Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Муравник, О стабилизации решений некоторых сингулярных квазилинейных параболических задач, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 6, 858–865

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm312>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 11:17:18

УДК 517.956

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

А. Б. Муравник

В работе исследуются сингулярные параболические уравнения с “квадратичной нелинейностью”. Рассматриваются вопросы однозначной разрешимости, стабилизации решений на бесконечности, наличия положительных решений.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Часто встречающиеся в приложениях сингулярные уравнения, содержащие оператор Бесселя

$$\frac{1}{y^k} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^k \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y} \frac{\partial}{\partial y},$$

действующий по одной из пространственных переменных, являются актуальной и быстро развивающейся областью исследований (см. [1] и имеющуюся там библиографию). В основном, однако, эти исследования посвящены линейным уравнениям. Нелинейный же случай изучен в значительно меньшей степени (см., например, [2] и [3] о разрешимости эллиптических задач). В настоящей работе исследуются сингулярные параболические уравнения с нелинейными членами вида $g(u)|\nabla u|^2$, где $g(s)$ – либо непрерывная функция, либо C/s^β , $\beta \leq 1$. Изучается поведение при $t \rightarrow \infty$ ограниченных решений сингулярной задачи Коши для таких уравнений; устанавливается необходимое и достаточное условие стабилизации указанных решений. Полученное условие стабилизации представляет собой существование конечного предела некоторого нелинейного весового среднего от начальной функции задачи (которая предполагается ограниченной). Отметим, что нелинейности указанного вида (т.е. содержащие квадрат первой производной неизвестной функции) в регулярном случае изучались многими авторами (см., например, [4] и имеющуюся там библиографию) и возникают, например, в задачах о направленном росте полимеров и задачах помехоустойчивости (см. [5] и [6]).

В регулярном случае стабилизации решений (линейных) параболических уравнений посвящена весьма обширная литература (см., например, [7] и имеющуюся там библиографию).

2. Однозначная разрешимость. Рассматривается следующая задача:

$$q(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_B u + g(u) |\nabla u|^2, \quad x \in \overline{\mathbb{R}}_+^n, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} \Big|_{x_n=0} = 0, \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \stackrel{\text{def}}{=} x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \overline{\mathbb{R}}_+^n. \quad (3)$$

Здесь

$$\Delta_B = \Delta + \frac{k}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n},$$

$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$, $k > 0$, g непрерывна, q удовлетворяет следующим условиям:

- а) существует такое $\gamma \in (0, 1)$, что $q \in H_{[(n+k)/2]}^\gamma(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$, где $[\kappa]$ – целая часть κ , H – пространство Гёльдера;
- б) $q(x) \geq q_0 > 0$;
- в) $(\partial^m q)/(\partial x_n^m)|_{x_n=0} = 0$ для $m = 1, \overline{[(n+k)/2]}$;
- г) (весовое условие Гущина-Михайлова) существует такое вещественное b , что равномерно относительно $x \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ выполнено

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{n+k}} \int_{B_+(r)} \xi_n^k T_{\xi_n}^{x_n} |q(\xi' + x', \xi_n) - b| d\xi = 0,$$

где $B_+(r)$ – полушар $\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid |x| < r\}$, T – оператор обобщенного сдвига (см. [8]).

Будем считать, что u_0 непрерывна и ограничена. Обозначим $\inf u_0$ через m , $\sup u_0$ – через M .

Определим $f(s)$ как $\int_0^s \exp\left(\int_0^x g(\tau) d\tau\right) dx$. Тогда

$$f'(s) = \exp\left(\int_0^s g(\tau) d\tau\right) > 0, \quad f''(s) = g(s) \exp\left(\int_0^s g(\tau) d\tau\right),$$

следовательно, $g(s) = f''(s)/f'(s)$, где f – строго монотонная функция. Тогда функция $v_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} f[u_0(x)]$ тоже ограничена: $f(m) \leq v_0(x) \leq f(M)$ в силу непрерывности и ограниченности f . В силу [9] отсюда следует, что существует и единственно классическое ограниченное решение следующей задачи:

$$q(x) \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta_B v, \quad x \in \overline{\mathbb{R}}_+^n, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_n} \Big|_{x_n=0} = 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$v|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \overline{\mathbb{R}}_+^n, \quad (6)$$

причем $f(m) \leq v(x, t) \leq f(M)$ на всей $\overline{\mathbb{R}}_+^n \times [0, +\infty)$.

