Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Панов, О числе кривых, выпуклых в двух направлениях, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 6, 866–876

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm313>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:20:16

УДК 514.17, 519.1

ОБ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ БИЕКЦИИ ДЛЯ *xu*-ВЫПУКЛЫХ КРИВЫХ И ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ПОЛИМИНО

А. А. Панов

Связное подмножество $\mathbb{R}^2$, составленное из единичных квадратов с целочисленными вершинами, называется выпуклым полимино или просто *xu*-выпуклым, если оно пересекается с каждой горизонтальной или вертикальной прямой в точности по отрезку. В работе описано геометрическое представление для *xu*-выпуклых множеств, позволяющее элементарными комбинаторными средствами получить известные формулы для числа выпуклых полимино, вписанных в прямоугольник фиксированных размеров.

Библиография: 10 названий.

Введение. Связное подмножество $\mathbb{R}^2$ назовем *выпуклым в двух направлениях* или короче — *xu-выпуклым*, если оно пересекается с каждой горизонтальной или вертикальной прямой по отрезку, к числу которых отнесем отдельную точку и пустое множество (рис. 1). Если ограничиться дискретным случаем и рассматривать *xu*-выпуклые множества, составленные из единичных квадратов решетки $\mathbb{Z}^2$, — *выпуклые полимино*, то мы приходим к хорошо известным перечислительным задачам, которые в той или иной постановке были рассмотрены в [1]–[5]. В частности, было подсчитано число выпуклых полимино, вписанных в прямоугольник заданных размеров. В настоящей работе рассмотрен новый подход к решению этой задачи, основанный на биекции между выпуклыми полимино и релятивистскими траекториями в дискретном пространстве-времени.

Следует отметить, что различного рода полимино возникают при подсчете ε -энтропии и ε -емкости пространств непрерывных кривых и непрерывных функций с хаусдорфовой метрикой [6]. Так в [7] под именем (p, q) -коридоров появились полимино, выпуклые в одном направлении, точная асимптотика для которых была предьявлена в [8]. Геометрический подход, примененный в настоящей работе, во многом аналогичен тому, что был использован в [9].

Было бы естественно назвать *xu*-выпуклой кривой границу соответствующего *xu*-выпуклого множества, но в дискретном случае мы можем чуть сократить эту границу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть задано непустое *xu*-выпуклое множество, составленное из единичных квадратов с целочисленными вершинами, являющееся ограниченной замкнутой областью в $\mathbb{R}^2$. Назовем *xu-выпуклой кривой* кривую, получающаяся из границы такого *xu*-выпуклого множества стягиванием в точку по единичному отрезку на крайних левом, правом, верхнем и нижнем участках этой границы.

Рис. 1. xy -выпуклое множество — связное множество, пересекающееся с каждой вертикальной и с каждой горизонтальной прямой в точности по отрезку.

ЗАМЕЧАНИЕ. Внутренность замкнутой области связна, поэтому граница xy -выпуклого множества не имеет точек самопересечения. На xy -выпуклой кривой точки самопересечения уже могут появиться.

Результат превращения границы xy -выпуклого множества в xy -выпуклую кривую проиллюстрирован на рис. 2.

Рис. 2. xy -выпуклая кривая (справа) получается из границы xy -выпуклого множества (слева) выбрасыванием по единичному отрезку на крайних левом, правом, верхнем и нижнем участках этой границы.

Будем говорить, что xy -выпуклая кривая *вписана* в минимальный прямоугольник, ее содержащий. Если этот прямоугольник имеет размер $n \times k$, то отрезки, составляющие его стороны, обозначим I_n и I_k (рис. 2). Тот же самый символ I_n будем использовать и для обозначения начального отрезка натурального ряда — $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Рассмотрим еще одну решетку $\mathbb{Z}^2$ с отношением порядка $(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2)$, если $i_1 \leq i_2$ и $j_1 \leq j_2$. Закрепим обозначение Q_k за следующим ее подмножеством (рис. 3):

$$Q_k = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : |i| + |j| \leq k\}.$$

Рис. 3. Квадрат Q_k – подмножество решетки вида $\{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : |i| + |j| \leq k\}$ с отношением порядка: $(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2)$, если одновременно $i_1 \leq i_2$ и $j_1 \leq j_2$.

Используя вторую интерпретацию символа I_n , назовем отображение $f: I_n \rightarrow Q_k$ *монотонным*, если из $l_1 \leq l_2$ следует, что $f(l_1) \leq f(l_2)$.

