Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Попов, Оценки сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами некоторых классов, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 6, 877–888

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm314>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:54:44

ОЦЕНКИ СУММ РЯДОВ ПО СИНУСАМ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

А. Ю. Попов

В статье получены двусторонние оценки с точными константами сумм рядов по синусам с выпуклой и стремящейся к нулю последовательностью коэффициентов.

Библиография: 7 названий.

В работе уточняются и дополняются некоторые теоремы Теляковского об оценках сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами, доказанные им в статьях [1], [2]. Всюду далее предполагается, что $\mathbf{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ – невозрастающая и стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Обозначим $m(x) = [\pi/|x|]$, $0 < |x| \leq \pi$,

$$g(\mathbf{b}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad v(\mathbf{b}, x) = x \sum_{k=1}^{m(x)} kb_k.$$

Проводимое здесь исследование касается сравнения поведения функции $g(\mathbf{b}, x)$ и более просто устроенной функции $v(\mathbf{b}, x)$. Ввиду нечетности $g(\mathbf{b}, x)$ и $v(\mathbf{b}, x)$ достаточно рассмотреть значения $x \in (0, \pi]$.

Первые результаты в этой области принадлежат Салему [3], [4]. Для некоторых подклассов монотонных последовательностей он доказал порядковое соотношение

$$g(\mathbf{b}, x) \asymp v(\mathbf{b}, x), \quad x \rightarrow +0. \quad (1)$$

Его исследования были продолжены другими авторами [5], [6], [1], [2]. Приведем интересующие нас результаты работ [1], [2].

ТЕОРЕМА А [1]. *С абсолютной постоянной в символе O справедливо равенство*

$$g(\mathbf{b}, x) = v(\mathbf{b}, x) + O\left(x^3 \sum_{k=1}^{m(x)} k^3 b_k\right), \quad 0 < x \leq \pi. \quad (2)$$

Заметим, что отношение $(x^3 \sum_{k=1}^{m(x)} k^3 b_k) / v(\mathbf{b}, x)$ для многих монотонных последовательностей $\mathbf{b}$ не является бесконечно малой величиной при $x \rightarrow +0$, но зато всегда не превосходит π^2 на $(0, \pi]$. Следовательно, с некоторой абсолютной постоянной C выполняется неравенство

$$|g(\mathbf{b}, x)| \leq Cv(\mathbf{b}, x), \quad 0 < x \leq \pi. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА Б [1], [2]. Если последовательность $\mathbf{b}$ выпукла, то при любых $x \in (0, \pi/11]$ справедливы неравенства (для краткости пишем m вместо $m(x)$)

$$\frac{b_m}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{\pi m} \sum_{k=1}^{m-1} k^2 (b_k - b_{k+1}) \leq g(\mathbf{b}, x) \leq \frac{b_m}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \frac{6}{m} \sum_{k=1}^{m-1} k^2 (b_k - b_{k+1}).$$

Теорема Б вместе с равенством

$$\frac{1}{\pi m} \sum_{k=1}^{m-1} k^2 (b_k - b_{k+1}) = -\frac{mb_m}{\pi} + \frac{2}{\pi m} \sum_{k=1}^m \left(k - \frac{1}{2}\right) b_k$$

немедленно влечет за собой следующую асимптотическую оценку снизу суммы ряда по синусам:

$$g(\mathbf{b}, x) \geq (2\pi^{-2} + o(1))v(\mathbf{b}, x), \quad x \rightarrow +0. \quad (4)$$

Теоремы А и Б позволили Теляковскому для любой выпуклой последовательности $\mathbf{b}$ вывести порядковое соотношение (1) с абсолютными постоянными в символе $\asymp$. Напомним, что запись $u(x) \asymp v(x)$, $x \rightarrow +0$, означает одновременное выполнение оценок $u(x) = O(v(x))$ и $v(x) = O(u(x))$ в некоторой правой окрестности нуля, а запись $u(x) \sim v(x)$, $x \rightarrow +0$, подразумевает справедливость предельного соотношения

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{u(x)}{v(x)} = 1.$$

В настоящей работе теорема А уточняется. Доказывается, что второе слагаемое в правой части (2) при любом $x \in (0, \pi]$ отрицательно, и неравенство (3) верно с $C = 1$.

ТЕОРЕМА 1. Для любой невозрастающей и стремящейся к нулю последовательности положительных чисел $\mathbf{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ выполняются неравенства

$$-0.5b_1 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \leq g(\mathbf{b}, x) < 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=1}^{m(x)} kb_k \quad \forall x \in (0, \pi], \quad (5)$$

$$g(\mathbf{b}, x) < \sin x \sum_{k=1}^{m(x)} kb_k \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (6)$$

В том же духе уточняется оценка снизу теоремы Б.