Поскольку f строго монотонна, на $[f(m), f(M)]$ определена f^{-1} со значениями в $[m, M]$; обозначим $f^{-1}[v(x, t)]$ через $u(x, t)$.

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (f^{-1})'(v) \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{f'(u)} \frac{\partial v}{\partial t}$$

(поскольку f , а значит, и f^{-1} , строго монотонны, то теорема о производной обратной функции применима). Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = (f^{-1})'(v) \frac{\partial v}{\partial x_j} = \frac{1}{f'(u)} \frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n},$$

т.е.

$$|\nabla u|^2 = \frac{1}{[f'(u)]^2} |\nabla v|^2;$$

при этом из положительности функции f' следует, в частности, что $(\partial u)/(\partial x_n)|_{x_n=0} = 0$ тогда и только тогда, когда $(\partial v)/(\partial x_n)|_{x_n=0} = 0$, т.е. построенная $u(x, t)$ удовлетворяет условию четности (2). Далее, для $j = \overline{1, n}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = (f^{-1})''(v) \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 + (f^{-1})'(v) \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = \frac{1}{f'(u)} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} - \frac{f''(u)}{[f'(u)]^3} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2,$$

следовательно,

$$\Delta_B u = \frac{1}{f'(u)} \left(\Delta_B v - \frac{f''(u)}{[f'(u)]^2} |\nabla v|^2 \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} q(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_B u - g(u) |\nabla u|^2 \\ = q(x) \frac{1}{f'(u)} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{f'(u)} \left(\Delta_B v - \frac{f''(u)}{[f'(u)]^2} |\nabla v|^2 \right) - \frac{f''(u)}{f'(u)} |\nabla u|^2 \\ = \frac{1}{f'(u)} \left(q(x) \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta_B v + \left(\frac{f''(u)}{[f'(u)]^2} - \frac{f''(u)}{[f'(u)]^2} \right) |\nabla v|^2 \right). \end{aligned}$$

Последнее выражение равно нулю, поскольку f' в нуль не обращается, а $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению (4); следовательно, $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1).

Наконец, $u|_{t=0} = f^{-1}(v)|_{t=0} = f^{-1}(v|_{t=0})$ (в силу непрерывности f^{-1}), т.е. $u|_{t=0} = f^{-1}(v_0) = u_0$, значит, $u(x, t)$ удовлетворяет также и начальному условию (3).

Таким образом, существование ограниченного (так как значения функции f^{-1} лежат в $[m, M]$) классического решения задачи (1)–(3) доказано.

Для доказательства его единственности предположим, напротив, что существуют два различных ограниченных решения задачи (1)–(3); обозначим их через $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$. Определим $v_i(x, t)$ как $f[u_i(x, t)]$, где $i = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} = f'(u_i) \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f'(u_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} = f''(u_i) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + f'(u_i) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad i = 1, 2, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Отсюда для $i = 1, 2$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} q(x) \frac{\partial v_i}{\partial t} - \Delta_B v_i &= f'(u_i) q(x) \frac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta v_i - \frac{k}{x_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_n} \\ &= f'(u_i) q(x) \frac{\partial u_i}{\partial t} - f'(u_i) \Delta u_i - f''(u_i) |\nabla u_i|^2 - \frac{k}{x_n} f'(u_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \\ &= f'(u_i) \left[q(x) \frac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta_B u_i - \frac{f''(u_i)}{f'(u_i)} |\nabla u_i|^2 \right] \\ &= f'(u_i) \left[q(x) \frac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta_B u_i - g(u_i) |\nabla u_i|^2 \right] = 0, \end{aligned}$$

поскольку u_1, u_2 удовлетворяют уравнению (1).

Таким образом, $v_1(x, t), v_2(x, t)$ удовлетворяют уравнению (4).

Кроме того, из

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_n} = f'(u_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_n}, \quad i = 1, 2,$$

следует, что v_1, v_2 удовлетворяют условию (5). Наконец, в силу непрерывности функции f и ограниченности функций u_1, u_2 функции v_1, v_2 тоже ограничены (как непрерывная функция f на отрезках $[\inf u_1, \sup u_1], [\inf u_2, \sup u_2]$ соответственно), и удовлетворяют условию (6) с одной и той же начальной функцией $v_0 = f[u_0(x)]$.

