Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Сергеев, Алгоритмическая сложность одной задачи идемпотентно выпуклой геометрии, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 6, 896–901

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm316>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 03:24:45

УДК 519.7

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ИДЕМПОТЕНТНО ВЫПУКЛОЙ ГЕОМЕТРИИ

С. Н. Сергеев

В свободном полумодуле над идемпотентным полукольцом $R_{\max \min}$ и в свободном полумодуле над линейно упорядоченным идемпотентным полуполем исследуются свойства идемпотентно выпуклой оболочки двухточечного множества и предлагаются алгоритмы для ее построения.

Библиография: 8 названий.

Некоторые асимптотические задачи физики (например, квазиклассическое приближение в квантовой механике [1]), а также многие задачи теории оптимизации, математической экономики и т.п. удается естественно и просто сформулировать в терминах алгебраических структур, включающих операцию максимизации или минимизации [2], [3]. Такие алгебраические структуры являются объектом активно развивающейся идемпотентной математики [3]–[5]. Для интересных, важных и полезных конструкций и результатов традиционной математики над числовыми полями и над аналогичными конструкциями существует соответствие с результатами над идемпотентными полуполями и полукольцами, формулируемое в духе принципа соответствия Бора в квантовой теории [6], [7]. Это соответствие может быть, однако, далеким от очевидного. В данной статье рассматривается простейшая задача идемпотентно выпуклой геометрии (развиваемой, в частности, в [8] и [7]) – построение выпуклой оболочки двухточечного множества в идемпотентном полумодуле – и устанавливается, что алгоритмическая сложность ее решения растет с повышением размерности полумодуля.

Рассмотрим числовую прямую и введем на ней операции $\oplus = \max$, $\odot = +$ и добавим элемент $-\infty$, который играет роль 0 , т.е. наделяется свойствами $-\infty \oplus a = a$, $-\infty \odot a = -\infty$. Операция $\oplus$ удовлетворяет свойствам коммутативности, ассоциативности и *идемпотентности* ($a \oplus a = a$), операция $\odot$ является коммутативной, а также дистрибутивной относительно $\oplus$. Указанные свойства рассматриваются в идемпотентном анализе в качестве аксиом *идемпотентного полукольца*. Построенная структура обладает еще свойством обратимости операции $\odot$, поэтому называется *идемпотентным полуполем* $R_{\max +}$.

Идемпотентное полукольцо $R_{\max \min}$ является важным примером полукольца, не являющегося полуполем. Оно включает всю числовую прямую с добавленными к ней элементами $-\infty$ и $+\infty$ и обладает двумя операциями $\oplus = \max$ и $\odot = \min$. Элементы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 02-01-01062.

$-\infty$ и $+\infty$ объявляются соответственно **0** и **1** полукольца, т.е. наделяются свойствами $-\infty \oplus a = a$, $a \odot (+\infty) = a$.

Во всех идемпотентных полукольцах операция $\oplus$ индуцирует частичный порядок: $a \preceq b$ тогда и только тогда, когда $a \oplus b = b$; $a \prec b$ тогда и только тогда, когда $a \preceq b$ и $a \neq b$. В обоих рассмотренных полукольцах этот порядок линейный, поскольку для любых элементов a, b выполняется $a \preceq b$ или $b \preceq a$, поэтому для любых элементов a и b этих полуколец определена также операция взятия точной нижней грани $a \wedge b$.

В статье рассматриваются полумодули S^n “вектор-столбцов” вида $(a^1, \dots, a^n)$, $a^i \in S$, с покомпонентными операциями обобщенного сложения и умножения на скаляр из полукольца S . Это идемпотентные аналоги векторных пространств. В этих полумодулях операция $\oplus$ индуцирует частичный порядок.

