ТЕОРЕМА. Пусть $q = \exp(2\pi i k/m)$, где $k, m \in \mathbb{N}$ взаимно просты, $\Lambda^l = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv l \pmod{m}\}$, $l = 1, \dots, m$. Тогда

$$\lim_{n \in \Lambda^l} \pi_{q,n}(z) = H_q(z)$$

равномерно на компактах, лежащих в $(\mathbb{C}m \setminus \Gamma) \setminus (F_q \cup \overline{q^{2+l}F_q})$, где F_q – множество полюсов функции H_q . При этом при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_m$ имеет место неравенство $\tilde{H}_q(z) \neq H_q(z)$, а для всякого $l = 1, \dots, m$ и всякой точки $z_0 \in (\mathbb{C} \setminus \Gamma_m) \cap \overline{q^{2+l}F_q}$ при всех $n = 1, 2, \dots$ имеет место равенство $\pi_{q,nm+l}(z_0) = \tilde{H}_q(z_0)$.

В статье будет доказано также следующее дополнение к теореме, полезное при вычислении полюсов F_q функции H_q .

ДОПОЛНЕНИЕ К ТЕОРЕМЕ. В предположениях и обозначениях теоремы имеют место следующие утверждения.

1° Множество F_q полюсов функции H_q совпадает с множеством

$$\{z \in \mathbb{C} : Q_{q,m-1}(z) = 0, |Q_{q,m-2}(qz)| > |Q_{q,m-2}(z)|\}.$$

2° Множество $\tilde{F}_q$ полюсов функции $\tilde{H}_q$ совпадает с множеством

$$\{z \in \mathbb{C} : Q_{q,m-1}(z) = 0, |Q_{q,m-2}(qz)| < |Q_{q,m-2}(z)|\}.$$

Если $z_0 \in F_q$, то $\overline{qz_0} \in \tilde{F}_q$, и наоборот, если $z_0 \in \tilde{F}_q$, то $\overline{qz_0} \in F_q$.

3° Множество

$$F_q^* = \{z \in \mathbb{C} : Q_{q,m-1}(z) = 0, |Q_{q,m-2}(qz)| = |Q_{q,m-2}(z)|\}$$

принадлежит Γ_m . Если $z_0 \in F_q^*$, то и $\overline{qz_0} \in F_q^*$.

Дополнение к теореме показывает, что множество

$$\{z \in \mathbb{C} : Q_{q,m-1}(z) = 0\}$$

корней многочлена $Q_{q,m-1}$ можно представить в виде объединения трех непересекающихся множеств – F_q , $\tilde{F}_q$ и F_q^* . При этом множество F_q^* – это те нули многочлена $Q_{q,m-1}$, которые принадлежат множеству Γ_m , а множества F_q и $\tilde{F}_q$ полюсов функций H_q и $\tilde{H}_q$ равномошны. Из формулы Хиршхорна (6) следует, что степень многочлена $Q_{q,m-1}$ равна $[(m-1)/2]$ и, следовательно, совпадает с родом g_q гиперэллиптической функции H_q . Если ν_q – число точек множества F_q^* , μ_q – число точек каждого из множества F_q и $\tilde{F}_q$, то $\nu_q + 2\mu_q = g_q$. Заметим далее, что число “лишних” (spurious) полюсов аппроксимаций Паде (подходящей дроби) функции H_q , т.е. число полюсов аппроксимаций, не стремящихся к точкам множества $\Gamma_m \cup F_q$ особенностей функции H_q , совпадает с числом точек множества $\tilde{F}_q$. Поэтому число “лишних” полюсов аппроксимаций Паде функции H_q совпадает с $\mu_q = (g_q - \nu_q)/2$. Отсюда получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. Число “лишних” полюсов аппроксимаций Паде гиперэллиптической функции $H_{\exp(2\pi i\tau)}$, где τ рационально, не превосходит половины ее рода.

