Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Симонов, Об элементе наилучшего несимметричного приближения в пространствах с несимметричной квазинормой, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 6, 902–912

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm318>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:23:39

УДК 517.51

ОБ ЭЛЕМЕНТЕ НАИЛУЧШЕГО НЕСИММЕТРИЧНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ С НЕСИММЕТРИЧНОЙ КВАЗИНОРМОЙ

Б. В. Симонов

В работе доказана теорема о существовании элемента наилучшего несимметричного приближения в пространствах с несимметричной квазинормой. Приведены примеры, показывающие существенность условий, наложенных в теореме. Указан критерий элемента наилучшего несимметричного приближения.

Библиография: 10 названий.

Задача об элементе наилучшего приближения в различных функциональных пространствах является одной из основных задач теории приближений. В настоящей работе рассматриваются несимметричные приближения в пространствах с несимметричной квазинормой, обобщающие пространства L_r . Введем ряд определений.

Пусть ϕ – совокупность неотрицательных, неубывающих, непрерывных и выпуклых вниз на полупрямой $[0, +\infty)$ функций φ , удовлетворяющих Δ_2 -условию (т.е. таких, для которых существует положительная постоянная c такая, что $\varphi(2u) \leq c\varphi(u)$ для всех $u \in (0, +\infty)$). Пусть (T, Ω, μ) – пространство с (положительной) мерой [1, с. 52]. Через L_φ , где $\varphi \in \phi$, обозначим множество всех μ -измеримых, конечных почти всюду функций f , для которых $\int_T \varphi(|f(t)|) d\mu < +\infty$.

Пусть $L_0(T)$ – линейное пространство всех μ -измеримых, конечных почти всюду на T функций. Как обычно, считаем $f_1 = f_2$, если

$$\mu\{t \in T : f_1(t) \neq f_2(t)\} = 0.$$

Через $L_{\varphi+\varphi_-}$ обозначим множество функций f таких, что $f \in L_{\varphi_+}$ и $f \in L_{\varphi_-}$. Положим

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\}.$$

Зададим на $L_{\varphi+\varphi_-}$ следующий функционал:

$$\|f\|_{\varphi+\varphi_-} = \int_T \varphi_+(f^+(t)) d\mu + \int_T \varphi_-(f^-(t)) d\mu.$$

По аналогии с работой [2] назовем этот функционал *несимметричной квазинормой*. Упорядоченную пару $p = (p_+, p_-)$, где $p_+, p_- \in L_0(T)$, назовем *весом* на T . Введем обозначение

$$(f; p)(t) = f^+(t)p_+(t) - f^-(t)p_-(t).$$

Заметим, что если $p_+(t) \equiv p_-(t) \equiv 1$, то $(f; p)(t) = f(t)$. Рассмотрим функционал $\|(f; p)\|_{\varphi_+\varphi_-}$. Если

$$\varphi_+(u) = \varphi_-(u) = u^r (r \geq 1), \quad T = [a, b], \quad p_+(t) \equiv \alpha > 0, \quad p_-(t) \equiv \beta > 0,$$

то $\|(f; p)\|_{\varphi_+\varphi_-}^{1/r}$ совпадает с функционалом $\|f\|_{r,(\alpha,\beta)}$, введенным в [3].

Пусть H – конечномерное подпространство пространства $L_{\varphi_+\varphi_-}$, $f, g \in L_{\varphi_+\varphi_-}$. Положим $\rho(f, g) = \|(f - g; p)\|_{\varphi_+\varphi_-}$,

$$\rho(f, H) = \inf_{g \in H} \rho(f, g). \quad (1)$$

Величину $\rho(f, H)$ назовем *наилучшим несимметричным приближением функции f элементами из H в пространстве с несимметричной квазинормой $L_{\varphi_+\varphi_-}$* , а элемент $g_0 \in H$, на котором достигается $\inf$ в (1), – *элементом наилучшего несимметричного приближения в $L_{\varphi_+\varphi_-}$ подпространством H* . Если $\varphi_+(u) = \varphi_-(u) = u^r$ ($r \geq 1$), $T = [a, b]$, $p_+(t) \equiv p_-(t) \equiv 1$, то $\rho^{1/r}(f, H)$ является наилучшим приближением функции f элементами из H в метрике $L_r(a, b)$.