На такой полумодуль легко перенести понятие выпуклости. Множество $C \subset S^n$ называется *идемпотентно выпуклым*, если для любых $x, y \in C$ и $\lambda, \mu \in S$ таких, что $\lambda \oplus \mu = 1$, комбинация $\lambda x \oplus \mu y$ также принадлежит C . Точка y называется *идемпотентно выпуклой комбинацией* точек $x_1, \dots, x_m$, если $y = \bigoplus_{i=1}^m \lambda_i x_i$, причем $\bigoplus_{i=1}^m \lambda_i = 1$. Здесь и в дальнейшем мы опускаем значок $\odot$ при обозначении обобщенного умножения “вектора” из S^n на скаляр из S . *Идемпотентно выпуклой оболочкой* точек $x_1, \dots, x_m \in S^n$ называется множество их идемпотентно выпуклых комбинаций.

В дальнейшем, где это не вызовет недоразумений, мы будем называть идемпотентно выпуклые множества, комбинации и оболочки просто выпуклыми. Все дальнейшие результаты формулируются для полумодулей S^n , где S – линейно упорядоченное идемпотентное полуполе или полукольцо $R_{\max \min}$.

В полумодулях над этими полукольцами выпуклые комбинации точек x_1 и x_2 можно линейно упорядочить следующим образом: $y \preceq_{x_1, x_2} z$, если z принадлежит выпуклой оболочке $\{y, x_2\}$. Нетрудно убедиться, что это отношение удовлетворяет всем аксиомам отношения порядка. Теперь естественно дать следующее определение: последовательность выпуклых комбинаций $y_1, \dots, y_m$ точек x_1 и x_2 назовем *монотонной*, если $y_i \preceq_{x_1, x_2} y_{i+1}$ для $i = 1, \dots, m-1$. Доказательство следующей леммы очевидно.

ЛЕММА 1. Пусть $y_1, \dots, y_m \in S^n$ – монотонная последовательность выпуклых комбинаций точек y_0 и y_{m+1} и z – любая другая выпуклая комбинация y_0 и y_{m+1} . Тогда при некотором единственном $i \in \{0, \dots, m\}$ точка z является выпуклой комбинацией точек y_i и y_{i+1} .

Введем еще одно понятие. Пусть S – идемпотентное полуполе или полукольцо $R_{\max \min}$. Множество попарно различных точек $y_1, \dots, y_{m+1} \in S^n$ будем называть последовательностью *вершин выпуклой оболочки* точек y_1 и y_{m+1} , если выполнены следующие три требования:

- 1) все y_i принадлежат выпуклой оболочке y_1 и y_{m+1} ;
- 2) для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ точки y_i и y_{i+1} принадлежат прямой, задаваемой уравнениями $y^j = c^j = \text{const}$ при $j \in I_i$ и $y^j = \lambda \odot y_i^j$ при $j \notin I_i$, если S – идемпотентное полуполе, и уравнениями $y^j = c^j = \text{const}$ при $j \in I_i$ и $y^j = \lambda$ при $j \notin I_i$, если S – полукольцо $R_{\max \min}$;
- 3) для любого $i \in \{1, \dots, m-1\}$ множества I_i и I_{i+1} не совпадают.

ЛЕММА 2. Последовательность вершин $y_1, \dots, y_{m+1} \in S^n$ является монотонной и единственной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m = 1, 2$, то утверждение тривиально. Пусть теперь $m > 2$. Докажем по индукции, что последовательность вершин является монотонной. Базис индукции тоже тривиален: $y_1 \preceq_{y_1, y_{m+1}} y_2$. Пусть теперь $y_1 \preceq_{y_1, y_{m+1}} \dots \preceq_{y_1, y_{m+1}} y_k$. Докажем, что $y_k \preceq_{y_1, y_{m+1}} y_{k+1}$. Тогда вершина y_{k+1} принадлежит по лемме 1 либо $\{y_{k-1}, y_k\}$, но тогда не выполнено третье требование определения, либо $\{y_{i-1}, y_i\}$, где $i < k$, но тогда не выполнено второе требование определения. Таким образом, $y_k \preceq_{y_1, y_{m+1}} y_{k+1}$, и последовательность вершин монотонна по индукции.

