Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Щетинин, О кохомологиях эрмитовых симметрических пространств, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 6, 934–943

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm317>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 18:10:05

УДК 512.816

О КОГОМОЛОГИЯХ ЭРМИТОВЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

А. Н. Шетинин

Пусть M – односвязное компактное эрмитово симметрическое пространство. Выводится формула для значения степени двумерного класса когомологий M на произвольном классе гомотопий этого пространства.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. При изучении когомологий однородных пространств часто бывает нужно вычислять значение класса когомологий на классе гомотопий. Один из таких результатов получен в [1]. Он дает значение степени элемента $z \in H^2(K/L)$ на фундаментальном классе гомотопий $[K/L]$, где K – компактная связная полупростая группа Ли, L – ее (связная) подгруппа, являющаяся централизатором некоторого тора в K . Такое однородное пространство определяется парой (R, Θ) , где R – система корней группы K , Θ – ее подсистема, порожденная некоторым множеством простых корней. Формула, принадлежащая Борелю и Хирцебруху, имеет вид

$$\langle z^m, [K/L] \rangle = m! \prod \frac{(z, \gamma)}{(\rho, \gamma)}. \quad (1)$$

Здесь $2m$ – размерность K/L , 2ρ – сумма положительных корней, $(\cdot, \cdot)$ – инвариантное скалярное произведение, и произведение берется по всем положительным корням γ из $R \setminus \Theta$.

Мы хотим получить аналогичную формулу для значений степеней двумерного класса когомологий на произвольных классах гомотопий пространств вида K/L в случае, когда $K = K_1 \times \cdots \times K_r$, $L = L_1 \times \cdots \times L_r$, где K_j , $j = \overline{1, r}$, – простые неабелевы компактные связные группы Ли, L_j – централизаторы тором в K_j , являющиеся максимальными связными подгруппами. Как хорошо известно (см. [2]), это условие эквивалентно тому, что

$$K/L = K_1/L_1 \times \cdots \times K_r/L_r$$

– односвязное компактное эрмитово симметрическое пространство. С помощью результата работы [3] поставленная задача сводится к комбинаторной задаче об отыскании числа путей в некотором ориентированном графе. Этот граф явно строится для неприводимого эрмитова симметрического пространства каждого типа. К сожалению, автору не удалось получить доказательство, не использующее классификацию.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00329.

2. Пути в ориентированных графах. Рассмотрим в $\mathbb{R}^s$ решетку $\mathbb{Z}^s$ и ориентированный граф Γ^s , вершинами которого являются точки этой решетки, а дуги соединяют точки вида $(a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_s)$ и $(a_1, \dots, a_i, \dots, a_s)$. Рассмотрим в графе Γ^s подграф Γ_1^s , состоящий из таких вершин $(a_1, \dots, a_s)$, что $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_s$, и соединяющих их дуг.

ТЕОРЕМА 1. Число путей в графе Γ_1^s , соединяющих вершину $(0, 1, \dots, s-1)$ с вершиной $(a_1, \dots, a_s)$, при $s = 1$ равно $Q(a_1) = 1$ и при $s > 1$ равно

$$Q(a_1, \dots, a_s) = D(a_1, \dots, a_s) \frac{(a_1 + \dots + a_s - b)!}{a_1! \dots a_s!},$$

где $b = s(s-1)/2$, а

$$D(a_1, \dots, a_s) = \prod_{1 \leq i < j \leq s} (a_j - a_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема следует из теоремы 3.73 и предложения 3.68 из [4]. Мы приведем все же более короткое доказательство.

Применим индукцию по $a_1 + \dots + a_s$. Начало индукции очевидно. Рассмотрим вершину $(a_1, \dots, a_s)$. В нее ведут пути в точности из вершин $(a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_s)$, если $a_{i-1} < a_i - 1$ (считаем $a_0 = -1$). Положим

$$A = \frac{(a_1 + \dots + a_s - b - 1)!}{a_1! \dots a_s!}.$$

По предположению индукции и учитывая, что $D(a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_s) = 0$ при $a_{i-1} = a_i - 1$, $i > 1$, имеем

$$\begin{aligned} Q(a_1, \dots, a_s) &= \sum_{a_{i-1} < a_i - 1} Q(a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_s) \\ &= A \sum_{a_{i-1} < a_i - 1} a_i D(a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_s) = A \sum_{i=1}^s a_i D(a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_s). \end{aligned}$$

Рассмотрим сумму $\sum_{i=1}^s a_i D(a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_s)$. Как легко видеть, это (неоднородный) кососимметрический многочлен от $a_1, \dots, a_s$. Значит,

$$\sum_{i=1}^s a_i D(a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_s) = D(a_1, \dots, a_s) f(a_1, \dots, a_s), \quad (2)$$

где f – симметрический многочлен. Имеем $f(a_1, \dots, a_s) = a_1 + \dots + a_s + c$, и нам надо вычислить константу c . Для этого положим $a_i = i - 1$, $i = \overline{1, s}$. Подставив это в (2), видим, что левая часть равна нулю, а $D(0, 1, \dots, s-1) \neq 0$. Значит, $f(0, 1, \dots, s-1) = 0$, откуда $c = -s(s-1)/2$, как и требовалось.