ТЕОРЕМА 2. Если последовательность $\mathbf{b}$ является выпуклой, то при любом $x \in (0, \pi/2]$ справедливо неравенство

$$b_{m(x)} \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1+m(x)}{\pi} \right) + \frac{2}{\pi^2} v(\mathbf{b}, x) \leq g(\mathbf{b}, x). \quad (7)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{m(x)}{\pi} \geq \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{x},$$

а последняя функция убывает на $(0, \pi/2]$. Ввиду сказанного множитель при $b_{m(x)}$ в первом слагаемом левой части (7) на интервале $(0, \pi/2)$ превосходит свое значение в точке $x = \pi/2$, которое равно $1/2 - 3/\pi > -0.46$. Отсюда выводим

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой выпуклой последовательности $\mathbf{b}$ выполняется неравенство

$$-0.46 b_{m(x)} + 2\pi^{-2} v(\mathbf{b}, x) < g(\mathbf{b}, x), \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}. \quad (8)$$

Из (8) совсем просто вытекает (4), поскольку $b_{m(x)} = O(xv(\mathbf{b}, x))$, $x \rightarrow +0$.

Итак, для сумм рядов по синусам с произвольной выпуклой и стремящейся к нулю последовательностью коэффициентов $\mathbf{b}$ имеют место асимптотические оценки

$$\bar{l}(\mathbf{b}) = \limsup_{x \rightarrow +0} \frac{g(\mathbf{b}, x)}{v(\mathbf{b}, x)} \leq 1, \quad \underline{l}(\mathbf{b}) = \liminf_{x \rightarrow +0} \frac{g(\mathbf{b}, x)}{v(\mathbf{b}, x)} \geq \frac{2}{\pi^2}. \quad (9)$$

Сколь они точны? Следующая теорема демонстрирует не только точность каждой из оценок (9) в отдельности, но и их одновременную неулучшаемость как на классе выпуклых, так и на более узком подмножестве вполне убывающих последовательностей $\mathbf{b}$. Другими словами, точная верхняя грань отношения $\bar{l}(\mathbf{b})/\underline{l}(\mathbf{b})$, взятая по классу вполне убывающих и стремящихся к нулю последовательностей $\mathbf{b}$, равна $\pi^2/2$ и достигается на некоторой экстремальной последовательности.

Напомним, что последовательность $\{b_k\}$ называется *вполне убывающей*, если для любых k и $p \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\sum_{n=0}^p (-1)^n \binom{p}{n} b_{k+n} \geq 0.$$

Эквивалентное определение вполне убывающей последовательности состоит в том, что ее k -й элемент является значением в точке k функции $\Phi \in C^\infty[1, +\infty)$ такой, что

$$\operatorname{sgn} \Phi^{(p)}(z) = (-1)^p \quad \forall z \geq 1, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Как известно, любая функция $\Phi(z)$, обладающая указанным свойством, допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re} z > 1$.

ТЕОРЕМА 3. Существует целая функция Φ конечного экспоненциального типа действительнозначная и положительная на $\mathbb{R}$, для которой справедливы следующие утверждения:

- 1) $\lim_{z \rightarrow +\infty} \Phi(z) = 0$;
- 2) $\operatorname{sgn} \Phi^{(p)}(z) = (-1)^p$ для всех $z \in \mathbb{R}$ и для всех $p \in \mathbb{N}$;
- 3) для суммы ряда

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(k) \sin kx$$

и ее мажоранты

$$V(x) = x \sum_{k=1}^{m(x)} k \Phi(k)$$

имеют место равенства

$$\limsup_{x \rightarrow +0} \frac{G(x)}{V(x)} = 1, \quad \liminf_{x \rightarrow +0} \frac{G(x)}{V(x)} = \frac{2}{\pi^2}. \quad (10)$$

Заметим, что неулучшаемость каждой в отдельности из оценок (9) вытекает из следующих теорем.

ТЕОРЕМА В [1], [6]. Если последовательность $\mathbf{b}$ выпукла вниз и медленно меняется ($\lim_{k \rightarrow \infty} (b_{2k}/b_k) = 1$), то справедлива асимптотика

$$g(\mathbf{b}, x) \sim x^{-1} b_{m(x)}, \quad x \rightarrow 0. \quad (11)$$

Ввиду медленного изменения последовательности $\mathbf{b}$ имеем

$$x \sum_{k=1}^{m(x)} k b_k \sim \frac{1}{2} x m^2(x) b_{m(x)} \sim \frac{1}{2} \pi^2 x^{-1} b_{m(x)}, \quad x \rightarrow 0.$$

Отсюда и из (11) заключаем, что для суммы ряда по синусам с произвольной выпуклой и медленно меняющейся последовательностью коэффициентов выполняется предельное соотношение

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(\mathbf{b}, x)}{v(\mathbf{b}, x)} = 2\pi^{-2}. \quad (12)$$