Докажем единственность последовательности несовпадающих вершин. Предположим противное. Пусть существует другая последовательность вершин $z_1, \dots, z_s$. Тогда эта последовательность точек не может быть подпоследовательностью $y_1, \dots, y_m$, потому что в этом случае для $z_l = y_i$ и $z_{l+1} = y_{i+k}$, где $k > 1$, не выполняется второе требование определения. Остается предположить, что, например, точка z_j не совпадает ни с одной из вершин y . Тогда эта точка принадлежит по лемме 1 одной из выпуклых оболочек $\{y_i, y_{i+1}\}$. Точки z_{j-1} и z_{j+1} должны принадлежать той же выпуклой оболочке, иначе для них не выполняется второе требование определения. Но в этом случае для точек z_{j-1} , z_j и z_{j+1} не выполняется третье требование определения. Значит, последовательность $z_1, \dots, z_s$ совпадает с $y_1, \dots, y_k$.

Построим последовательность вершин выпуклой оболочки точек x_1 и x_2 . Будем рассматривать два случая: когда $x_1 \prec x_2$ и когда x_1 и x_2 не сравнимы. Заметим, что без потери общности можно считать, что $x_1^i \neq x_2^i$ для всех i .

Докажем следующую теорему для случая $x_1 \prec x_2$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $x_1, x_2 \in S^n$ и $x_1^i \prec x_2^i$ для всех i . Тогда последовательность вершин y_i выпуклой оболочки x_1 и x_2 существует и с точностью до совпадающих вершин выполнены следующие утверждения:

1) если S – линейно упорядоченное идемпотентное полуполе, то $i = 1, \dots, n+1$, $y_{n+1} = x_2$ и $y_i = x_1 \oplus \lambda_i x_2$, если $i \neq n+1$, где λ_i является i -м членом последовательности

$$x_1^{l_1} \odot (x_2^{l_1})^{-1} \preceq \dots \preceq x_1^{l_n} \odot (x_2^{l_n})^{-1},$$

и $(l_1, \dots, l_n)$ есть соответствующая перестановка $\{1, \dots, n\}$;

2) если S – полукольцо $R_{\max \min}$, то $i = 1, \dots, 2n$ и $y_i = x_1 \oplus \lambda_i x_2$, где λ_i является i -м членом последовательности

$$x_1^{l(1)} \preceq \dots \preceq x_{u_i}^{l(i)} \preceq \dots \preceq x_2^{l(2n)}$$

и $i \mapsto (u_i, l(i))$ есть соответствующая биекция $\{1, \dots, 2n\}$ на $\{1, 2\} \times \{1, \dots, n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбрав из каждого класса эквивалентности совпадающих выпуклых комбинаций y_j по представителю и расположив их в порядке возрастания параметра λ , получим последовательность $z_1, \dots, z_{l+1}$, где $z_1 = x_1$, $z_{l+1} = x_2$ и $z_j = y_{r(j)}$, где $r(j)$ – соответствующее отображение множества $\{1, \dots, l+1\}$ в множество $\{1, \dots, n+1\}$ в случае полуполя и в множество $\{1, \dots, 2n\}$ в случае полукольца $R_{\max \min}$. Утверждение теоремы теперь сводится к тому, что последовательность $z_1, \dots, z_{l+1}$ является последовательностью вершин выпуклой оболочки $x_1 = z_1$ и $x_2 = z_{l+1}$.

Докажем это утверждение в случае полумодуля над идемпотентным полуполем.

Во-первых, так как $x_1^i \prec x_2^i$ для любого i , то $\lambda_i \prec 1$, следовательно, все y_i и z_i являются выпуклыми комбинациями точек x_1 и x_2 .

Докажем выполнение второго и третьего требований определения последовательности вершин. Введем множества индексов

$$\begin{aligned} N^+(\lambda) &= \{i \mid x_1^i \odot (x_2^i)^{-1} \succ \lambda\}, \\ N^0(\lambda) &= \{i \mid x_1^i \odot (x_2^i)^{-1} = \lambda\}, \\ N^-(\lambda) &= \{i \mid x_1^i \odot (x_2^i)^{-1} \prec \lambda\} \end{aligned}$$

и обозначим $y(\lambda) = x_1 \oplus \lambda x_2$. Тогда если $i \in N^+(\lambda) \cup N^0(\lambda)$, то $y^i(\lambda) = x_1^i$, если $i \in N^-(\lambda) \cup N^0(\lambda)$, то $y^i(\lambda) = \lambda \odot x_1^i$. Отсюда следует выполнение второго требования определения, причем $I_j = N^+(\lambda_{r(j)+1}) \cup N^0(\lambda_{r(j)+1})$ для любых $j = 1, \dots, l$. Заметим, что индекс $l_{r(j)}$ принадлежит I_{j-1} , но не принадлежит I_j , поэтому третье требование также выполнено.