Рассмотрим теперь подграф Γ_2^s в Γ^s , состоящий из вершин $(0, \dots, 0, a_1, \dots, a_k)$, $1 \leq a_1 < \dots < a_k$, $k = \overline{0, s}$, и соединяющих их дуг. Такие вершины будем обозначать просто $(a_1, \dots, a_k)$. Поем дуги этого графа, соединяющие вершины с одинаковым числом координат, натуральным числом λ , а остальные дуги – числом 1. Мы получим размеченный граф $\Gamma_2^s(\lambda)$. При определении числа путей в таком графе будем каждую дугу считать с кратностью, равной числовой отметке.

ТЕОРЕМА 2. Число путей в графе $\Gamma_2^s(\lambda)$, соединяющих начало координат с вершиной $(a_1, \dots, a_k)$, при $k = 1$ равно $Q(a_1) = \lambda^{a_1-1}$ и при $k > 1$ равно

$$Q(a_1, \dots, a_k) = \lambda^{a_1 + \dots + a_k - k} \frac{(a_1 + \dots + a_k)!}{a_1! \dots a_k!} \prod_{i < j} \frac{a_j - a_i}{a_j + a_i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по $a_1 + \dots + a_k$. Полагая $Q_i = Q(a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_k)$, если $a_{i-1} < a_i - 1$, и $Q_i = 0$, если $a_{i-1} = a_i - 1$, $i = \overline{1, k}$, $a_0 = -1$, имеем

$$Q(a_1, \dots, a_k) = \lambda \sum_{i=1}^k Q_i, \quad a_1 > 1, \quad (3)$$

$$Q(a_1, \dots, a_k) = Q(a_2, \dots, a_k) + \lambda \sum_{i=2}^k Q_i, \quad a_1 = 1. \quad (4)$$

По предположению индукции (считая, что $k > 1$)

$$Q_i = \frac{A a_i D(a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_k)}{\prod_{r < t, r, t \neq i} (a_r + a_t) \prod_{r \neq i} (a_r + a_i - 1)}, \quad i = \overline{1, k},$$

где общий множитель

$$A = \lambda^{a_1 + \dots + a_k - k - 1} \frac{(a_1 + \dots + a_k - 1)!}{a_1! \dots a_k!},$$

и $Q(a_2, \dots, a_k) = \lambda Q_1$ при $a_1 = 1$.

Рассмотрим дробь $Q_i/A + Q_j/A$. Она равна дроби, знаменатель которой имеет вид

$$\prod_{r < t, r, t \neq i, j} (a_r + a_t) \prod_{r \neq i, j} (a_r + a_i - 1) \prod_{r \neq j} (a_r + a_j - 1),$$

а числитель, с точностью до знака, есть

$$\begin{aligned} & \left(a_i \prod_{r \neq i} (a_r - a_i + 1) \prod_{r \neq i, j} (a_r - a_j) \prod_{r \neq i, j} (a_r + a_i) \prod_{r \neq i, j} (a_r + a_j - 1) \right. \\ & - a_j \prod_{r \neq j} (a_r - a_j + 1) \prod_{r \neq i, j} (a_r - a_i) \prod_{r \neq i, j} (a_r + a_j) \\ & \left. \times \prod_{r \neq i, j} (a_r + a_i - 1) \right) \prod_{r < t, r, t \neq i, j} (a_r - a_t). \end{aligned}$$

Как легко проверить, этот многочлен обращается в 0 при $a_i = 1 - a_j$ и потому делится на $a_i + a_j - 1$. Таким образом, после приведения к одному знаменателю суммы (3) или (4) сомножители этого вида сократятся и останется знаменатель $\prod_{r < t} (a_r + a_t)$. Так как все дроби Q_i/A кососимметричны по $a_1, \dots, a_s$, то вся сумма примет вид

$$Q(a_1, \dots, a_k) = \frac{\lambda A D(a_1, \dots, a_k) f(a_1, \dots, a_k)}{\prod_{i < j} (a_i + a_j)},$$