ТЕОРЕМА Г. Если $\mathbf{b}$ — произвольная невозрастающая последовательность, удовлетворяющая условию $b_k = O(k^{-2})$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(\mathbf{b}, x)}{v(\mathbf{b}, x)} = 1.$$

Насколько известно автору, теорема Г не формулировалась в публикациях, но она представляет собой простое следствие теоремы А. Действительно, если $\sum_{k=1}^{\infty} k b_k = +\infty$, то второе слагаемое в (2) бесконечно мало при $x \rightarrow 0$ в сравнении с первым, поскольку

$$x^3 \sum_{k=1}^{m(x)} k^3 b_k = O\left(x^3 \sum_{k=1}^{m(x)} k\right) = O(x^3 m^2(x)) = O(x), \quad x \rightarrow 0.$$

Если же $\sum_{k=1}^{\infty} k b_k < +\infty$, то $g(\mathbf{b}, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$, поэтому при $x \rightarrow 0$ имеем

$$g(\mathbf{b}, x) \sim x g'(\mathbf{b}, 0) = x \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \sim x \sum_{k=1}^{m(x)} k b_k = v(\mathbf{b}, x).$$

Перейдем к доказательству сформулированных утверждений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала дадим оценку сверху остатка ряда по синусам с произвольной невозрастающей и стремящейся к нулю последовательностью коэффициентов. Воспользовавшись преобразованием Абеля и представлением сопряженных ядер Дирихле

$$\tilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos x/2 - \cos(n+1/2)x}{2 \sin x/2},$$

находим

$$\begin{aligned} r_m(x) &= \sum_{k=m+1}^{\infty} b_k \sin kx = \sum_{k=m+1}^{\infty} b_k (\tilde{D}_k(x) - \tilde{D}_{k-1}(x)) \\ &= -b_{m+1} \tilde{D}_m(x) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \tilde{D}_k(x) (b_k - b_{k+1}). \end{aligned} \quad (13)$$

Ввиду неотрицательности всех разностей $b_k - b_{k+1}$ приходим к оценке

$$\begin{aligned} r_m(x) &\leq -b_{m+1} \tilde{D}_m(x) + \left(\sup_{k \geq m+1} \tilde{D}_k(x) \right) \sum_{k=m+1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) \\ &= b_{m+1} \sup_{k \geq m+1} (\tilde{D}_k(x) - \tilde{D}_m(x)) = b_{m+1} \sup_{k \geq m+1} \frac{\cos(m+1/2)x - \cos(k+1/2)x}{2 \sin x/2}. \end{aligned}$$

А так как

$$\sup_{k \geq m+1} \left(-\cos\left(\frac{k+1}{2}x\right) \right) \leq 1,$$

то

$$r_m(x) \leq b_{m+1} \frac{1 + \cos(m+1/2)x}{2 \sin x/2} = b_{m+1} \frac{\cos^2(m/2 + 1/4)x}{\sin x/2}. \quad (14)$$

До сих пор $m \in \mathbb{N}$ было произвольным. Теперь возьмем $m = m(x)$. Тогда включение $x \in (\pi/(m+1), \pi/m]$ влечет за собой двойное неравенство

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4} \leq \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}\right)x \leq \frac{\pi}{2} + \frac{x}{4},$$

вследствие которого

$$\left| \cos\left(\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}\right)x\right) \right| \leq \sin \frac{x}{4}, \quad m = m(x), \quad 0 < x < \pi. \quad (15)$$

Из (14) и (15) находим

$$\begin{aligned} r_{m(x)}(x) &= \sum_{k=m(x)+1}^{\infty} b_k \sin kx \leq b_{m+1} \sin^2 \frac{x}{4} \operatorname{cosec} \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{2} b_{m+1} \operatorname{tg} \frac{x}{4} \leq \frac{1}{2} b_{m+1} \sin \frac{x}{2}, \quad m = m(x), \quad 0 < x \leq \pi. \end{aligned} \quad (16)$$

Перейдем к доказательству неравенств (5) и (6). Пусть сначала $x \in (\pi/2, \pi]$. Тогда $m(x) = 1$ и согласно (16)

$$\begin{aligned} g(\mathbf{b}, x) &= b_1 \sin x + r_1(x) \leq b_1 \sin x + \frac{1}{2} b_2 \sin \frac{x}{2} \\ &= 2b_1 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} b_2 \sin \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \left(b_1 \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{4} b_2 \right). \end{aligned}$$

В силу монотонности $\mathbf{b}$ имеем $b_2 \leq b_1$, а $\cos(x/2) \leq 1/\sqrt{2} < 0.71$ при $x \in (\pi/2, \pi]$. Поэтому

$$g(\mathbf{b}, x) \leq 2 \sin \frac{x}{2} (0.71 b_1 + 0.25 b_2) \leq 1.92 b_1 \sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2} l\left(\frac{x}{2}\right).$$

Правое неравенство (5) при $x \in (\pi/2, \pi]$ доказано.