Кажется довольно естественным вопрос о справедливости аналогичного утверждения (с увеличенной верхней оценкой) не только для функции $H_{\exp(2\pi i\tau)}$, τ рационально, а для произвольной гиперэллиптической функции. В не совсем четком виде такой вопрос сформулирован в [5] как предположение Натолла, сообщенное им Шталю в частной беседе. Рассуждениями, аналогичными приводимым в статье для доказательства теоремы и ее дополнения, можно показать, что число “лишних” полюсов аппроксимаций Паде гиперэллиптической функции, представимой произвольной периодической непрерывной S -дробью

$$\frac{a_1 z}{1 + \frac{a_2 z}{1 + \dots}},$$

не превосходит ее рода.

3. Доказательство теоремы. При любом $q \in \mathbb{C}$ для знаменателей $Q_{q,n}(z)$ подходящих дробей непрерывной дроби (1) имеют место хорошо известные рекуррентные соотношения

$$Q_{q,n}(z) = Q_{q,n-1}(z) + q^n z Q_{q,n-2}(z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

с начальными условиями $Q_{q,-1}(z) = 0$, $Q_{q,0}(z) = 1$. Наряду с этими рекуррентными соотношениями для знаменателей $Q_{q,n}(z)$ при всех $n = 0, 1, \dots$ имеют место также и равенства

$$Q_{q,n}(z) = Q_{q,n-1}(qz) + q^2 z Q_{q,n-2}(q^2 z), \quad (11)$$

$$Q_{q,n}(z) = \overline{Q_{q,n}(\overline{q^{n+2}z})}. \quad (12)$$

Равенства (11), (12) могут быть получены либо из формулы (6) Хиршхорна, либо индукцией по n из рекуррентных соотношений (10). Действительно, при $n = 1, 2$ справедливость равенств (11), (12) проверяется непосредственно. В справедливости равенства (11) при $n > 2$ убеждаемся, применив к каждому его слагаемому рекуррентное соотношение (10) и воспользовавшись затем индуктивным предположением. В справедливости равенства (12) при $n > 2$ убеждаемся, применив к левой его части рекуррентное соотношение (10), к правой – уже доказанное равенство (11), и воспользовавшись затем индуктивным предположением.

Пусть $k, m \in \mathbb{N}$ – взаимно простые числа, и пусть $q = \exp(2\pi i k/m)$. Положим

$$S(w, z) = \frac{z}{w + 1}, \quad S_{q,n}(w, z) = S(w, qz) \circ \dots \circ S(w, q^n z).$$

Из хорошо известных в теории непрерывных дробей формул для коэффициентов композиции дробно-линейных преобразований, соответствующих непрерывной дроби, следует, что

$$S_{q,n}(w, z) = \frac{(P_{q,n-1}(z) - Q_{q,n-1}(z))w + P_{q,n}(z) - Q_{q,n}(z)}{Q_{q,n-1}(z)w + Q_{q,n}(z)}. \quad (13)$$

Отсюда, из равенства $P_{q,n}(z) = Q_{q,n+1}(q^{-1}z)$ и равенства (11) получаем при $n = m$ равенство

$$S_{q,m}(w, z) = \frac{qz Q_{q,m-2}(qz)w + qz Q_{q,m-1}(qz)}{Q_{q,m-1}(z)w + Q_{q,m}(z)}. \quad (14)$$

Положим

$$\begin{aligned}\Delta_q(z) &= qzQ_{q,m-2}(qz)Q_{q,m}(z) - qzQ_{q,m-1}(qz)Q_{q,m-1}(z), \\ I_q(z) &= qzQ_{q,m-2}(qz) + Q_{q,m}(z)\end{aligned}$$

и покажем, что

$$\Delta_q(z) = -z^m \quad \text{и} \quad I_q(z) = 1. \quad (15)$$

Действительно, легко видеть, что $\Delta_q(z)$ и $I_q(z)$ совпадают соответственно с определителем и следом матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & qz \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \cdots \times \begin{pmatrix} 0 & q^m z \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Поэтому

$$\Delta_q(z) = \prod_{l=1}^m (-q^l z) = (-1)^m q^{m(m+1)/2} z^m = -z^m.$$

Так как след произведения матриц не изменяется при их круговой перестановке, то многочлен $I_q(z)$ не изменяется при замене $z \rightarrow qz$. Из формулы (6) Хиршхорна следует, что $\deg Q_n(z) = [n/2]$. Следовательно,

$$\deg I_q(z) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor < m.$$

Поэтому $I_q(z) = \text{const}$. Так как $I_q(0) = 1$, то $I_q(z) = 1$.