В [4] доказано существование элемента наилучшего приближения в пространстве L_φ . Кроме того, хорошо известна

ТЕОРЕМА А [5, с. 53]. Пусть H – конечномерное подпространство в $L_r(a, b)$, $1 \leq r < \infty$. Для того чтобы функция $g_0 \in H$ доставляла функции $f \in L_r(a, b)$ наилучшее приближение в подпространстве H , достаточно и (при $r = 1$ в случае, если разность $f(t) - g_0(t)$ почти всюду на $[a, b]$ отлична от нуля) необходимо, чтобы для любой функции g из H выполнялось условие

$$\int_a^b g(t) |f(t) - g_0(t)|^{r-1} \operatorname{sign}(f(t) - g_0(t)) dt = 0.$$

В последние годы появился ряд работ, посвященных несимметричным приближениям. Так, теорема А при $1 < r < \infty$ для случая несимметричных (α, β) -приближений рассмотрена в работе [3], при $r = 1$ – в [6]. Несимметричные приближения в пространствах $M(T)$ рассмотрены в [7].

Этим же вопросам в пространствах $L_{\varphi_+\varphi_-}$ посвящена данная работа. Основной результат статьи содержится в приводимых ниже теоремах 1 и 2. Для формулировки этих теорем введем дополнительные обозначения. Через φ'_Π (соответственно $\varphi'_\wedge$) обозначим правую (соответственно левую) производные функции φ . Введем знаковую функцию:

$$\alpha_i = \begin{cases} +, & \text{если } i = 1, \\ -, & \text{если } i = 2. \end{cases}$$

Пусть заданы

$$f(t), \quad g(t), \quad g_0(t), \quad p(t) = (p_+(t); p_-(t)), \quad \varphi_+(t), \quad \varphi_-(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} D_+(\varphi_+, g, g_0, p; t) &= \varphi'_{+\Pi}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^+) \cdot \{\operatorname{sign}(f(t) - g_0(t))^+ \cdot p_+^+(t) \cdot g^+(t) \\ &\quad + \operatorname{sign}(f(t) - g_0(t))^- \cdot p_-^-(t) \cdot g^-(t)\} - \varphi'_{+\wedge}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^+) \\ &\quad \times \{\operatorname{sign}(f(t) - g_0(t))^+(t) \cdot p_+^+(t) \cdot g^-(t) + \operatorname{sign}(f(t) - g_0(t))^- \cdot p_-^-(t) \cdot g^+(t)\}; \\ D_-(\varphi_-, g, g_0, p; t) &= \varphi'_{-\Pi}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^-) \cdot \{\operatorname{sign}(f(t) - g_0(t))^+ \cdot p_+^-(t) \cdot g^+(t) \\ &\quad + \operatorname{sign}(f(t) - g_0(t))^- \cdot p_-^-(t) \cdot g^-(t)\} - \varphi'_{-\wedge}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^-) \\ &\quad \times \{\operatorname{sign}(f(t) - g_0(t))^+(t) \cdot p_+^-(t) \cdot g^-(t) + \operatorname{sign}(f(t) - g_0(t))^- \cdot p_-^-(t) \cdot g^+(t)\}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi_+, \varphi_- \in \phi$ и не являются константами или, наоборот, обе функции φ_+ и φ_- – константы, $p = (p_+, p_-)$ – такой вес, что

$$\sum_{i=1}^2 \mu\{t \in T : p_{\alpha_i}(t) = 0\} = 0. \quad (2)$$

Тогда для любого конечномерного подпространства H из $L_{\varphi_+\varphi_-}$ и любой функции f из $L_{\varphi_+\varphi_-}$ существует элемент наилучшего несимметричного приближения в $L_{\varphi_+\varphi_-}$ подпространством H .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi_+, \varphi_- \in \phi$, $p = (p_+, p_-)$ – такой вес, что

$$\sum_{i=1}^2 \sup \text{vrai} |p_{\alpha_i}(t)| = M_p < +\infty.$$

Тогда для того чтобы функция $g_0 \in H$ доставляла функции $f \in L_{\varphi_+\varphi_-}$ наилучшее несимметричное приближение, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции g из H выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{T \setminus E} D_{\alpha_i}(\varphi_{\alpha_i}, g, g_0, p; t) d\mu + \varphi'_{\alpha_i \cap}(0) \cdot \int_E (g(t); p(t))^{\alpha_i} d\mu \right\} \geq 0, \quad (3)$$