Пусть теперь $x \in (0, \pi/2]$. Тогда $m(x) \geq 2$ и $g(\mathbf{b}, x)$ можно представить в виде

$$g(\mathbf{b}, x) = \sum_{k=1}^{m-1} b_k \sin kx + b_m \sin mx + r_m(x), \quad m = m(x).$$

Для оценки сверху первого слагаемого воспользуемся очевидными неравенствами $\sin kx \leq k \sin x$, $1 \leq k \leq m-1$, $0 < x \leq \pi/m$. Заметим далее, что в силу включения $x \in (\pi/(m+1), \pi/m]$ справедливо двойное неравенство $\pi - x < mx \leq \pi$, откуда $\sin mx \leq \sin x$. Сказанное вместе с (16) приводит к оценке

$$g(\mathbf{b}, x) \leq \sin x \sum_{k=1}^{m-1} kb_k + b_m \sin x + \frac{1}{2}b_{m+1} \sin \frac{x}{2}.$$

Воспользовавшись монотонностью $\mathbf{b}$ и тем, что $\sin(x/2) < \sin x$, получаем

$$g(\mathbf{b}, x) \leq \sin x \left(\sum_{k=1}^{m-1} kb_k + 1.5b_m \right) < \sin x \sum_{k=1}^m kb_k.$$

Неравенство (6) при $x \in (0, \pi/2]$ доказано, а правое неравенство (5) при этих значениях x является его следствием.

Оценка снизу в (5) делается совсем просто. Положив в (13) $m = 0$, получим тождество

$$g(\mathbf{b}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) \tilde{D}_k(x).$$

А так как при любых $k \in \mathbb{N}$ и $x \in (0, \pi]$ сопряженные ядра Дирихле $\tilde{D}_k(x)$ не меньше, чем

$$\frac{\cos(x/2) - 1}{2 \sin(x/2)} = -\frac{\sin^2(x/4)}{\sin(x/2)} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{4} \geq -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2},$$

то ввиду неотрицательности разностей $b_k - b_{k+1}$ находим

$$g(\mathbf{b}, x) \geq -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = -\frac{1}{2} b_1 \sin \frac{x}{2},$$

что и требовалось доказать. Теорема 1 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Здесь автор почти полностью следует рассуждениям Теляковского, проведенным им в доказательстве теоремы Б, но немного уточняет их в двух местах. Функцию $g(\mathbf{b}, x)$ Теляковский представил в виде суммы

$$g(\mathbf{b}, x) = \frac{1}{2} b_m \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + A(x) + B(x), \quad (17)$$

где $m = m(x)$,

$$A(x) = \sum_{k=1}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) \tilde{D}_k(x), \quad B(x) = \sum_{k=m}^{\infty} (b_k - 2b_{k+1} + b_{k+2}) \frac{\sin mx - \sin(k+1)x}{4 \sin^2(x/2)}.$$

Затем он вывел неравенство

$$A(x) \geq \frac{(b_m - b_{m+1})(m \sin x - \sin mx)}{4 \sin^2(x/2)}, \quad (18)$$

а также оценку снизу $A(x)$ другого вида и оценку $B(x)$. Последние сейчас будут немного уточнены.

По условию теоремы вторые разности $\Delta^2 b_k = b_k - 2b_{k+1} + b_{k+2}$ неотрицательны, следовательно,

$$\begin{aligned} B(x) &\geq \inf_{k \geq m} \left(\frac{\sin mx - \sin(k+1)x}{4 \sin^2(x/2)} \right) \sum_{k=m}^{\infty} \Delta^2 b_k \\ &= (b_m - b_{m+1}) \inf_{k \geq m} \frac{\sin mx - \sin(k+1)x}{4 \sin^2(x/2)} \\ &\geq \frac{(b_m - b_{m+1})(\sin mx - 1)}{4 \sin^2(x/2)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (18) и (19) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A(x) + B(x) &\geq \frac{1}{8} \sin^{-2} \frac{x}{2} (b_m - b_{m+1}) (m \sin x - \sin mx + 2(\sin mx - 1)) \\ &= \frac{1}{8} (b_m - b_{m+1}) \sin^{-2} \frac{x}{2} (m \sin x + \sin mx - 2). \end{aligned} \quad (20)$$