Докажем утверждение теоремы для полумодуля над полукольцом $R_{\max \min}$.

Поскольку в полукольце $R_{\max \min}$ никакие элементы не превосходят $\mathbf{1}$, первое требование определения вершин выпуклой оболочки выполнено тривиально.

Докажем выполнение второго и третьего требований. Введем множества индексов

$$\begin{aligned} N_1^+(\lambda) &= \{i \mid x_1^i \succ \lambda\}, & N_1^0(\lambda) &= \{i \mid x_1^i = \lambda\}, \\ N_1^-(\lambda) &= \{i \mid x_1^i \prec \lambda\}, & N_2^+(\lambda) &= \{i \mid x_2^i \succ \lambda\}, \\ N_2^0(\lambda) &= \{i \mid x_2^i = \lambda\}, & N_2^-(\lambda) &= \{i \mid x_2^i \prec \lambda\}. \end{aligned}$$

Тогда если $i \in N_2^-(\lambda) \cup N_2^0(\lambda)$, то $y^i(\lambda) = x_2^i$, если $i \in (N_2^+(\lambda) \cup N_2^0(\lambda)) \cap (N_1^+(\lambda) \cup N_1^0(\lambda))$, то $y^i(\lambda) = x_1^i$, если $j \in (N_2^+(\lambda) \cup N_2^0(\lambda)) \cap (N_1^-(\lambda) \cup N_1^0(\lambda))$, то $y^i(\lambda) = \lambda$. Отсюда следует выполнение второго требования, причем $I_j = (N_2^-(\lambda_{r(j)}) \cup N_2^0(\lambda_{r(j)})) \cup ((N_2^+(\lambda_{r(j)+1}) \cup N_2^0(\lambda_{r(j)+1})) \cap (N_1^+(\lambda_{r(j)+1}) \cup N_1^0(\lambda_{r(j)+1})))$ для любых $j = 1, \dots, l$. Индекс $l(r(j))$ не может принадлежать одновременно $I(j-1)$ и $I(j)$, поэтому третье требование также выполнено.

Лемма 2 гарантирует единственность последовательности $z_1, \dots, z_l + 1$.

Докажем теперь аналогичную теорему для второго случая. Введем обозначения

$$M_0 = \{i \mid x_1^i = x_2^i\}, \quad M_1 = \{i \mid x_2^i \prec x_1^i\}, \quad M_2 = \{i \mid x_1^i \prec x_2^i\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть точки $x_1, x_2 \in S^n$ не сравнимы, $M_0 = \emptyset$, тогда последовательность вершин их выпуклой оболочки существует и единственна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случая $x_1 \prec x_2$ предложение уже доказано. Осталось доказать его для случая, когда x_1 и x_2 не сравнимы. В этом случае $\{1, \dots, n\} = M_1 \cup M_2$. Заметим, что точка $x_1 \oplus x_2$ является выпуклой комбинацией точек x_1 и x_2 и что в данном случае она отлична от них. Согласно лемме 1 все выпуклые комбинации точек x_1 и x_2 принадлежат либо выпуклой оболочке $\{x_1, x_1 \oplus x_2\}$, либо выпуклой оболочке $\{x_1 \oplus x_2, x_2\}$. Так как $x_1 \prec x_1 \oplus x_2$ и $x_2 \prec x_1 \oplus x_2$, то для обеих выпуклых оболочек существует последовательность промежуточных вершин. Соединяя две последовательности вершин с помощью точки $x_1 \oplus x_2$, мы получаем последовательность вершин выпуклой оболочки x_1 и x_2 . Для всех вершин, кроме $x_1 \oplus x_2$ все требования определения автоматически выполняются, как и первые два требования для точки $x_1 \oplus x_2$. Докажем