ТЕОРЕМА. Пусть $S(n \times k)$ – это множество всех *ху-выпуклых* кривых, вписанных в прямоугольник $I_n \times I_k$. Тогда

- 1) существует естественная биекция между множеством $S(n \times k)$ и множеством всех монотонных отображений I_n в Q_k ;
- 2) мощность обоих этих множеств равна

$$\frac{nk + n + k}{n + k} \binom{2n + 2k}{2k} - 2 \frac{nk}{n + k} \binom{n + k}{k}^2. \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (1) лишь незначительными деталями отличается от той, что приведена, например, в [5].

Начнем с доказательства первой – геометрической части теоремы.

Геометрическое представление. Весь этот пункт служит развернутым комментарием к последовательности рисунков 2, 5–7, фиксирующих эволюцию взглядов на *ху-выпуклую* кривую:

граница *ху-выпуклого* множества –
 собственно *ху-выпуклая* кривая –
 последовательность горизонтальных сечений кривой –
 отображение этой последовательности в треугольный кусок решетки –
 монотонное отображение в квадратный кусок решетки –
 релятивистская траектория в дискретном пространстве-времени.

Отметим также, что на всех только что перечисленных рисунках изображена одна и та же *ху-выпуклая* кривая.

Итак, переходим к доказательству геометрической части теоремы. Оно основано на следующем простом факте: существует естественная биекция между всеми подотрезками фиксированного отрезка I и точками равнобедренного прямоугольного треугольника Δ_I с гипотенузой I . На рис. 4 это утверждение иллюстрируется и в непрерывном и

в дискретном варианте – каждому подотрезку $J \subset I$ отвечает вершина соответствующего треугольника Δ_J , лежащая внутри Δ_I . При этой биекции целочисленным подотрезкам отрезка I_k соответствует кусок целочисленной решетки, называемый в дальнейшем Δ_k .

Рис. 4. Биекция между точками треугольника Δ_I и всеми подотрезками его гипотенузы I – каждому подотрезку J ставится в соответствие вершина прямого угла треугольника Δ_J ; справа – та же самая биекция между целочисленными подотрезками отрезка I_k и точками треугольного куска решетки Δ_k .

Пусть задана xy -выпуклая кривая C , вписанная в прямоугольник $I_n \times I_k$. Она пересекает на каждой горизонтальной прямой, не входящей в состав решетки, однозначно определенный целочисленный подотрезок отрезка I_k . Если просматривать кривую сверху вниз, то n ее различных сечений соответствующими горизонтальными прямыми дают последовательность из n целочисленных подотрезков (рис. 5).

Тем самым кривая определяет отображение отрезка I_n в Δ_k (рис. 6).

Рис. 5. n сечений кривой из $S(n \times k)$ определяют последовательность из n целочисленных подотрезков отрезка I_k (здесь $n = 5$, $k = 3$).

Это отображение будет монотонным до тех пор, пока кривая C не коснется левой или правой стороны прямоугольника $I_n \times I_k$. Чтобы восстановить монотонность, нужно при достижении кривой левой или правой границы прямоугольника отразить треугольник Δ_k относительно левого или соответственно правого катета. При последовательных отражениях треугольник Δ_k заполнит часть квадрата Q_k , а отображение $I_n \rightarrow \Delta_k$,

Рис. 6. Отображение отрезка I_n в Δ_k , задаваемое xy -выпуклой кривой, изображенной на рис. 5.

соответствующее кривой, перейдет в уже монотонное отображение $I_n \rightarrow Q_k$ (рис. 7). Этот процесс и дает обещанную в теореме биекцию между xy -выпуклыми кривыми из множества $S(n \times k)$ и множеством монотонных отображений $I_n \rightarrow Q_k$. Первая часть теоремы доказана.

Рис. 7. Монотонное отображение отрезка I_n в Q_k , задаваемое xy -выпуклой кривой, изображенной на рис. 5.

Поясним предыдущие рассуждения. По доказанному, множество xy -выпуклых кривых $S(1 \times k)$ можно отождествить с множеством отображений одноточечного множества I_1 в Q_k , т.е. с самим множеством Q_k . Рисунок 8 реализует это отождествление для случая $k = 3$. Он еще раз показывает, почему квадрат Q_k состоит из четырех экземпляров треугольника Δ_k . Каждая точка из Q_k — это не просто горизонтальное сечение xy -выпуклой кривой, но сечение с пред- и послеисторией кривой, где указано, касалась или будет касаться она левой или правой стороны описанного прямоугольника. Сравнение этого рисунка с рис. 5 и 7 позволяет понять, как по монотонной траектории восстанавливается соответствующая xy -выпуклая кривая.