На полуинтервале $\pi/(m+1) < x \leq \pi/m$ исследуем функцию

$$f_m(x) = m \sin x + \sin mx - 2.$$

Ввиду неравенства $\sin \pi t \geq 2t$, $0 < t \leq 1/2$, и ограничения $m \geq 2$ имеем $f_m(\pi/m) = m \sin(\pi/m) - 2 \geq 0$, а так как $f'_m(x) = m(\cos x + \cos mx) = 2m \cos((m-1)x/2) \cos((m+1)x/2) < 0$ (при всех значениях x из рассматриваемого полуинтервала $0 < (m-1)x/2 < \pi/2 < (m+1)x/2 < \pi$), то $f_m(x) > 0$ при $x \in (\pi/(m+1), \pi/m)$. Отсюда и из (20) заключаем, что

$$\frac{1}{2}A(x) + B(x) \geq 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (21)$$

Это неравенство вместе с тождеством (17) дает

$$g(\mathbf{b}, x) \geq \frac{1}{2} b_m \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} A(x), \quad m = m(x), \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}. \quad (22)$$

Теперь дадим другую оценку $A(x)$. В лемме из статьи [2] Теляковский получил неравенство $\tilde{D}_k(x) \geq 2\pi^{-2} k(k+1)x$, $1 \leq k \leq m-1$, $0 < x \leq \pi/m$, $m \in \mathbb{N}$, которое затем огрубил. Но мы воспользуемся именно им:

$$\begin{aligned} A(x) &\geq 2\pi^{-2} x \sum_{k=1}^{m-1} k(k+1)(b_k - b_{k+1}) \\ &= 2\pi^{-2} x \left(-m(m+1)b_m + \sum_{k=1}^m b_k (k(k+1) - k(k-1)) \right). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая неравенство $xm \leq \pi$, приходим к соотношению

$$\frac{1}{2}A(x) \geq -\frac{(m+1)b_m}{\pi} + 2x\pi^{-2} \sum_{k=1}^m k b_k,$$

которое вместе с (17) доказывает теорему 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Положим $A_1 = 1$, $A_{n+1} = \exp \exp \exp A_n$, $B_n = \ln A_{n+1}$,

$$f(t) = \begin{cases} t, & \frac{1}{A_{n+1}} < t \leq \frac{1}{A_n}, \quad n \text{ нечетно,} \\ t^{-1} \ln^{-4} t, & \frac{1}{A_{n+1}} < t \leq \frac{1}{A_n}, \quad n \text{ четно,} \end{cases}$$

$$\Phi(z) = \int_0^1 f(t) e^{-zt} dt, \quad \Phi_1(z) = \int_0^1 t e^{-zt} dt = z^{-2} (1 - e^{-z} - z e^{-z}),$$

$$\Phi_2(z) = \int_0^{1/A_2} t^{-1} \ln^{-4} t e^{-zt} dt,$$

$$g_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_1(k) \sin kx, \quad g_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_2(k) \sin kx.$$

Поскольку функции Φ , Φ_1 , Φ_2 являются преобразованиями Лапласа положительных и суммируемых на $(0, 1)$ (или на $(0, 1/A_2) \subset (0, 1)$) функций, то Φ , Φ_1 , Φ_2 — целые функции экспоненциального типа, не превосходящего 1, положительные и вполне убывающие на $\mathbb{R}$. Явная формула для функции $\Phi_1(z)$ влечет за собой асимптотику

$$\Phi_1(z) \sim z^{-2}, \quad z \rightarrow +\infty, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (23)$$

Докажем, что

$$\Phi_2(z) \sim \frac{1}{3} \ln^{-3} z, \quad z \rightarrow +\infty, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (24)$$

В интеграле, определяющем $\Phi_2(z)$, сделаем замену переменной $zt = u$. При $z > 1$ получим

$$\Phi_2(z) = \int_0^{z/A_2} u^{-1} (\ln u - \ln z)^{-4} e^{-u} du = J_1(z) + J_2(z) + J_3(z), \quad (25)$$

где в J_1 интегрирование идет по $(0, 1)$, в J_2 — по $[1, \sqrt{z}]$, а в J_3 — по $[\sqrt{z}, z/A_2]$. (Можно считать, что $z > A_2^2$, так что $1 < \sqrt{z} < z/A_2$.) Если $u \in (\sqrt{z}, z/A_2)$, то $|\ln u - \ln z| > \ln A_2 = e^e > 1$. Следовательно,

$$J_3(z) < \int_{\sqrt{z}}^{z/A_2} u^{-1} e^{-u} du < z^{-1/2} \int_{\sqrt{z}}^{+\infty} e^{-u} du = z^{-1/2} \exp(-\sqrt{z}). \quad (26)$$

При $u \in [1, \sqrt{z}]$, $z > 1$, имеем $|\ln u - \ln z| \geq (1/2) \ln z$. Отсюда находим

$$J_2(z) \leq 16 \ln^{-4} z \int_1^{\sqrt{z}} u^{-1} e^{-u} du < 16 \ln^{-4} z \int_1^{+\infty} e^{-u} du = O(\ln^{-4} z), \quad z \rightarrow +\infty. \quad (27)$$