выполнение третьего требования. Действительно, выпуклая оболочка $\{x_1, x_1 \oplus x_2\}$ принадлежит плоскости $x^i = x_1^i$, $i \in M_1$, а выпуклая оболочка $\{x_1 \oplus x_2, x_2\}$ – плоскости $x^i = x_2^i$, $i \in M_2$, причем $M_1 \cap M_2 = 0$. Это означает, что множества I для точки $x_1 \oplus x_2$ и соседних с ней вершин не совпадают.

Единственность гарантируется леммой 2.

На основании теорем 1 и 2 предложим следующие алгоритмы построения последовательности несовпадающих вершин выпуклой оболочки точек x_1 и x_2 в полумодуле S^n над идемпотентным полуполем и над полукольцом $R_{\max \min}$.

Вначале для обоих алгоритмов исходное множество индексов $\{1, \dots, n\}$ разбивается на подмножества M_1 , M_2 и M_0 . Далее, если S – полуполе, для индексов i , принадлежащих M_1 , производится сортировка произведений $x_1^i \odot (x_2^i)^{-1}$ по возрастанию, в результате получается последовательность $\lambda_1 \preceq \dots \preceq \lambda_m$, где $\lambda_i = x_1^{l_i} \odot (x_2^{l_i})^{-1}$. Для i , принадлежащих M_2 , производится сортировка $x_2^i \odot (x_1^i)^{-1}$ и получается последовательность $\mu_1 \preceq \dots \preceq \mu_k$, где $\mu_i = x_2^{m_i} \odot (x_1^{m_i})^{-1}$. Если S – полукольцо $R_{\max \min}$, для индексов i , принадлежащих M_1 , производится совместная сортировка x_1^i и x_2^i по возрастанию, в результате получается последовательность $\lambda_1 \preceq \dots \preceq \lambda_{2m}$, где $\lambda_i = x_{u_i}^{l(i)}$. Для i , принадлежащих M_2 , производится аналогичная сортировка и получается последовательность $\mu_1 \preceq \dots \preceq \mu_{2k}$, где $\mu_i = x_{s_i}^{m(i)}$. Далее строится последовательность вершин выпуклых оболочек $\{x_1, x_1 \oplus x_2\}$ и $\{x_1 \oplus x_2, x_2\}$. Приведем алгоритмы построения последовательности вершин первой из этих выпуклых оболочек. Алгоритм построения второй можно получить путем замены x_1 на x_2 , M_1 на M_2 и (в случае полукольца $R_{\max \min}$) $N_1^{+, -0}$ на $N_2^{+, -0}$.

Алгоритм построения последовательности вершин выпуклой оболочки x_1 и $x_1 \oplus x_2$ в полумодуле над идемпотентным полуполем.

Состояние вычислительного процесса. Множество $\{1, \dots, n\}$ разбито на непересекающиеся множества M_1 , M_2 и M_0 , первое из которых разбито на непересекающиеся множества N^- , N^0 и N^+ . Исходя из принадлежности к этим множествам соответствующих индексов, вычисляются координаты вершин.

Начальное состояние: $N^0 = \{l_1\}$, $N^+ = M_1 \setminus \{l_1\}$.

Стандартный шаг алгоритма. Если $\lambda_{i+1} \succ \lambda_i$, то индекс l_{i+1} заносится в N^0 , индекс l_i заносится в N^- и вычисляются координаты вершины y_{i+1} по следующим правилам: $y_{i+1}^j = \lambda_{i+1} \odot x_2^j$, если $j \in (N^- \cup N^0)$, и $y_{i+1}^j = x_1^j$, если $j \in N^+ \cup M_2 \cup M_0$.

Если $\lambda_{i+1} = \lambda_i$, то индекс l_{i+1} заносится в N^0 и больше никаких действий не производится.

Алгоритм построения последовательности вершин выпуклой оболочки x_1 и $x_1 \oplus x_2$ в полумодуле над полукольцом $R_{\max \min}$.