Из явного вида (14) дробно-линейного преобразования $S_{q,m}(w, z)$ и равенств (15) следует, что при любом фиксированном $z \in \mathbb{C}$ неподвижные точки дробно-линейного преобразования $S_{q,m}(w, z)$ вычисляются по формуле

$$\frac{qzQ_{q,m-2}(qz) - Q_{q,m}(z) \pm \sqrt{1 + 4z^m}}{2Q_{q,m-1}(z)}.$$

Из второго из равенств (15), рекуррентного соотношения (10) и равенства $q^m = 1$ следует, что

$$qzQ_{q,m-2}(qz) - Q_{q,m}(z) = 1 - 2Q_{q,m}(z) = 1 - 2Q_{q,m-1}(z) - 2zQ_{q,m-2}(z).$$

Поэтому неподвижные точки дробно-линейного преобразования $S_{q,m}(w, z)$ совпадают с функциями $H_q(z) - 1$ и $\tilde{H}_q(z) - 1$.

Нетрудно показать (см., например, [9]), что множество тех $z \in \mathbb{C}$, при которых неподвижные точки дробно-линейного преобразования $S_{q,m}(w, z)$ нейтральны, совпадает с множеством

$$\{z \in \mathbb{C}: |1 + \sqrt{1 + 4z^m}| = |1 - \sqrt{1 + 4z^m}|\} = \left\{z \in \mathbb{C}: z^m = -\frac{t}{4}, \quad 1 \leq t \leq \infty\right\},$$

т.е. с множеством Γ_m . При указанном выше выборе ветви функции $\sqrt{1 + 4z^m}$ при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_m$ имеет место неравенство

$$|1 + \sqrt{1 + 4z^m}| > |1 - \sqrt{1 + 4z^m}|. \quad (17)$$

Это неравенство означает, что при $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_m$ функция $H_q(z) - 1$ является притягивающей неподвижной точкой дробно-линейного преобразования $S_{q,m}(w, z)$, а функция $\tilde{H}_q(z) - 1$ – отталкивающей, т.е.

$$\left| \frac{\partial S_{q,m}(w, z)}{\partial w} \right|_{w=H_q(z)-1} < 1 < \left| \frac{\partial S_{q,m}(w, z)}{\partial w} \right|_{w=\tilde{H}_q(z)-1}.$$

Так как притягивающая и отталкивающая точки дробно-линейного преобразования не могут совпадать между собой, то отсюда следует, в частности, что $H_q(z) \neq \tilde{H}_q(z)$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_m$.

Покажем, что для функций $H_q(z)$ и $\tilde{H}_q(z)$, определенных равенствами (8) и (9), имеет место функциональное равенство (4), т.е. покажем, что при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_m$

$$H_q(z) = 1 + \frac{qz}{H_q(qz)} \quad \text{и} \quad \tilde{H}_q(z) = 1 + \frac{qz}{\tilde{H}_q(qz)}. \quad (18)$$

Заметим, что $H_q(qz) - 1$ и $\tilde{H}_q(qz) - 1$ являются притягивающей и отталкивающей неподвижными точками дробно-линейного преобразования

$$S_{q,m}(w, qz) = S(w, q^2z) \circ \dots \circ S(w, q^{m+1}z) = S(w, qz)^{-1} \circ S_{q,m}(w, z) \circ S(w, qz).$$

Поэтому

$$H_q(qz) - 1 = S(w, qz)^{-1}|_{w=H_q(z)-1} \quad \text{и} \quad \tilde{H}_q(qz) - 1 = S(w, qz)^{-1}|_{w=\tilde{H}_q(z)-1},$$

т.е.

$$H_q(z) - 1 = S(w, qz)|_{w=H_q(qz)-1} \quad \text{и} \quad \tilde{H}_q(z) - 1 = S(w, qz)|_{w=\tilde{H}_q(qz)-1}. \quad (19)$$

Непосредственно из определения дробно-линейного преобразования $S(w, z)$ следует, что равенства (19) совпадают с равенствами (18).