Преобразуем интеграл $J_1(z)$ следующим образом:

$$J_1(z) = \int_0^1 u^{-1} (\ln u - \ln z)^{-4} du + \int_0^1 u^{-1} (e^{-u} - 1) (\ln u - \ln z)^{-4} du. \quad (28)$$

Ввиду ограниченности на $(0, 1)$ функции $u^{-1}(e^{-u} - 1)$ второе слагаемое в (28) есть

$$O\left(\int_0^1 (\ln u - \ln z)^{-4} du\right) = O(\ln^{-4} z),$$

так как $|\ln u - \ln z| \geq \ln z$ при $u \in (0, 1)$, $z > 1$. Последняя оценка вместе с (25)–(28) влечет за собой асимптотическое равенство

$$\begin{aligned}\Phi_2(z) &= \int_0^1 u^{-1} (\ln u - \ln z)^{-4} du + O(\ln^{-4} z) \\ &= \int_0^{+\infty} (\tau + \ln z)^{-4} d\tau + O(\ln^{-4} z) = \frac{1}{3} \ln^{-3} z + O(\ln^{-4} z)\end{aligned}$$

(в интеграле производилась замена переменной $\tau = -\ln u$). Соотношение (24) доказано.

Изложим идеи дальнейших рассуждений. Функцию $\varphi \in L^1(0, +\infty)$ назовем согласно [7, гл. 8] *оригиналом* ее преобразования Лапласа

$$\mathcal{F}(z) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-zt} dt.$$

Поскольку на достаточно длинных (в сравнении с величинами их левых концов) промежутках $(1/A_{2p+j+1}, 1/A_{2p+j}]$, $j = 1, 2$, $p \in \mathbb{N}$, оригиналы преобразований Лапласа Φ и Φ_j совпадают, то естественно ожидать, что функции $\Phi(k)$ и $\Phi_j(k)$ “достаточно близки” между собой на последовательностях “длинных” (в сравнении с величинами их левых концов) промежутков значений k . Точнее говоря, имеем

$$\Phi_j(k) - \Phi(k) = O(k^{-3}), \quad k \in [A_{2p+j}^2, B_{2p+j}], \quad j = 1, 2, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (29)$$

Положим

$$v_1(x) = x \sum_{k=1}^{m(x)} k \Phi_1(k), \quad v_2(x) = x \sum_{k=1}^{m(x)} k \Phi_2(k),$$

$x_n = \pi A_n^{-4}$, если n четно, и $x_n = \pi B_n^{-1}$, если n нечетно. Из (29) выводятся асимптотики

$$v_j(x_{2p+j}) \sim V(x_{2p+j}), \quad p \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, \quad (30)$$

$$g_j(x_{2p+j}) \sim G(x_{2p+j}), \quad p \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2. \quad (31)$$

Согласно теоремам В и Г (возможность их применения обусловлена асимптотиками (23) и (24) функций $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$) имеем

$$g_1(x) \sim v_1(x), \quad g_2(x) \sim 2\pi^{-2} v_2(x), \quad x \rightarrow 0. \quad (32)$$

Из (30)–(32) вытекают предельные соотношения

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{G(x_{2p+1})}{V(x_{2p+1})} = 1, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{G(x_{2p})}{V(x_{2p})} = 2\pi^{-2}.$$

Отсюда находим

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{G(x)}{V(x)} \geq 1, \quad \liminf_{x \rightarrow 0} \frac{G(x)}{V(x)} \leq 2\pi^{-2}. \quad (33)$$

Но по теореме 1 первый из пределов (33) не превосходит 1, а второй вследствие (4) (см. также теорему 2) не может быть меньше $2\pi^{-2}$. Следовательно, имеют место равенства (10).

Итак, осталось установить справедливость соотношений (29) и вывести из них (30) и (31). Легко сообразить, что разность между оригиналами функций Φ и Φ_1 равна нулю

на полуинтервалах $\Delta_n = (1/A_{n+1}, 1/A_n]$ с нечетными номерами и не превосходит по абсолютной величине $t^{-1} \ln^{-4} t$ на полуинтервалах Δ_n с четными номерами. В силу сказанного при $n = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$, $k \in [A_n^2, B_n]$ имеем

$$\begin{aligned} |\Phi_1(k) - \Phi(k)| &\leq \int_0^{1/A_{n+1}} t^{-1} \ln^{-4} t e^{-kt} dt + \int_{1/A_n}^{1/A_2} t^{-1} \ln^{-4} t e^{-kt} dt \\ &< \int_0^{1/A_{n+1}} t^{-1} \ln^{-4} t dt + \max_{1/A_n \leq t \leq 1/A_2} (t^{-1} \ln^{-4} t) \int_{1/A_n}^{1/A_2} e^{-kt} dt \\ &= \int_{\ln A_{n+1}}^{+\infty} \tau^{-4} d\tau + \frac{1}{k} (e^{-k/A_n} - e^{-k/A_2}) \max_{1/A_n \leq t \leq 1/A_2} (t^{-1} \ln^{-4} t). \end{aligned}$$