где f – симметрический многочлен. Сравнивая степени, видим, что $f = a_1 + \dots + a_k + c$. Положим теперь $a_i = i$, $i = \overline{1, k}$. Тогда все $Q(a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_k) = 0$, за исключением отвечающего $i = 1$, откуда $f(1, 2, \dots, k) = k(k+1)/2$. Значит, константа $c = 0$, и мы получаем требуемое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. Рассмотрим в графе из теоремы 2 подмножество, состоящее из вершин с четным числом координат. Дуги, соединяющие вершины с одинаковым числом координат, такие же, как в графе из теоремы 2. И пусть, кроме того, дуги идут от вершин $(a_1, \dots, a_{2k})$ к вершинам $(1, 2, a_1, \dots, a_{2k})$, $0 \leq 2k \leq s-2$, а все числовые отметки равны 1. Тогда число путей, ведущих из начала координат в вершину $(a_1, \dots, a_{2k})$, равно

$$Q'(a_1, \dots, a_{2k}) = \frac{(a_1 + \dots + a_{2k} - 2k)!}{(a_1 - 1)! \dots (a_{2k} - 1)!} \prod_{i < j} \frac{a_j - a_i}{a_j + a_i - 2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из того, что $Q'(a_1, \dots, a_{2k}) = Q(a_1 - 1, \dots, a_{2k} - 1)$, где $Q(a_1, \dots, a_i)$ – функция из теоремы 2, а $\lambda = 1$.

3. Граф однородного пространства. Пусть K – компактная связная полупростая группа Ли, T – ее максимальный тор, R – система корней группы K относительно тора T . Зафиксируем базис $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ системы корней R , и пусть R_+ – соответствующее множество положительных корней. Простые корни будем нумеровать как в [5]. Обозначим через β максимальный корень и через 2ρ – сумму положительных корней.

Введем инвариантное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, нормированное условием $(\gamma, \gamma) = 2$ для короткого корня γ . Для корня γ через s_γ обозначим отражение относительно γ . Пусть W – группа Вейля системы R . Если Θ – подсистема в R , имеющая в качестве базиса некоторое подмножество из B , то положим $\Theta_+ = \Theta \cap R_+$ и через $W(\Theta)$ обозначим подгруппу в W , порожденную отражениями $s_\gamma, \gamma \in \Theta$. Через ω_i обозначим i -й фундаментальный вес.

Для элемента $w \in W$ обозначим через $l(w)$ его длину, т.е. такое минимальное число q , что w есть произведение q отражений вида $s_\alpha, \alpha \in B$. Группа W допускает представление в виде ориентированного графа, вершины которого соответствуют ее элементам, а два элемента w и w' соединяются дугой $w \rightarrow w'$, если $l(w') = l(w) + 1, w' = s_\gamma w$ для некоторого $\gamma \in R_+$.

Подсистема Θ определяет централизатор тора в K , который мы обозначим через L . Рассмотрим множество смежных классов $W/W(\Theta)$. Как показано в [3], в каждом смежном классе содержится единственный представитель наименьшей длины и это множество представителей

$$W^1(\Theta) = \{w \in W \mid w(\Theta_+) \subset R_+\}.$$

Отметим, что если $w \in W^1(\Theta), \gamma \in R_+$ и $w^{-1}(\gamma) < 0$, то $w^{-1}(\gamma) \notin \Theta$.

Рассмотрим в графе группы W вершины, отвечающие элементам из $W^1(\Theta)$, и дуги, их соединяющие. Мы получим подграф, который назовем *графом однородного пространства K/L* . При этом, если $w, w' \in W^1(\Theta), w \rightarrow w'$ и $w' = s_\gamma w$, то $w' = ws_{w^{-1}(\gamma)}$ и $w^{-1}(\gamma) \notin \Theta$, так как в противном случае элементы w и w' принадлежали бы одному смежному классу по $W(\Theta)$.

Пусть w_0 – (единственный) элемент максимальной длины в W , w_Θ – (также единственный) элемент максимальной длины в $W(\Theta)$, $w_\Theta^1 = w_0 w_\Theta$. Предположим, что $\gamma \in R_+$. Тогда $w_\Theta^1(-\gamma) \in R_+$ в точности, когда $\gamma \in R_+ \setminus \Theta_+$. Ясно, что $w_\Theta^1 \in W_\Theta^1$ и это единственный элемент максимальной длины в W_Θ^1 .