Состояние вычислительного процесса. Множество $\{1, \dots, n\}$ разбито на непересекающиеся множества M_1 , M_2 и M_0 , первое из которых разбито на непересекающиеся множества N_1^- , N_1^0 и N_1^+ , а также на N_2^- , N_2^0 и N_2^+ . Исходя из принадлежности к этим множествам соответствующих индексов вычисляются координаты вершин.

Начальное состояние: $N_1^0 = \{l_1\}$, $N_1^+ = M_1 \setminus \{l_1\}$, $N_2^0 = 0$, $N_2^+ = M_1$.

Стандартный шаг алгоритма. Если $\lambda_{i+1} \succ \lambda_i$, то индекс $l(i+1)$ заносится в $N_{u_{i+1}}^0$, индекс $l(i)$ заносится в $N_{u_{i+1}}^-$ и вычисляются координаты вершины y_{i+1} по следующим правилам: $y_{i+1}^j = \lambda_{i+1}$, если $j \in (N_1^- \cup N_1^0) \cap (N_2^+)$, $y_{i+1}^j = x_2^j$, если $j \in (N_2^- \cup N_2^0)$, и $y_{i+1}^j = x_1^j$, если $j \in (N_2^+ \cap N_1^+) \cup M_2 \cup M_0$.

Если $\lambda_{i+1} = \lambda_i$, то индекс $l(i+1)$ заносится в N_{u+1}^0 и больше никаких действий не производится.

Построенные алгоритмы имеют вычислительную сложность n^2 . Это объясняется тем, что количество вершин (не считая исходных точек) может достигать $n-1$ для полуполя и $2n-2$ для $R_{\max \min}$.

В заключение отметим связь последовательности вершин выпуклой оболочки и теории (идемпотентно) линейных функционалов в идемпотентных полумодулях, развитой в статье [7]. В этой статье x -функционалом называется функционал, определяемый формулой

$$y \mapsto x^*(y) = \inf\{k \in S \mid kx \succeq y\},$$

где S – идемпотентное полукольцо, x и y – элементы полумодуля над этим полукольцом. Доказывается, что если S является идемпотентным полуполем и полумодуль удовлетворяет некоторым естественным требованиям, то x -функционал является линейным и любой линейный функционал представляется в виде x -функционала. Заметим теперь, что в полумодуле S^n , где S – идемпотентное полуполе, $x^*(y) = \bigoplus_i (x^i)^{-1} \odot y^i$. Тогда, если $x_1^i \prec x_2^i$ для любого i , то $y_n = x_1 \oplus x_2^*(x_1)x_2 = x_2^*(x_1)x_2$. Одна из координат y_n совпадает с соответствующей координатой x_1 , значит, все остальные вершины ее автоматически наследуют. Рассматривая x_1 и y_n как точки на $(n-1)$ -мерной плоскости, найдем, что $y_{n-1} = y_n^*(x_1)y_n$. Аналогично могут быть найдены все оставшиеся вершины.

Автор благодарит А. Н. Соболевского за постоянное внимание к работе и ценные указания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Маслов В. П. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1987.
- [2] Bacelli F. L., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J. P. Synchronization and Linearity: an Algebra for Discrete Event Systems. New York et al.: John Wiley & Sons Publ., 1992.
- [3] Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Наука, 1994.
- [4] Maslov V. P., Samborskii S. N. (eds.) Idempotent Analysis. Adv. Sov. Math. V. 13. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1992.
- [5] Gunawardena J. (ed.) Idempotency. Publ. of the Newton Institute. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
- [6] Litvinov G. L., Maslov V. P. Correspondence Principle for Idempotent Calculus and Some Computer Applications. Bures-Sur-Yvette: Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1995. (IHES/M/95/33).
- [7] Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б. Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 5. С. 758–797.
- [8] Zimmermann K. A general separation theorem in extremal algebras // Ekonomicko-matematicky obzor (Prague). 1977. V. 13. № 2. P. 179–201.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

15.07.2002

Исправленный вариант

13.12.2002