где $E = \{t \in T : f(t) - g_0(t) = 0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть функции φ_+ и φ_- дифференцируемы на $(0, +\infty)$. Тогда нетрудно показать, что в теореме 2 условие (3) можно заменить на следующее эквивалентное ему условие:

$$\left| \sum_{i=1}^2 \int_{T \setminus E} g(t) \varphi'_{\alpha_i}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^{\alpha_i}) \cdot \text{sign}(f(t) - g_0(t)) \times (\text{sign}(f(t) - g_0(t)); p(t))^{\alpha_i} d\mu \right| \leq \sum_{i=1}^2 \varphi'_{\alpha_i \cap}(0) \int_E (g(t); p(t))^{\alpha_i} d\mu.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\varphi_+(u) = u^r$, $\varphi_-(u) = u^q$, $1 \leq r, q < \infty$, то обозначим $\|f\|_{\varphi_+\varphi_-}$ через $\|f\|_{r,q}^* = \|f^+\|_r^r + \|f^-\|_q^q$, а множество соответствующих функций обозначим через $L_{r,q}^*$. Тогда из теоремы 2 и замечания 1 нетрудно получить следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть H – конечномерное подпространство в $L_{q_1, q_2}^*(a, b)$, $1 \leq q_1, q_2 < \infty$. Для того чтобы функция $g_0 \in H$ доставляла функции $f \in L_{q_1, q_2}^*(a, b)$ наилучшее приближение в подпространстве H , необходимо и достаточно, чтобы для любой функции g из H выполнялось условие

$$\left| \sum_{i=1}^2 q_i \int_{[a,b] \setminus E} g(t) |f(t) - g_0(t)|^{q_i-1} \cdot \text{sign}(f(t) - g_0(t)) \cdot \text{sign}(f(t) - g_0(t))^{\alpha_i} dt \right| \leq \sum_{i=1}^2 \lim_{t \rightarrow 0} |t|^{q_i-1} q_i \int_E |g(t)| \text{sign } g^{\alpha_i}(t) dt.$$

Отсюда получается уточнение теоремы А, позволяющее дать единую формулировку для случая $r = 1$ и $r > 1$.

ТЕОРЕМА А'. Пусть H – конечномерное подпространство в $L_r(a, b)$, $1 \leq r < \infty$. Для того чтобы функция $g_0 \in H$ доставляла функции $f \in L_r(a, b)$ наилучшее приближение в подпространстве H , необходимо и достаточно, чтобы для любой функции g из H выполнялось условие

$$\left| \int_{[a, b] \setminus E} g(t) |f(t) - g_0(t)|^{r-1} \cdot \text{sign}(f(t) - g_0(t)) dt \right| \leq \lim_{t \rightarrow 0} |t|^{r-1} \int_E |g(t)| dt, \quad (4)$$

где $E = \{t \in T : f(t) - g_0(t) = 0\}$.

Приведем пример, показывающий, что равенство в (4) достижимо.

ПРИМЕР 1. Пусть $r = 1$, $f(t) = \text{sign } t$, $T = [-1, 1]$, H – множество постоянных, т.е. $H = \{C\}$. Тогда элементы наилучшего приближения образуют множество таких постоянных C , что $|C| \leq 1$.

Если $g_0 = C \in (-1, 1)$, то (4) имеет вид $0 = 0$; если $g_0 = -1$ или $g_0 = 1$, то получим $|C| = |C|$ для любого C из H .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если в теореме 1 для веса $p = (p_+, p_-)$ не выполняется условие (2), то существуют пространства $L_{\varphi_+ \varphi_-}$ и такие их подпространства H , в которых нет элемента наилучшего несимметричного приближения. Это иллюстрирует

ПРИМЕР 2. Пусть $\varphi_+(u) = \varphi_-(u) = u$, $T = [0, 1]$, $H = \{C\}$, $p_+(t) = 1$, $p_-(t) = 0$, $f(t) = t^{-1/2}(t \neq 0)$.

Тогда $\rho(f, H) = 0$. Нетрудно видеть, что здесь нет элемента наилучшего несимметричного приближения.

Если в теореме 1 рассмотреть случай, когда, например,

$$\varphi_+ \in \phi, \quad \varphi_+(u) \neq \text{const}, \quad \varphi_-(u) \equiv \text{const},$$

то также существуют пространства $L_{\varphi_+ \varphi_-}$ и в них подпространства H , где нет элемента наилучшего несимметричного приближения. В качестве примера можно взять пример 2 с тем лишь изменением, что $\varphi_+(u) = u$, $\varphi_-(u) = 0$, а в качестве $p_-(t)$ – любую функцию из $L_0(T)$.

Для доказательства теорем понадобятся некоторые леммы. Введем дополнительные понятия и обозначения.