Приведем теперь необходимые сведения о гомологиях и когомологиях однородного пространства K/L . Мы рассматриваем исключительно целочисленные гомологии и

когомологии. Гомологии $H_{2l}(K/T)$ пространства K/T образуют свободную абелеву группу с образующими D_w , $w \in W$, $l(w) = l$. Естественное отображение $p: K/T \rightarrow K/L$ индуцирует эпиморфизм абелевых групп $p_*: H_*(K/T) \rightarrow H_*(K/L)$ и мономорфизм колец $p^*: H^*(K/L) \rightarrow H^*(K/T)$. Обозначая через $\langle x, y \rangle$ значение класса когомологий x на классе гомологий y , имеем

$$\langle p^*(z), D_w \rangle = \langle z, p_*(D_w) \rangle,$$

где $z \in H^*(K/L)$. При этом $p_*(D_w) = 0$, если $w \notin W^1(\Theta)$, а элементы $F_w = p_*(D_w)$, $w \in W^1(\Theta)$, образуют базис свободной абелевой группы $H_*(K/L)$ (см. [3]).

Свободную абелеву группу $H^2(K/T)$ отождествим с решеткой весов группы K (которую без потери общности считаем односвязной). Если $z \in H^2(K/L)$, то $p^*(z)$ можно отождествить с некоторым весом. Мы будем вместо $p^*(z)$ писать просто z . Положим $z(\gamma) = 2(z, \gamma)/(\gamma, \gamma)$, $\gamma \in R$.

Вплоть до п. 5 группу K считаем простой. Пусть подсистема Θ имеет базис $B \setminus \{\alpha_i\}$, и пусть L – соответствующий централизатор тора. Снабдим дугу $w \rightarrow w'$ графа пространства K/L числовой отметкой, равной $\omega_i(\gamma)$, где $w'^{-1} = s_\gamma w^{-1}$, $\gamma \in R_+$. Мы получим *размеченный граф* $\Gamma(K/L)$ *однородного пространства* K/L .

Предположим, что L – максимальная связная подгруппа. Имеем $\beta = \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j$, причём $c_i = 1$ (см., например, [6]). Если $\gamma \in R_+ \setminus \Theta_+$, то

$$\gamma = \sum_{j=1}^n d_j \alpha_j, \quad d_j \leq c_j, \quad j = \overline{1, n},$$

и $d_i \neq 0$, откуда $d_i = 1$ и $(\omega_i, \gamma) = (\omega_i, \alpha_i)$. Таким образом, все числовые отметки равны 1, кроме случая, когда R – система типа B_n или C_n , а γ – короткий корень (здесь α_i – длинный корень, и соответствующие отметки равны 2).

Пусть $z \in H^2(K/L)$ и $w \in W^1(\Theta)$. Тогда (см. [3, теорема 3.12])

$$\langle z^l, F_w \rangle = \sum z(\gamma_1) \dots z(\gamma_l), \quad (5)$$

где сумма берется по всем цепочкам

$$e \rightarrow w_1 \rightarrow \dots \rightarrow w_l = w^{-1}, \quad w_i = s_{\gamma_i} w_{i-1}, \quad \gamma_i > 0, \quad i = \overline{1, l}.$$

Заметим, что ненулевой вклад в сумму вносят лишь те цепочки, у которых все $w_i^{-1} \in W^1(\Theta)$. При этом, если Θ имеет базис $B \setminus \{\alpha_i\}$, а $z = \omega_i$, то $z(\gamma_i)$ есть числовая отметка в размеченном графе однородного пространства K/L и правая часть (5) равна числу путей, соединяющих вершину e с вершиной w .

Пусть Θ имеет базис $B \setminus \{\alpha_i\}$. Рассмотрим представление комплексной алгебры Ли, определяемой группой K , со старшим весом $\Lambda = \omega_i$. Как хорошо известно, $w(\Lambda)$ есть вес того же представления для любого $w \in W$. Поставив в соответствие элементу $w \in W^1(\Theta)$ вес $w(\Lambda)$, мы получим отображение множества $W^1(\Theta)$ в множество всех весов представления со старшим весом Λ . Это отображение инъективно. В самом деле, если $w_1(\Lambda) = w_2(\Lambda)$, $w_1, w_2 \in W^1(\Theta)$, то $w_1 = w_2 w$, где $w(\Lambda) = \Lambda$. Тогда $w \in W(\Theta)$ (см. [7, дополнение]) и $w = 1$.

Пусть $w \in W^1(\Theta)$, $\alpha \in B$ и $(w(\Lambda), \alpha) > 0$. Тогда $w^{-1}(\alpha) > 0$ и $w^{-1}(\alpha) \notin \Theta$, откуда $l(s_\alpha w) = l(w) + 1$ (см. [7]) и $w' = s_\alpha w \in W^1(\Theta)$. При этом $w(\Lambda) - \Lambda(\alpha)\alpha = w'(\Lambda)$ есть вес. Обратно, если $\alpha \in B$, $w, w' \in W^1(\Theta)$, $w \rightarrow w'$ и $w' = s_\alpha w$, то $(w(\Lambda), \alpha) > 0$.