Перед тем, как перейти к арифметическим вычислениям, сделаем еще одно замечание. Введем множества $C_{i,j}^-$ и $C_{i,j}^+$ — конусы прошлого и будущего точки $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$:

$$C_{i,j}^- = \{(p, q) : (p, q) \leq (i, j)\}, \quad C_{i,j}^+ = \{(p, q) : (p, q) \geq (i, j)\}.$$

Если воспользоваться этой релятивистской терминологией и считать отображение $f: I_n \rightarrow Q_k$ дискретной траекторией частицы в дискретном пространстве-времени, то условие монотонности f превратится в требование релятивистской допустимости траектории. Именно, для каждого $l \in I_n$ продолжение траектории должно лежать в конусе будущего точки $f(l)$, а предшествующая часть траектории — в конусе прошлого.

Рис. 8. Квадрат Q_k как множество xy -выпуклых кривых из $S(1 \times k)$ или как множество одномерных сечений кривых из $S(n \times k)$ с фиксированной пред- и послеисторией (здесь $k = 3$).

Арифметическое представление. Переходим к доказательству второй части теоремы, т.е. к вычислению мощности $S(n, k)$ множества xy -выпуклых кривых, вписанных в прямоугольник размером $n \times k$,

$$S(n, k) = \#S(n \times k),$$

т.е., как уже доказано, к вычислению мощности множества всех монотонных отображений отрезка I_n в Q_k . В этих вычислениях основную роль играет оператор суммирования по конусу прошлого, манипуляции с которым приводят к индуктивным формулам (4) и (6), а затем и к окончательному результату (7).

Множеству всех монотонных отображений отрезка I_n в Q_k поставим в соответствие функцию f_k^n , определенную на Q_k . Ее значение $f_k^n(i, j)$ равно числу монотонных отображений, переводящих конец отрезка I_n — число n — в точку (i, j) . Через S_k обозначим оператор суммирования, который функции, определенной на квадрате Q_k , ставит в соответствие сумму ее значений:

$$S_k f = \sum_{(i, j) \in Q_k} f(i, j).$$

Ясно, что

$$S(n, k) = S_k f_k^n. \quad (2)$$

Понятно, что функция f_k^1 тождественно равна 1 на Q_k (еще раз см. рис. 8). Для вычисления f_k^n введем оператор суммирования T_k по конусу прошлого, который переводит функцию, определенную на Q_k , в функцию, определенную там же:

$$T_k f(i, j) = \sum_{(p, q) \in C_{ij}^- \cap Q_k} f(p, q).$$

Из определения монотонности сразу получаем, что число монотонных траекторий длины $n + 1$, заканчивающихся в точке (i, j) , равно сумме числа траекторий длины n , заканчивающихся в конусе прошлого $C_{i, j}^-$ этой точки:

$$f_k^{n+1} = T_k f_k^n,$$

решетке. Прежде всего, введем оператор T , действующий на функциях, определенных на $\mathbb{Z}^2$,

$$Tf(i, j) = \sum_{(p, q) \in C_{ij}^-} f(p, q).$$

И сразу же проделаем первое конкретное вычисление. Закрепим обозначение $\delta_{i,j}$ за функцией, которая отлична от 0 только в точке (i, j) , где она равна 1. Тогда для функции $\delta_{0,0}$, сосредоточенной в начале координат, имеет место равенство

$$T^n \delta_{0,0}(i, j) = \binom{n+i-1}{i} \binom{n+j-1}{j}. \quad (5)$$

Это легко проверяемое комбинаторное соотношение.

Сформулируем следующий принцип.

ПРИНЦИП ОТРАЖЕНИЯ. Пусть P_l — это полуплоскость вида

$$P_l = \{(i, j) : i - j \leq l, (i, j) \in \mathbb{Z}^2\}$$

и $\mathcal{T}_l$ — оператор суммирования по конусу прошлого в этой полуплоскости:

$$\mathcal{T}_l f(i, j) = \sum_{(p, q) \in C_{ij}^- \cap P_l} f(p, q).$$

Пусть также

$$\Delta_l = \delta_{0,0} + \sum_{i \geq 0} \delta_{l+1+i, -l} - \sum_{i \geq 0} \delta_{l+1+i, -l-1}.$$

Тогда для любого n имеет место тождество

$$T^n \Delta_l|_{P_l} = \mathcal{T}_l^n \delta_{0,0}.$$

Этот принцип проиллюстрирован на рис. 11. Здесь ориентация осей та же самая, что на рис. 3, начало координат — на месте правой верхней единицы, $l = 2$. Две суммы, входящие в определение функции Δ_l , дают на рисунке бесконечный двойной слой из ∓ 1 .

$$\begin{array}{cccc|cc} & -1 & 0 & & 0 & 1 \\ & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{array}$$

Рис. 11. Функция Δ_l — на правой полуплоскости значения функций $T^n \Delta_l$ и $\mathcal{T}_l^n \delta_{0,0}$ совпадают при любом n .