Вспомогая обозначение $B_n = \ln A_{n+1}$ и оценивая сверху максимум функции $t^{-1} \ln^{-4} t$ на отрезке $[1/A_n, 1/A_2]$, $n \geq 3$, через A_n , находим

$$|\Phi_1(k) - \Phi(k)| \leq \frac{1}{3} B_n^{-3} + \frac{A_n}{k} \exp\left(-\frac{k}{A_n}\right). \quad (34)$$

А так как $A_n^2 \leq k \leq B_n$, то получаем оценку

$$|\Phi_1(k) - \Phi(k)| \leq \frac{1}{3} k^{-3} + \exp(-\sqrt{k}) = O(k^{-3}), \quad k \in [A_n^2, B_n], \quad n \text{ нечетно.}$$

Таким образом, для $j = 1$ соотношение (29) доказано. Оценка разности $\Phi_2(k) - \Phi(k)$ для $k \in [A_n^2, B_n]$, n четно, делается совершенно аналогично, поскольку в этом случае разность между оригиналами функций Φ_2 и Φ равна нулю на полуинтервалах Δ_n с четными номерами и оценивается сверху по абсолютной величине той же функцией $t^{-1} \ln^{-4} t$ на промежутках Δ_n с нечетными номерами, за исключением Δ_1 , где она не превосходит t . Поэтому для $\Phi_2(k) - \Phi(k)$ при $k \in [A_n^2, B_n]$, n четно, верна оценка, к которой следует еще добавить экспоненциально малый интеграл $\int_{1/A_2}^1 t e^{-zt} dt$. В результате получаем (29) и для $j = 2$.

Перейдем к доказательству асимптотик (30). В силу выбора x_n имеем

$$m(x_n) = \begin{cases} [B_n], & n \text{ нечетно,} \\ [A_n^4], & n \text{ четно.} \end{cases} \quad (35)$$

Из (23) заключаем, что

$$v_1(x) \sim x \ln \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow +0, \quad (36)$$

а если n нечетно, то согласно (35) и (29)

$$\begin{aligned} V(x_n) &= x_n \sum_{k=1}^{[B_n]} k \Phi(k) = x_n \sum_{k=1}^{[A_n^2]} k \Phi(k) + x_n \sum_{k=[A_n^2]+1}^{[B_n]} k (\Phi_1(k) + O(k^{-3})) \\ &= o\left(x_n \sum_{k=1}^{[A_n^2]} k\right) + x_n \sum_{k=[A_n^2]+1}^{[B_n]} k \Phi_1(k) + x_n \sum_{k=[A_n^2]+1}^{[B_n]} O(k^{-2}) \\ &= o(x_n A_n^4) + v_1(x_n) - x_n \sum_{k=1}^{[A_n^2]} k \Phi_1(k) = v_1(x_n) + o(x_n A_n^4), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

А так как $x_{2p+1}^{-1} \asymp [B_{2p+1}] = \exp \exp(A_{2p+1})$, $p \rightarrow \infty$, то получаем

$$V(x_{2p+1}) = v_1(x_{2p+1}) + o\left(x_{2p+1} \left(\ln \ln \frac{1}{x_{2p+1}}\right)^4\right), \quad p \rightarrow \infty,$$

что вместе с (36) доказывает требуемую эквивалентность для $j = 1$. Если же n четно, то согласно (35) и (29)

$$\begin{aligned} V(x_n) &= x_n \sum_{k=1}^{[A_n^2]} k \Phi(k) + x_n \sum_{k=[A_n^2]+1}^{[B_n]} k (\Phi_2(k) + O(k^{-3})) \\ &= v_2(x_n) + o(x_n A_n^4), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В силу выбора x_n имеем $x_{2p} A_{2p}^4 \asymp 1$, $p \rightarrow \infty$, а так как $\lim_{x \rightarrow +0} v_2(x) = +\infty$ (см. (24)), то приходим к эквивалентности (30) и в случае $j = 2$.