Рассмотрим теперь граф, вершины которого задаются элементами $w \in W^1(\Theta)$, а вершины w и w' соединены дугой тогда и только тогда, когда существует такой $\alpha \in B$, что

$$(w(\Lambda), \alpha) > 0 \quad \text{и} \quad w'(\Lambda) = w(\Lambda) - \Lambda(\alpha)\alpha.$$

Введем в нем разметку как в $\Gamma(K/L)$. Назовем этот граф $\Gamma(\Lambda)$ *графом системы весов*, хотя не все веса представления, вообще говоря, соответствуют его вершинам. Отметим также (см. ниже замечание после теоремы 3), что в графе $\Gamma(K/L)$ могут быть дуги, которых нет в графе $\Gamma(\Lambda)$.

4. Основная теорема. Рассмотрим формулу (1). Используя результат упражнения 3 из [8, гл. 8, § 9], а также следствие из предложения 29 из [5, гл. 6, § 1], ее можно переписать в более удобном для вычислений виде

$$\langle z^m, [K/L] \rangle = m! \frac{f_1! \dots f_s!}{k_1! \dots k_n!} \prod z(\gamma), \quad (6)$$

где произведение берется по всем $\gamma \in R_+ \setminus \Theta_+$, $k_1, \dots, k_n$ – показатели группы K , $f_1, \dots, f_s$ – показатели группы L .

Формула (1) справедлива для любого централизатора тора L в произвольной полупростой группе K . Мы хотим получить ее обобщение, вычислив значение степени класса когомологий z на произвольном классе гомологий пространства K/L . Для простой группы K это удастся сделать в случае, когда L – максимальная связная подгруппа.

ТЕОРЕМА 3. Пусть K – простая компактная связная односвязная группа Ли, L – ее максимальная связная подгруппа, являющаяся централизатором тора и $z \in H^2(K/L)$. Тогда значение класса когомологий z^l на классе гомологий F_w , $l(w) = l$, дается формулой

$$\langle z^l, F_w \rangle = l! \prod \frac{(w(z), -\gamma)}{(\rho, \gamma)}, \quad (7)$$

где произведение берется по всем таким $\gamma \in R_+$, что $w^{-1}(\gamma) < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Однородное пространство K/L определяется парой (R, α_i) . Полный список таких пар следующий:

$$(A_n, \alpha_s), \quad 1 \leq s \leq n, \quad (B_n, \alpha_1), \quad (C_n, \alpha_n), \quad (D_n, \alpha_1), \quad (D_n, \alpha_{n-1}), \\ (D_n, \alpha_n), \quad (E_7, \alpha_7), \quad (E_6, \alpha_1), \quad (E_6, \alpha_6).$$

Мы рассмотрим эти случаи в отдельности, построив для каждого из них граф системы весов. Затем докажем, что число путей в таком графе, соединяющих вершину e с вершиной w , определяется правой частью формулы (7). Можно считать, что $z = \Lambda = \omega_i$.

1) Пусть пространство отвечает паре (A_n, α_s) . Имеем

$$R_+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n+1\}$$

и $2\rho = n\varepsilon_1 + (n-2)\varepsilon_2 + \dots - (n-2)\varepsilon_n - n\varepsilon_{n+1}$. Старший вес имеет вид $\Lambda = \omega_s = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s$. Произвольный вес можно записать в виде $w(\Lambda) = \varepsilon_{a_1+1} + \dots + \varepsilon_{a_s+1}$, где $w \in W^1(\Theta)$, $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_s \leq n$. Таким образом, установлена биекция между множеством $W^1(\Theta)$ и множеством наборов $(a_1, \dots, a_s)$, где $0 \leq a_1 < \dots < a_s \leq n$.

Элементы w и w' , определенные наборами $(a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_s)$ и $(a_1, \dots, a_i, \dots, a_s)$ соответственно, соединяются дугой $w \rightarrow w'$.

Мы видим, что граф системы весов можно рассматривать как подграф графа Γ_1^s из теоремы 1, содержащий в точности вершины, для которых $a_s \leq n$. Далее, если w отвечает набору $(a_1, \dots, a_s)$, т.е. весу $\varepsilon_{a_1+1} + \dots + \varepsilon_{a_s+1}$, то (при $s > 1$)

$$\prod(\rho, \gamma) = \frac{a_1! \dots a_s!}{D(a_1, \dots, a_s)}, \quad \prod(w(z), -\gamma) = 1,$$

где произведение берется по всем $\gamma \in R_+$, $w^{-1}(\gamma) < 0$, а число таких корней γ есть $l = a_1 + \dots + a_s - s(s-1)/2$. Требуемое утверждение вытекает из теоремы 1.