Не вдаваясь в детали, скажем, что для доказательства принципа достаточно проверить, что вдоль границы полуплоскости P_l , т.е. при $i - j = l$ для любого n выполняется равенство

$$T^n \Delta_l(i, j) = T^n \Delta_l(i + 1, j).$$

В его справедливости легко убедиться при помощи соотношения (5) с учетом того, что носитель функции $T^{-1}(\Delta_l - \delta_{0,0})$ сосредоточен всего лишь в трех точках: $(l + 1, -l - 1)$, $(l + 1, -l)$, $(l + 1, -l + 1)$.

Используя принцип отражения, мы можем для любой функции f , определенной на квадрате Q_k , построить функцию F , определенную на решетке $\mathbb{Z}^2$, такую, что для любого n выполняется тождество

$$T^n F|_{Q_k} = T_k^n f.$$

Для этого достаточно применить принцип отражения для каждой точки квадрата Q_k и его левой и правой границ. Если это проделать для функции f_k^0 (см. рис. 10), то получим функцию F_k^0 , изображенную на рис. 12, и для любого n будет выполнено равенство

$$T^n F_k^0|_{Q_k} = T_k^n f_k^0.$$

Рис. 12. Функция F_2^0 , получающаяся из f_2^0 после применения принципа отражения, — внутри квадрата Q_2 значения функций $T^n F_2^0$ и $T_2^n f_2^0$ совпадают при любом n .

Теперь формула (4) для вычисления $S(n, k)$ приобретает свой окончательный вид

$$S(n, k) = s_k T^{n+1} F_k^0. \quad (6)$$

Носитель функции F_k^0 содержится в двух строчках решетки $\mathbb{Z}^2$, состоящих из точек (i, j) с $i + j = -k$ и $i + j = 1 - k$. Суммирование s_k ведется по двум нижним строчкам квадрата Q_k , состоящим из точек (i, j) с $i + j = k - 1$ и $i + j = k$. Действие оператора T описывается соотношением (5). Таким образом, ясно, что формула (6) дает представление $S(n, k)$ в виде суммы слагаемых типа $\binom{n+i}{i} \binom{n+j}{j}$ с некоторыми коэффициентами, отличными от 0 только при $i + j = 2k - 2$, $i + j = 2k - 1$, $i + j = 2k$. Аккуратный подсчет этих коэффициентов приводит к формуле

$$S(n, k) = \sum_{i+j=2k} (k + 1 - 2|i - k|) \binom{n+i}{i} \binom{n+j}{j} - \sum_{i+j=2k-1} \left(2k + 1 - 4 \left| i - k + \frac{1}{2} \right| \right) \binom{n+i}{i} \binom{n+j}{j}$$

$$+ \sum_{i+j=2k-2} (k-2|i-k+1|) \binom{n+i}{i} \binom{n+j}{j}.$$

Каждая из присутствующих здесь сумм благополучно сворачивается при помощи известных соотношений [10]

$$\begin{aligned} \sum_i \binom{n+i}{i} \binom{n+K-i}{K-i} &= \binom{2n+K+1}{K}, \\ \sum_i |i-k| \binom{n+i}{i} \binom{n+2k-i}{2k-i} &= k \binom{n+k+1}{k} \binom{n+k}{k}, \\ \sum_i \left| i-k + \frac{1}{2} \right| \binom{n+i}{i} \binom{n+2k-1-i}{2k-1-i} &= (n+1) \binom{n+k}{k-1}^2, \end{aligned}$$

что и приводит к равенству

$$S(n, k) = \frac{nk+n+k}{n+k} \binom{2n+2k}{2k} - 2 \frac{nk}{n+k} \binom{n+k}{k}^2, \quad (7)$$

правая часть которого совпадает с (1). Теорема доказана.

Заключительные примеры и замечания. Рассмотрим несколько простых примеров. Множество $S(0 \times k)$ представлено всего лишь одной кривой – отрезком I_k , множество $S(n \times 0)$ тоже представлено лишь отрезком I_n , т.е. $S(0, k) = S(n, 0) = 1$. Первое подтверждение этих равенств получаем при суммировании значений функции f_k^0 (формула (2) и рис. 10). Второе – с помощью формулы (7).