Значит, $v_1(x, t), v_2(x, t)$ – классические ограниченные решения задачи (4)–(6). Отсюда в силу [9] $v_1(x, t) \equiv v_2(x, t)$, что противоречит обратимости функции f . Полученное противоречие и доказывает единственность. Тем самым доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для любой непрерывной и ограниченной $u_0(x)$ существует и единственно классическое ограниченное решение задачи (1)–(3).*

3. Стабилизация решений. Пусть $u(x, t)$ – классическое ограниченное решение задачи (1)–(3); тогда, как доказано в предыдущем пункте, $v(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} f[u(x, t)]$ – классическое ограниченное решение задачи (4)–(6). Из [10] известно следующее необходимое и достаточное условие стабилизации $v(x, t)$.

КРИТЕРИЙ СТАБИЛИЗАЦИИ. Пусть $l \in \mathbb{R}^1$. Тогда для любого $x \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ имеет место эквивалентность

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = l \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(n+k)\Gamma((n+k)/2)}{\pi^{(n-1)/2}\Gamma((k+1)/2)r^{n+k}} \int_{B_+(r)} x_n^k v_0(x) dx = l,$$

т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f[u(x, t)] = l \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(n+k)\Gamma((n+k)/2)}{\pi^{(n-1)/2}\Gamma((k+1)/2)r^{n+k}} \int_{B_+(r)} x_n^k f[u_0(x)] dx = l.$$

В силу непрерывности и обратимости f эту эквивалентность можно переписать так:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = f^{-1}(l) \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(n+k)\Gamma((n+k)/2)}{\pi^{(n-1)/2}\Gamma((k+1)/2)r^{n+k}} \int_{B_+(r)} x_n^k f[u_0(x)] dx = l.$$

Обозначая $f^{-1}(l)$ через A (при этом, очевидно, $l = f(A)$), получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A \in \mathbb{R}^1$, $u(x, t)$ – классическое ограниченное решение задачи (1)–(3). Тогда для любого $x \in \mathbb{R}_+^n$ имеет место эквивалентность

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(n+k)\Gamma((n+k)/2)}{\pi^{(n-1)/2}\Gamma((k+1)/2)r^{n+k}} \int_{B_+(r)} x_n^k f[u_0(x)] dx = f(A),$$

$$\text{где } f(s) = \int_0^s \exp\left(\int_0^x g(\tau) d\tau\right) dx.$$

4. Случай сингулярного коэффициента при нелинейности. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_B u + \frac{\alpha}{u} |\nabla u|^2, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad t > 0, \quad (7)$$

где $\alpha > -1$. Будем искать его положительные решения. Функция $g(s) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha/s$ не удовлетворяет условиям теорем 1, 2, однако в данном случае (т.е. при постоянном коэффициенте при производной по времени) задачу (7), (2), (3) все-таки можно свести к линейной задаче следующим образом.

Определим на $(0, +\infty)$ функцию $f(s) \stackrel{\text{def}}{=} s^{\alpha+1}$; тогда $f'(s) = (\alpha+1)s^\alpha$, $f''(s) = \alpha(\alpha+1)s^{\alpha-1}$, т.е. $f''(s)/f'(s) = \alpha/s$.

Пусть $u_0(x)$ непрерывна, ограничена, неотрицательна и нетривиальна. Обозначим $f[u_0(x)] = u_0^{\alpha+1}(x)$ через $v_0(x)$. Тогда $v_0(x)$ тоже непрерывна, ограничена, неотрицательна и нетривиальна, следовательно, существует ограниченное решение $v(x, t)$ задачи (4)–(6) при $q(x) \equiv 1$. Докажем, что оно положительно.