2) Пара (R, α_i) есть (C_n, α_n) . Имеем

$$R_+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad 2\varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

и $\rho = n\varepsilon_1 + \dots + 2\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$. Старший вес $\Lambda = \omega_n = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$, остальные веса $w(\Lambda)$ имеют вид $\Lambda - 2(\varepsilon_{n-a_1+1} + \dots + \varepsilon_{n-a_k+1})$, $1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq n$, $1 \leq k \leq n$. Граф системы весов можно отождествить с подграфом графа $\Gamma_2^s(\lambda)$ из теоремы 2 для $\lambda = 2$, $s = n$, состоящим из вершин $(a_1, \dots, a_k)$ с $a_k \leq n$ и соединяющих их дуг. Если w отвечает такой вершине, то (при $k > 1$)

$$\prod(\rho, \gamma) = 2^k a_1! \dots a_k! \prod_{i < j} \frac{a_j + a_i}{a_j - a_i}, \quad \prod(w(z), -\gamma) = 2^{a_1 + \dots + a_k},$$

где произведение берется по всем $\gamma \in R_+$, $w^{-1}(\gamma) < 0$, а число таких корней γ равно $l = a_1 + \dots + a_k$. Требуемое утверждение следует из теоремы 2.

3) Из случаев (D_n, α_{n-1}) и (D_n, α_n) достаточно рассмотреть первый. Имеем

$$R_+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \quad 1 \leq i < j \leq n\}$$

и $\rho = (n-1)\varepsilon_1 + \dots + 2\varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-1}$. Здесь $\Lambda = \omega_n = (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n)/2$, остальные веса имеют вид $\Lambda - (\varepsilon_{n-a_1+1} + \dots + \varepsilon_{n-a_{2k}+1})$, $1 \leq a_1 < \dots < a_{2k} \leq n$, $0 \leq 2k \leq n$. Граф системы весов рассматриваем как подграф графа из следствия из теоремы 2 для $s = n$, образованный всеми вершинами $(a_1, \dots, a_{2k})$ с $a_{2k} \leq n$ и соединяющими их дугами. Если w отвечает такой вершине, то

$$\prod(\rho, \gamma) = (a_1 - 1)! \dots (a_{2k} - 1)! \prod_{i < j} \frac{a_j + a_i - 2}{a_j - a_i}, \quad \prod(w(z), -\gamma) = 1,$$

произведение берется по всем $\gamma \in R_+$, $w^{-1}(\gamma) < 0$ и число таких γ равно $l = a_1 + \dots + a_{2k} - 2k$. Теперь применим следствие из теоремы 2.

4) Случаи (B_n, α_1) и (D_n, α_1) проверяются элементарно.

5) Рассмотрим случай (E_7, α_7) . Здесь R_+ состоит из корней вида

$$\begin{aligned} & \pm \varepsilon_i + \varepsilon_j, \quad 1 \leq i < j \leq 6, \quad \varepsilon_8 - \varepsilon_7, \\ & \frac{1}{2} \left(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 + \sum_{i=1}^6 (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i \right) \quad \text{с нечетной суммой} \quad \sum_{i=1}^6 \nu(i), \end{aligned}$$

и $2\rho = 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + 6\varepsilon_4 + 8\varepsilon_5 + 10\varepsilon_6 - 17\varepsilon_7 + 17\varepsilon_8$. Положим

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7), \quad \sigma = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6).$$

Старший вес $\Lambda = \omega_7 = \varepsilon_6 + \varepsilon$. Граф системы весов можно рассматривать как подграф в Γ^3 . Веса соответствуют вершинам графа следующим образом. Вес $\varepsilon_a + \varepsilon$ отвечает вершине $(6 - a, 0, 0)$, $1 \leq a \leq 6$, вес $-\varepsilon_b + \varepsilon$ — вершине $(5, b - 1, 0)$, $2 \leq b \leq 6$, вес $-\varepsilon_1 + \varepsilon$ — вершине $(4, 1, 0)$, вес σ — вершине $(6, 0, 0)$, вес $\sigma - (\varepsilon_a + \varepsilon_b)$ — вершине $(a + 5, b - 1, 0)$, $1 \leq a < b \leq 6$ (кроме веса $\sigma - (\varepsilon_5 + \varepsilon_6)$, отвечающего вершине $(9, 6, 0)$). Наконец, если вес Λ' соответствует вершине $(i, j, 0)$, то вес $-\Lambda'$ — вершине $(17 - i, 9 - j, 1)$.