Множество $S(1 \times k)$ мы отождествили с множеством Q_k (рис. 3 и 8), поэтому $S(1, k) = (k+1)^2 + k^2$. Вычисление по формуле (7) дает тот же самый результат $S(1, k) = 2k^2 + 2k + 1$.

Наконец, следуя формуле (2), просуммируем функции f_2^2 и f_2^3 на рис. 9. Это приводит к равенствам $S(2, 2) = 68$ и $S(3, 2) = 222$, что опять подтверждается соотношением (7).

Отметим, что изложенная здесь схема подсчета числа xy -выпуклых кривых работает и при вычислении других характеристик множества $S(n \times k)$. Например, будем интерпретировать площадь, ограниченную xy -выпуклой кривой, как сумму длин ее горизонтальных сечений. Если еще раз посмотреть на рис. 3 и 8, то увидим, что длина сечения, соответствующего точке (i, j) , равна $k - |i| - |j|$. Поэтому, заменяя оператор простого суммирования по конусу прошлого T_k на оператор

$$U_k f(i, j) = \lambda^{k-|i|-|j|} \sum_{(p, q) \in C_{ij}^- \cap Q_k} f(p, q),$$

тем же самым путем сможем вычислить производящую функцию $S_{n \times k}(\lambda)$, описывающую распределение xy -выпуклых кривых по ограничиваемым ими площадям.

Еще одно замечание. На том же рис. 8 видно, что одноточечные сечения кривых сосредоточены вдоль границы квадрата Q_k . Поэтому, подсчитав число “пересечений” траектории, отвечающей xy -выпуклой кривой, с границей квадрата, мы сможем найти

число связных областей, из которых состоит внутренность этой кривой. И здесь, небольшая модификация оператора T_k тоже позволяет получить соответствующую производящую функцию.

Наконец, последнее. Мы определили кривую как границу области в $\mathbb{R}^2$. Посмотрим, что изменится, если перейти к параметризованным кривым. *Параметризованной кривой на решетке* назовем последовательность из $\pm 1, \pm i$. При этом 1 соответствует единичному шагу вправо, -1 соответствует шагу влево и $\pm i$ — единичным шагам по вертикали (на этот раз i — это мнимая единица). *Параметризованной xu -выпуклой кривой, вписанной в прямоугольник* размером $n \times k$, назовем циклическую последовательность, содержащую по k членов, равных 1 и -1 , и по n членов, равных i и $-i$. Причем 1 и -1 не чередуются между собой, точно так же не чередуются i и $-i$. Число таких кривых легко считается, оно равно

$$2 \frac{nk}{n+k} \binom{2n+2k}{2k}.$$

Существенным по сравнению с (1) здесь является множитель 2. Его появление объясняется тем, что любая xu -выпуклая кривая, ограничивающая ненулевую площадь, допускает не менее двух параметризаций (направлений обхода).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Delest M.-P., Viennot G. Algebraic languages and polyominoes enumeration // Theoret. Comput. Sci. 1984. V. 34. P. 169–206.
- [2] Lin K. Y., Chang S. J. Rigorous results for the number of convex polygons on the square and Honeycomb lattices // J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 2635–2642.
- [3] Bousquet-Mélou M. Convex polyominoes and heaps of segments // J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 1925–1934.
- [4] Bousquet-Mélou M. Convex polyominoes and algebraic languages // J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 1935–1944.
- [5] Gessel I. M. On the number of convex polyominoes // Annales des Sciences Mathématiques du Québec. 2000. V. 24. P. 63–66.
- [6] Сендов Бл. Хаусдорфовы приближения. София: Изд-во БАН, 1979.
- [7] Сендов Бл., Пенков Б. ε -энтропия и ε -емкость множества непрерывных функций // Вестн. МГУ. 1962. № 3. С. 20–23.
- [8] Панов А. А. О числе (p, q) -коридоров и (p, q) -лабиринтов // УМН. 1975. Т. 30. № 2. С. 221–222.
- [9] Панов А. А. Вычисление ε -энтропии пространства непрерывных функций с хаусдорфовой метрикой // Матем. заметки. 1977. Т. 21. № 1. С. 39–50.
- [10] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М.: Мир, 1998.

Московский государственный университет
геодезии и картографии
E-mail: alexey@panov.mccme.ru

Поступило
17.04.2002