В заключение выведем асимптотики (31). Разбивая ряды для G и g_j на три части и используя соотношение (29), находим

$$G(x_{2p+j}) - g_j(x_{2p+j}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Phi(k) - \Phi_j(k)) \sin(kx_{2p+j}) = \sum_{i=1}^3 S_{j,p}^{(i)}, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} S_{j,p}^{(1)} &= \sum_{k=1}^{[A_{2p+j}^2]} (\Phi(k) - \Phi_j(k)) \sin(kx_{2p+j}), \\ S_{j,p}^{(2)} &= \sum_{k=[A_{2p+j}^2]+1}^{[B_{2p+j}]} (\Phi(k) - \Phi_j(k)) \sin(kx_{2p+j}) = O\left(\sum_{k=[A_{2p+j}^2]+1}^{[B_{2p+j}]} k^{-3} |\sin(kx_{2p+j})|\right), \\ S_{j,p}^{(3)} &= \sum_{k=[B_{2p+j}]+1}^{\infty} \Phi(k) \sin(kx_{2p+j}) - \sum_{k=[B_{2p+j}]+1}^{\infty} \Phi_j(k) \sin(kx_{2p+j}). \end{aligned}$$

Сумму $S_{j,p}^{(1)}$ оценим, используя неравенство $|\sin kx| \leq kx$, $x > 0$, и предельные соотношения $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_j(k) = 0$, $j = 1, 2$. Получим

$$|S_{j,p}^{(1)}| = o\left(x_{2p+j} \sum_{k=1}^{[A_{2p+j}^2]} k\right) = o(x_{2p+j} A_{2p+j}^2), \quad p \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Аналогично оценивая синусы в сумме $S_{j,p}^{(2)}$, находим

$$|S_{j,p}^{(2)}| = O\left(\sum_{k=[A_{2p+j}^2]+1}^{[B_{2p+j}]} k^2 x_{2p+j}\right) = o(x_{2p+j}), \quad p \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Для нахождения верхней границы $|S_{j,p}^{(3)}|$ воспользуемся известной оценкой остатка произвольного ряда по синусам с невозрастающими и стремящимися к нулю коэффициентами $\{c_k\}$:

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} c_k \sin kx \right| = O\left(\frac{c_n}{x}\right), \quad 0 < x < \pi$$

(постоянная в O абсолютная). Следовательно, в нашем случае имеем

$$|S_{j,p}^{(3)}| = O\left(\frac{\Phi([B_{2p+j}] + 1) + \Phi_j([B_{2p+j}] + 1)}{x_{2p+j}}\right),$$

а так как функции Φ , Φ_1 и Φ_2 убывают и величины $\Phi(B_{2p+j})$ и $\Phi_j(B_{2p+j})$ отличаются на $O(B_{2p+j}^{-3}) = O(x_{2p+j}^3)$, то выводим оценку

$$|S_{j,p}^{(3)}| = O\left(\frac{\Phi_j(B_{2p+j})}{x_{2p+j}}\right) + O(x_{2p+j}^2). \quad (40)$$

Из (37)–(40) при $j = 1, 2$ и $p \rightarrow \infty$ находим

$$|G(x_{2p+j}) - g_j(x_{2p+j})| = O\left(x_{2p+j} A_{2p+j}^4 + \frac{\Phi_j(B_{2p+j})}{x_{2p+j}}\right). \quad (41)$$

Из оценки (41) и асимптотик (32) вытекает, что для доказательства (31) достаточно установить малость остаточного члена в (41) в сравнении с $v_j(x_{2p+j})$ при $x \rightarrow +0$. При $j = 1$ с учетом (23) и (36) имеем

$$G(x_{2p+1}) - g_1(x_{2p+1}) = O\left(x_{2p+1} + x_{2p+1} \left(\ln \ln \frac{1}{x_{2p+1}}\right)^4\right) = o(v_1(x_{2p+1})), \quad x \rightarrow +0,$$

а при $j = 2$ остаточный член в (41) по порядку не превосходит

$$O(1) + (x_{2p+2}^{-1} \ln^{-3} B_{2p+2}) = O(1) + O(A_{2p+2}^4 \exp(-3A_{2p+2})) = O(1),$$

но $v_2(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +0$, следовательно, требуемое доказано. Доказательство теоремы 3 завершено.

Автор благодарит профессора С.А. Теляковского за внимание к работе и полезные консультации.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Telyakovskii S. A. On the behavior near the origin of the sine series with convex coefficients // Publ. Inst. Math. Nouvelle série. 1995. V. 58 (72). P. 43–50.
- [2] Теляковский С. А. К вопросу о поведении рядов по синусам вблизи нуля // Прилози, Одд. мат. мех. науки, МАНУ. 2000. Т. 21. № 1–2. С. 47–53.
- [3] Salem R. Determination de l'ordre de grandeur à l'origine de certaines séries trigonométriques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1928. V. 186. P. 1804–1806.
- [4] Salem R. Essais sur les séries trigonométriques. Paris, 1940.
- [5] Izumi S. Some trigonometrical series // Proc. Japan Acad. 1955. V. 31. № 4. P. 207–209.
- [6] Aljančić S., Bojanić R., Tomić M. Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones // Publ. Inst. Math. Serbe Sci. 1956. V. 10. P. 101–120.
- [7] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1977.