Выпишем по построенному графу производящую функцию числа путей

$$\begin{aligned} S(x, y, z) = & 1 + x + x^2 + x^3 + x^4(1 + y) + x^5(1 + 2y + 2y^2 + 2y^3 + 2y^4 + 2y^5) \\ & + x^6(1 + 3y + 5y^2 + 7y^3 + 9y^4 + 11y^5) + x^7(5y^2 + 12y^3 + 21y^4 + 32y^5) \\ & + x^8(12y^3 + 33y^4 + 12y^3z + 65y^5 + 45y^4z + 110y^5z) \\ & + x^9(33y^4 + 98y^5 + 78y^4z + 98y^6 + 286y^5z + 384y^6z) \\ & + x^{10}(78y^4z + 364y^5z + 748z(y^6 + y^7)) \\ & + x^{11}z(78y^4 + 442y^5 + 1190y^6 + 1938(y^7 + y^8 + y^9)) \\ & + x^{12}z(78y^4 + 520y^5 + 1710y^6 + 3648y^7) + 5586y^8z(x^{12} + x^{13}) \\ & + 7524x^{12}y^9z + 13110y^9z(x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17}). \end{aligned}$$

Для вершины (i, j, k) , отвечающей весу $\sigma - (\varepsilon_a + \varepsilon_b)$, правая часть (7) дает

$$D(a, b, 2a + 2b - 2) \frac{(a + b - 3)!}{a!b!}, \quad 1 \leq a < b \leq 6,$$

а для вершины, отвечающей весу $-\sigma + (\varepsilon_a + \varepsilon_b)$, —

$$\frac{k(a)D(a, b, c)(a + 4)!(b + 4)!(c + 4)!(c - 7)!}{(a - 1)!(b - 1)!(c - 1)!(17 - a)(17 - b)(17 - c)(6 - a)!(6 - b)!10!7!}$$

$$c = 19 - a - b, \quad 1 \leq a < b \leq 6,$$

где $k(a) = 2$, если $a = 1$, и $k(a) = 1$ в противном случае. Несложная, хотя длинная проверка показывает, что мы получаем в точности коэффициент при $x^i y^j z^k$ в $S(x, y, z)$. Для остальных вершин явные формулы мы не выписываем, но проверка также не представляет трудностей.

6) Из оставшихся достаточно рассмотреть случай (E_6, α_6) . Положительные корни имеют вид

$$\begin{aligned} & \pm \varepsilon_i + \varepsilon_j, \quad 1 \leq i < j \leq 5, \\ & \frac{1}{2} \left(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^5 (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i \right) \quad \text{с четной суммой} \quad \sum_{i=1}^5 \nu(i), \end{aligned}$$

и $\rho = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 + 4\varepsilon_5 + 4(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6)$. Положим

$$\varepsilon = \frac{1}{6}(-\varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8), \quad \sigma = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5).$$

Старший вес $\Lambda = \omega_6 = \varepsilon_5 + 2\varepsilon$. Граф системы весов можно рассматривать как подграф в Γ^2 . Вес $\varepsilon_a + 2\varepsilon$ отвечает вершине $(5 - a, 0)$, $1 \leq a \leq 5$, вес $-\varepsilon_a + 2\varepsilon$ – вершине $(4, a - 1)$, $2 \leq a \leq 5$, вес $-\varepsilon_1 + 2\varepsilon$ – вершине $(3, 1)$, вес $\sigma - \varepsilon$ – вершине $(5, 0)$, вес $\sigma - \varepsilon - (\varepsilon_a + \varepsilon_b)$ – вершине $(a + 4, b - 1)$, $1 \leq a < b \leq 5$, $(a, b) \neq (4, 5)$, вес $\sigma - \varepsilon - (\varepsilon_4 + \varepsilon_5)$ – вершине $(7, 5)$, вес $-\sigma - \varepsilon + \varepsilon_b$ – вершине $(8, 8 - b)$, $1 \leq b \leq 5$, вес -4ε – вершине $(8, 8)$.

Производящая функция числа путей есть

$$\begin{aligned} S(x, y) = & 1 + x + x^2 + x^3(1 + y) + x^4(1 + 2y + 2y^2 + 2y^3 + 2y^4) \\ & + x^5(1 + 3y + 5y^2 + 7y^3 + 9y^4) + x^6(5y^2 + 12y^3 + 21y^4) \\ & + x^7(12y^3 + 33y^4 + 33y^5) + x^8(12y^3 + 45y^4 + 78(y^5 + y^6 + y^7 + y^8)). \end{aligned}$$

Для вершины (i, j) , отвечающей весу $\sigma - \varepsilon - (\varepsilon_a + \varepsilon_b)$, правая часть формулы (7) дает

$$D(a, b, 2a + 2b - 2) \frac{(a + b - 3)!}{a!b!}, \quad 1 \leq a < b \leq 5,$$

а для вершины, отвечающей весу $-\sigma - \varepsilon + \varepsilon_b$,

$$D(b, 6, 13 - b) \frac{(b + 3)!(16 - b)!}{11.7!5!(b - 1)!(12 - b)!}, \quad 2 \leq b \leq 5,$$

т.е. получаем коэффициент при $x^i y^j$ в $S(x, y)$, и это нетрудно проверить для остальных вершин.