Из явного вида (14) дробно-линейного преобразования $S_{q,m}(w, z)$ следует, что множество тех $z \in \mathbb{C}$, для которых точка $w = 0$ является неподвижной точкой преобразования $S_{q,m}(w, z)$, совпадает с множеством

$$\{z \in \mathbb{C}: qzQ_{q,m-1}(qz) = 0\}.$$

Обозначим через E_q множество тех $z \in \mathbb{C}$, для которых точка $w = 0$ является отталкивающей неподвижной точкой дробно-линейного преобразования $S_{q,m}(w, z)$, т.е. для которых $\tilde{H}_q(z) - 1 = 0$. Из определения отталкивающей неподвижной точки следует, что

$$E_q = \left\{ z \in \mathbb{C}: qzQ_{q,m-1}(qz) = 0, \left| \frac{\partial S_{q,m}(w, z)}{\partial w} \right|_{w=0} > 1 \right\}.$$

Отсюда, из равенства

$$\frac{\partial S_{q,m}(w, z)}{\partial w} \Big|_{w=0} = \frac{qzQ_{q,m-2}(qz)}{Q_{q,m}(z)}$$

и равенства (11) получаем равенство

$$E_q = \left\{ z \in \mathbb{C}: Q_{q,m-1}(qz) = 0, \left| \frac{Q_{q,m-2}(qz)}{Q_{q,m-2}(q^2z)} \right| > 1 \right\}. \quad (20)$$

Хорошо известно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{S_{q,m}(w, z) \circ \dots \circ S_{q,m}(w, z)}_n \Big|_{w=0} = H_q(z) - 1$$

равномерно в сферической метрике на компактах, лежащих в $(\mathbb{C} \setminus \Gamma_m) \setminus E_q$, и очевидно, что

$$\underbrace{S_{q,m}(w, z) \circ \dots \circ S_{q,m}(w, z)}_n \Big|_{w=0} = 0 = \tilde{H}_q(z) - 1 \quad \text{при } z \in E_q \text{ и всех } n = 1, 2, \dots$$

Отсюда, из определения подпоследовательности Λ^l , явного вида (13) дробно-линейных преобразований $S_{q,n}(w, z)$ и равенства

$$S_{q,nm}(w, z) = \underbrace{S_{q,m}(w, z) \circ \dots \circ S_{q,m}(w, z)}_n$$

следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \in \Lambda^l} \pi_{q,n}(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{q,nm+l}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{q,nm+l}(z)}{Q_{q,nm+l}(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + S_{q,nm+l}(0, z)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + S(w, qz) \circ \dots \circ S(w, q^l z) \circ \underbrace{S_{q,m}(w, q^l z) \circ \dots \circ S_{q,m}(w, q^l z)}_n \Big|_{w=0} \right) \\ &= 1 + S(w, qz) \circ \dots \circ S(w, q^l z) \Big|_{w=H_q(q^l z)-1} \end{aligned}$$

равномерно в сферической метрике на компактах, лежащих в $(\mathbb{C} \setminus \Gamma_m) \setminus q^{-l}E_q$, и

$$\pi_{q,nm+l}(z) = 1 + S(w, qz) \circ \dots \circ S(w, q^l z) \Big|_{w=\tilde{H}_q(q^l z)-1} \quad \text{при } z \in q^{-l}E_q.$$