Известно (см., например, [11]), что

$$v(0, t) = \frac{C_{n,k}}{t^{(n+k)/2}} \int_{\mathbb{R}_+^n} x_n^k v_0(x) e^{-|x|^2/(4t)} dx > 0$$

(поскольку $u_0(x)$ неотрицательна и нетривиальна). Теперь возьмем произвольное $h \stackrel{\text{def}}{=} (h', h_n) \stackrel{\text{def}}{=} (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и рассмотрим функцию

$$w_h(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} w(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} T_{x_n}^{h_n} v(x' + h', x_n, t).$$

Производная

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x_n} \right|_{x_n=0} = 0,$$

а оператор обобщенного сдвига коммутирует с оператором Бесселя (см., например, [8]), поэтому $w(x, t)$ удовлетворяет задаче (4)–(6) с начальной функцией

$$\begin{aligned} w_0(x) &\stackrel{\text{def}}{=} T_{x_n}^{h_n} v_0(x' + h', x_n) \\ &= \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(k/2)} \int_0^\pi v_0(x' + h', \sqrt{x_n^2 + h_n^2 - 2x_n h_n \cos \theta}) \sin^{k-1} \theta d\theta. \end{aligned}$$

Таким образом, $w_0(x)$ непрерывна, неотрицательна и ограничена. Следовательно,

$$w(0, t) = \frac{C_{n,k}}{t^{(n+k)/2}} \int_{\mathbb{R}_+^n} x_n^k w_0(x) e^{-|x|^2/(4t)} dx > 0$$

(очевидно, $w_0(x)$ тоже нетривиальна). Однако $w(0, t) = T_0^{h_n} v(h', 0, t) = v(h, t)$; в силу произвольности выбора h положительность v доказана.

Обозначим $1/(\alpha + 1)$ через p и определим $u(x, t)$ как $v^p(x, t)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p v^{p-1} \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = p v^{p-1} \frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = p(p-1) v^{p-2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 + p v^{p-1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}, \quad j = \overline{1, n},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_B u - \frac{\alpha}{u} |\nabla u|^2 &= p v^{p-1} \frac{\partial v}{\partial t} - p(p-1) v^{p-2} |\nabla v|^2 - p v^{p-1} \Delta v \\ &\quad - \frac{k}{x_n} p v^{p-1} \frac{\partial v}{\partial x_n} - \frac{\alpha}{v^p} \sum_{j=1}^n \left(p v^{p-1} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 \\ &= p v^{p-1} \frac{\partial v}{\partial t} - p(p-1) v^{p-2} |\nabla v|^2 - p v^{p-1} \Delta_B v - \frac{1-p}{p v^p} p^2 v^{2p-2} |\nabla v|^2 \\ &= p v^{p-1} \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta_B v \right) = 0 \end{aligned}$$

(так как v ограничена и положительна), значит, определенная выше функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (7).

Далее, $u|_{t=0} = (v|_{t=0})^p = v_0^p(x) = u_0(x)$, т.е. $u(x, t)$ удовлетворяет и начальному условию (3). Кроме того, из соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = p v^{p-1} \frac{\partial v}{\partial x_n},$$

а также из положительности и ограниченности $v(x, t)$, следует, что $u(x, t)$ удовлетворяет и условию четности (2). Наконец, u ограничена и положительна в силу ограниченности и положительности v .

Итак, доказано существование ограниченного положительного решения задачи (7), (2), (3). Его единственность, как и в п. 2, вытекает из единственности ограниченного решения задачи (4)–(6).

Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА 3. *Для любой непрерывной, ограниченной, неотрицательной и нетривиальной $u_0(x)$ существует и единственно классическое положительное ограниченное решение задачи (7), (2), (3).*

Далее, поскольку $u(x, t) = v^p(x, t)$, а для $v(x, t)$ результаты работы [10] справедливы, для любого неотрицательного l выполняется следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Для любого $x \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ имеет место эквивалентность*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u^{\alpha+1}(x, t) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(n+k)\Gamma((n+k)/2)}{\pi^{(n-1)/2}\Gamma((k+1)/2)r^{n+k}} \int_{B_+(r)} x_n^k u_0^{\alpha+1}(x) dx = l.$$

Значит, для любого $x \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = l^p \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(n+k)\Gamma((n+k)/2)}{\pi^{(n-1)/2}\Gamma((k+1)/2)r^{n+k}} \int_{B_+(r)} x_n^k u_0^{\alpha+1}(x) dx = l.$$

Обозначим l^p через A ; тогда $l = A^{1/p} = A^{\alpha+1}$; тем самым доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $A \geq 0$, $u_0(x)$ непрерывна, ограничена и неотрицательна, $u(x, t)$ – классическое положительное ограниченное решение задачи (7), (2), (3). Тогда для любого $x \in \mathbb{R}_+^n$ имеет место эквивалентность