Для завершения доказательства теоремы остается установить, что граф системы весов совпадает с графом однородного пространства. Заметим, что для вершины w_Θ^1 число путей для графа однородного пространства, которое дает известная формула (6), совпадает с числом путей в графе системы весов. Кроме того, для каждой вершины w существует путь, соединяющий ее с w_Θ^1 . Поэтому, если бы в графе однородного пространства были дуги, которых нет в графе системы весов, то число путей, ведущих в w_Θ^1 , в нем было бы больше. Так как это не так, в действительности эти графы совпадают, и теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если система R состоит из корней одной длины, а L – централизатор тора, являющийся максимальной связной подгруппой, то число элементов в $W^1(\Theta)$ равно размерности представления, определенного старшим весом $\Lambda = \omega_i$ (см. [8]), и вершинами графа исчерпываются все веса представления.

Если L – не максимальная подгруппа, то графы $\Gamma(K/L)$ и $\Gamma(\Lambda)$ могут не совпадать. Например, это так для пространства, определенного парой (C_3, α_2) . Здесь $\Lambda = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ и вершины w_1 и w_2 , где $w_1(\Lambda) = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $w_2(\Lambda) = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, не соединены в $\Gamma(\Lambda)$, но соединены в $\Gamma(K/L)$.

5. Случай приводимого пространства. Пусть M – произвольное односвязное компактное эрмитово симметрическое пространство. Тогда

$$M = K_1/L_1 \times \cdots \times K_r/L_r,$$

где K_i/L_i , $i = \overline{1, r}$, – однородные пространства рассмотренного выше типа. Имеем $R = \bigoplus_{i=1}^r R_i$, где R_i – системы корней групп K_i соответственно. Обозначим через W_i группу Вейля системы R_i и через $2\rho_i$ сумму положительных корней из R_i . Если пространство $M = K/L$ задается подсистемой корней Θ , то положим $\Theta \cap R_i = \Theta_i$, $i = \overline{1, r}$. Имеем

$$W = W_1 \times \cdots \times W_r, \quad W(\Theta) = W(\Theta_1) \times \cdots \times W(\Theta_r),$$

и нетрудно проверить, что элемент $w \in W^1(\Theta)$ однозначно представляется в виде $w = w_1 \cdots w_r$, где $w_i \in W_i \cap W^1(\Theta_i)$, $i = \overline{1, r}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $z \in H^2(M)$. Значение класса когомологий z^l на классе го-
мологий F_w , $l(w) = l$, дается формулой

$$\langle z^l, F_w \rangle = l! \prod \frac{(w(z), -\gamma)}{(\rho, \gamma)},$$

где произведение берется по всем таким $\gamma \in R_+$, что $w^{-1}(\gamma) < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кольца $H^*(K_i/L_i)$, $i = \overline{1, r}$, можно рассматривать как подколь-
ца в $H^*(K/L)$. Имеем $z = z_1 + \dots + z_r$, $z_i \in H^2(K_i/L_i)$, $i = \overline{1, r}$. Пусть $w = w_1 \dots w_r$,
 $w_i \in W_i \cap W^1(\Theta_i)$, $l(w_i) = l_i$, $i = \overline{1, r}$. Тогда

$$\langle z^l, F_w \rangle = \frac{l!}{l_1! \dots l_r!} \prod_{i=1}^r \langle z_i, F_{w_i} \rangle.$$

Так как

$$\langle z_i, F_{w_i} \rangle = l_i! \prod \frac{(w_i(z_i), -\gamma_i)}{(\rho_i, \gamma_i)}, \quad i = \overline{1, r},$$

где произведение берется по всем таким $\gamma_i \in (R_i)_+$, что $w_i^{-1}(\gamma_i) < 0$, а $\rho = \rho_1 + \dots + \rho_r$,
получаем требуемое.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Borel A., Hirzebruch F. Characteristic classes and homogeneous spaces. II // Amer. J. Math. 1959. V. 81. P. 315–382.
- [2] Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
- [3] Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И. Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P // УМН. 1973. Т. 28. № 3. С. 3–26.
- [4] Айгнер М. Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982.
- [5] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972.
- [6] Гото М., Гроссханс Ф. Полупростые алгебры Ли. М.: Мир, 1981.
- [7] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.
- [8] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1978.

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

Поступило
20.12.2000