Отсюда и из равенств (19) следует, что

$$\lim_{n \in \Lambda^l} \pi_{q,n}(z) = H_q(z)$$

равномерно на компактах, лежащих в $(\mathbb{C} \setminus \Gamma_m) \setminus (q^{-l}E_q \cup F_q)$, и

$$\pi_{q,nm+l}(z) = \tilde{H}_q(z) \quad \text{при } z \in q^{-l}E_q \text{ и всех } n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно доказать, что $q^{-l}E_q = \overline{q^{2+l}F_q}$, т.е. $E_q = \overline{q^2F_q}$. Докажем это равенство после доказательства дополнения к теореме. Пусть z_0 – корень многочлена $Q_{q,m-1}(z)$. Тогда из рекуррентного соотношения (10) и равенства $q^m = 1$ следует, что

$$Q_{q,m}(z_0) = z_0 Q_{q,m-2}(z_0).$$

Поэтому из равенства (14) при $z = z_0$ получаем равенство

$$\begin{aligned} S_{q,m}(w, z_0) &= \frac{qz_0 Q_{q,m-2}(qz_0)w + qz_0 Q_{q,m-1}(qz_0)}{Q_{q,m}(z_0)} \\ &= q \left(\frac{Q_{q,m-2}(qz_0)}{Q_{q,m-2}(z_0)} w + \frac{Q_{q,m-1}(qz_0)}{Q_{q,m-2}(z_0)} \right). \end{aligned}$$

Из полученного равенства видно, что точка $w = \infty$ является неподвижной точкой дробно-линейного преобразования $S_{q,m}(w, z_0)$. Если

$$\left| \frac{Q_{q,m-2}(qz_0)}{Q_{q,m-2}(z_0)} \right| > 1,$$

то точка $w = \infty$ является притягивающей, т.е. функция $H_q(z)$ имеет в точке z_0 полюс; если

$$\left| \frac{Q_{q,m-2}(qz_0)}{Q_{q,m-2}(z_0)} \right| < 1,$$

то точка $w = \infty$ является отталкивающей, т.е. функция $\tilde{H}_q(z)$ имеет в точке z_0 полюс; если

$$\left| \frac{Q_{q,m-2}(qz_0)}{Q_{q,m-2}(z_0)} \right| = 1,$$

то точка $w = \infty$ является нейтральной и, следовательно, точка z_0 принадлежит множеству Γ_m . Таким образом множества F_q , $\tilde{F}_q$ и F_q^* совпадают с множествами, указанными в дополнении к теореме.

Докажем теперь, что $\tilde{F}_q = \overline{qF_q}$, $F_q^* = \overline{qF_q^*}$ и $E_q = \overline{q^2F_q}$. Пусть z_0 – корень многочлена $Q_{q,m-1}(z)$. Из равенства (12) следует, что $\tilde{z}_0 = \overline{qz_0}$ также является корнем этого многочлена и

$$\frac{Q_{q,m-2}(q\tilde{z}_0)}{Q_{q,m-2}(\tilde{z}_0)} = \frac{\overline{Q_{q,m-2}(q\tilde{z}_0)}}{\overline{Q_{q,m-2}(\tilde{z}_0)}} = \frac{\overline{Q_{q,m-2}(z_0)}}{\overline{Q_{q,m-2}(qz_0)}},$$

т.е.

$$\left| \frac{Q_{q,m-2}(q\tilde{z}_0)}{Q_{q,m-2}(\tilde{z}_0)} \right| = \left| \frac{Q_{q,m-2}(qz_0)}{Q_{q,m-2}(z_0)} \right|^{-1}.$$

Отсюда следуют равенства $\tilde{F}_q = \overline{qF_q}$ и $F_q^* = \overline{qF_q^*}$. Из определения (20) множества E_q и уже доказанного утверждения 2° дополнения к теореме следует, что $E_q = q^{-1}\tilde{F}_q$. Отсюда и из уже доказанного равенства $\tilde{F}_q = \overline{qF_q}$ следует, что $E_q = \overline{q^2F_q}$. Таким образом, теорема и ее дополнение доказаны.