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = A \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(n+k)\Gamma((n+k)/2)}{\pi^{(n-1)/2}\Gamma((k+1)/2)r^{n+k}} \int_{B_+(r)} x_n^k u_0^{\alpha+1}(x) dx = A^{\alpha+1}.$$

Таким же образом теоремы об однозначной разрешимости и о стабилизации решения доказываются и для случая, когда в уравнении (1) $g(s) = C/s^\beta$, $\beta \in (0, 1)$. В этом случае $f(s)$ определяется так же, как и в пп. 2, 3, т.е.

$$f(s) = \int_0^s \exp\left(\int_0^x g(\tau) d\tau\right) dx = \int_0^s \exp\left(\frac{C}{1-\beta} x^{1-\beta}\right) dx.$$

Более того, в этом случае f' определена и положительна не только на $(0, +\infty)$, как при $\beta = -1$, но и на $[0, +\infty)$. А это значит, что положительность решения не требуется – достаточно его неотрицательности, обеспечиваемой принципом максимума (см. [9]) и в том случае, когда $q(x)$ не является константой.

Таким образом, для уравнения

$$q(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_B u + \frac{C}{u^\beta} |\nabla u|^2 \quad (8)$$

при $\beta \in (0, 1)$ и произвольном вещественном C справедлива

ТЕОРЕМА 5. Для любой непрерывной, ограниченной, неотрицательной $u_0(x)$ существует и единственно классическое неотрицательное ограниченное решение задачи (8), (2), (3).

Для неотрицательного ограниченного решения задачи (8), (2), (3) справедлива теорема 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если вместо условия положительности начальной функции наложить более сильное условие ее положительной определенности (т.е. $u_0(x) \geq a > 0$), то для задачи (7), (2), (3) утверждения теорем 3, 4 будут справедливы и при $\alpha < -1$. Действительно, в этом случае $v_0(x)$, и, тем самым, $v(x, t)$, ограничены:

$$v_0(x) = u_0^{1/(\alpha+1)}(x) \in [(\sup u_0)^{1/(\alpha+1)}, a^{1/(\alpha+1)}];$$

следовательно, ограничена и $u(x, t)$; более того, в этом случае для задачи (7), (2), (3) справедливы и утверждения теорем 1, 2, поскольку функция g интегрируема на множестве значений функции $u_0(x)$, а вне указанного множества мы можем, не ограничивая общности, доопределить ее нулем. Таким же образом при условии положительной определенности начальной функции теорема 1 и теорема 2 верны для (7), (2), (3) и при $\alpha = -1$ (в отличие от теорем 3, 4).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997.
- [2] Байдаков А. Н. О разрешимости краевых задач для линейных и квазилинейных уравнений B -эллиптического типа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 2. С. 265–267.
- [3] Байдаков А. Н. О разрешимости одной краевой задачи для квазилинейных B -эллиптических уравнений // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1986. С. 18–25.
- [4] Похожаев С. И. Об уравнениях вида $\Delta u = f(x, u, Du)$ // Матем. сб. 1980. Т. 113. № 2. С. 324–338.
- [5] Kardar M., Parisi G., Zhang Y.-C. Dynamic scaling of growing interfaces // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 889–892.
- [6] Medina E., Hwa T., Kardar M., Zhang Y.-C. Burgers equation with correlated noise: Renormalization group analysis and applications to directed polymers and interface growth // Phys. Rev. 1989. V. A39. P. 3053–3075.
- [7] Ленисов В. Н., Репников В. Д. О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 1. С. 20–41.
- [8] Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. 1951. Т. 6. № 2. С. 102–143.
- [9] Киприянов И. А., Катрахов В. В., Ляпин В. М. О краевых задачах в области общего вида для сингулярных параболических систем уравнений // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230. № 6. С. 1271–1274.
- [10] Муравник А. Б. О стабилизации решений параболических уравнений с оператором Бесселя // Деп. в ВИНТИ № 2095-B86. Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 1986.
- [11] Матийчук М. И. Задача Коши для одного класса вырождающихся параболических систем // Укр. матем. ж. 1984. Т. 36. № 3. С. 321–327.

Московский авиационный институт (технический университет)
им. Серго Орджоникидзе
E-mail: abm@mailru.com

Поступило
22.12.2000