4. Контрпример к гипотезе Шталя. Пусть $q = \exp(2\pi ik/m)$, где $k, m \in \mathbb{N}$ взаимно просты. Как уже отмечалось во введении, из доказанной теоремы следует, что функция H_q будет являться контрпримером к гипотезе Шталя, если при всех $l = 1, \dots, m$ будут непусты множества

$$(\overline{q^l F_q} \cap D_q) \setminus F_q,$$

где $D_q = \{|z| < 4^{-1/m}\}$ – круг мероморфности функции H_q . Пусть $k = 1$, $m = 6$. Тогда $q = (1 + i\sqrt{3})/2$,

$$Q_{q,m-2}(z) = Q_{q,4}(z) = 1 + zq^2 \frac{1-q^3}{1-q} + z^2 q^6 = 1 - 2z + z^2,$$

$$Q_{q,m-1}(z) = Q_{q,5}(z) = 1 + zq^2 \frac{1-q^4}{1-q} + z^2 q^6 \frac{1-q^3}{1-q} = 1 - z(1+q) + 2z^2 q.$$

Многочлен $Q_{q,5}(z)$ имеет два корня

$$z_1 \approx 0.654508 + 0.267617i \quad \text{и} \quad z_2 \approx 0.0954915 - 0.700629i.$$

Легко проверяется, что $|z_1| = |z_2| \approx 0.707107$, $4^{-1/6} \approx 0.793701$,

$$|Q_{q,4}(qz_1)/Q_{q,4}(z_1)| \approx 6.8541 \quad \text{и} \quad |Q_{q,4}(qz_2)/Q_{q,4}(z_2)| \approx 0.145898,$$

и, следовательно,

$$|z_1| = |z_2| < 4^{-1/6}, \quad \left| \frac{Q_{q,4}(qz_1)}{Q_{q,4}(z_1)} \right| > 1, \quad \left| \frac{Q_{q,4}(qz_2)}{Q_{q,4}(z_2)} \right| < 1.$$

Поэтому $F_q = \{z_1\} = F_q \cap D_q$. Отсюда следует, что множества $\overline{q^l F_q} \cap D_q$ при $l = 1, \dots, 6$ приближенно совпадают соответственно с одноточечными множествами

$$\begin{aligned} \{0.0954915 - 0.700629i\}, \quad \{-0.559017 - 0.433013i\}, \quad \{-0.654508 + 0.267617i\}, \\ \{-0.0954915 + 0.700629i\}, \quad \{0.559017 + 0.433013i\}, \quad \{0.654508 - 0.267617i\}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что ни одно из множеств

$$\overline{q^l F_q} \cap D_q, \quad l = 1, \dots, 6,$$

не совпадает с множеством F_q . Таким образом, функция $H_{\exp(2\pi i/6)}$ является контр-примером к гипотезе Шталя. Легко видеть, что приведенные вычисления не слишком трудоемки и могут быть выполнены без использования компьютера.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Worpitsky J. // Untersuchungen über die Entwicklung der monodromen und monogenen Funktionen durch Kettenbrüche. Berlin: Friedrichs-Gymnasium und Realschule Jahresbericht, 1865. P. 3–39.
- [2] Hirschhorn M. D. Partitions and Ramanujan's continued fraction // Duke Math. J. 1972. V. 39. P. 789–791.
- [3] Lubinsky D. S. Rogers–Ramanujan and the Baker–Gammel–Wills (Padé) conjecture // Ann. of Math. 2003. V. 157. №3. P. 847–889.
- [4] Baker G. A., Gammel J. L., Wills J. G. An investigation of the applicability of the Padé approximant method // J. Math. Anal. Appl. 1961. V. 2. P. 405–418.
- [5] Stahl H. Conjectures around Baker–Gammel–Wills conjecture: Research problems 97-2 // Constructive Approx. 1997. V. 13. P. 287–292.
- [6] Stahl H. Diagonal Padé approximants to hyperelliptic functions // Ann. Fac. Sci. Toulouse. Math. 1996. V. 6. P. 121–193.
- [7] Суетин С. П. О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Падэ для гиперэллиптических функций // Матем. сб. 2000. Т. 191. №9. С. 81–114.
- [8] Суетин С. П. Аппроксимации Падэ и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда // УМН. 2002. Т. 57. №1. С. 45–142.
- [9] Буслаев В. И. О гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса в теории аппроксимаций Падэ // Матем. сб. 2002. Т. 193. №6. С. 25–38.