Пусть H – конечномерное подпространство в $L_0(T)$, $Q = \{q_i\}_{i=1}^n$ – его базис. Для $q \in H$ положим

$$\|q\|_Q = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|, \quad \text{где } q = \sum_{i=1}^n \lambda_i q_i.$$

Очевидно, что введенная величина является нормой на H . Назовем ее *нормой, порожденной базисом Q* . Множество $G \subset H$ будем называть *λ -ограниченным*, если $\sup_{g \in G} \|g\|_Q < \infty$. Ясно, что понятие λ -ограниченности инвариантно относительно выбора базиса. Всякое λ -ограниченное множество $G \subset H$, очевидно, компактно в смысле сходимости почти всюду (т.е. из любой последовательности $\{g_m\}_{m=1}^\infty$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к некоторой функции из H). Если $\|g\|_Q = 1$, то элемент g назовем, следуя [8], *нормированным (относительно выбранного базиса)*.

Пусть $\varphi_+, \varphi_- \in \phi$, H – конечномерное подпространство в $L_{\varphi_+ \varphi_-}$, $p = (p_+, p_-)$ – вес, $f \in L_{\varphi_+ \varphi_-}$. Последовательность элементов $\{g_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ назовем *минимизирующей* для f , если $\rho(f, g_k) < \infty$ при всех $k = 1, 2, \dots$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(f, g_k) = \rho(f, H)$.

ЛЕММА 1. Пусть $Q = \{g_i\}_{i=1}^n$ – базис в $H \subset L_{\varphi+\varphi_-}$, а функция $p \in L_0(T)$ такова, что $\mu\{t \in T : p(t) = 0\} = 0$. Тогда найдется такое натуральное число m , что на множестве $T_m = \{t \in T : |p(t)| \geq 1/m\}$ система $\{g_i\}_{i=1}^n$ будет базисом (т.е. $\sum_{i=1}^n \lambda_i q_i(t) = 0$ для почти всех $t \in T_m$ лишь при $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем методом от противного. Пусть это не так. Тогда на каждом из множеств последовательности $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_k \subset \dots \subset T$ система Q не будет базисом, причем для $T_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$ выполнено $\mu(T_0) = \mu(T)$. Поскольку на T_k система $\{g_i\}_{i=1}^n$ – не базис, то найдутся числа $\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)}$ такие, что $\Lambda_k = |\lambda_1^{(k)}| + \dots + |\lambda_n^{(k)}| \neq 0$ и $\lambda_1^{(k)} q_1(t) + \dots + \lambda_n^{(k)} q_n(t) = 0$ почти всюду на T_k . Так как $\Lambda_k \neq 0$, то

$$g_k(t) = \frac{\lambda_1^{(k)} q_1(t) + \dots + \lambda_n^{(k)} q_n(t)}{\Lambda_k}$$

также равна почти всюду на T_k нулю. В силу λ -ограниченности множества $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ (ведь $\|g_k\|_Q = 1$) из нее можно выделить подпоследовательность $\{g_{k_s}\}$, сходящуюся почти всюду к нормированному (а значит, нетривиальному) элементу $g \in H$. Тогда почти всюду $\lim_{s \rightarrow \infty} g_{k_s}(t) \chi_{T_{k_s}}(t) = g(t) \chi_{T_0}(t)$, где $\chi_{T_k}(t)$ – характеристическая функция множества T_k . С другой стороны, $g(t)$ почти всюду равна нулю на T , что невозможно. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $Q = \{q_i\}_{i=1}^n$ – базис в $H \subset L_{\varphi+\varphi_-}$. Тогда для любого измеримого множества $G \subset T$, на котором система Q является базисом, найдутся числа $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что для любого $g \in H$

$$\mu\{t \in G : |g(t)| \geq \|g\|_Q \cdot \delta_0\} \geq \varepsilon_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится методом от противного и с небольшими изменениями повторяет ход доказательства леммы 1 из [8].

ЛЕММА 3 [9, с. 292]. Если $\{f_n\}$ – последовательность неотрицательных μ -измеримых функций и $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $x \in E$, то

$$\int_E f(x) d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\mu.$$

ЛЕММА 4 [9, с. 293]. Если последовательность μ -измеримых функций $\{f_n\}$ сходится к f на множестве E и для некоторой интегрируемой на E функции $\varphi(x)$ для любого n выполнено $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$, то предельная функция интегрируема на E и

$$\int_E f_n(x) d\mu \rightarrow \int_E f(x) d\mu, \quad n \rightarrow \infty.$$

ЛЕММА 5 [10, с. 131]. Непрерывная на оси Ox выпуклая вниз функция $M(x)$ имеет в каждой точке правую $M'_{\Pi}(x)$ и левую $M'_{\Lambda}(x)$ производные, причем $M'_{\Lambda}(x) \leq M'_{\Pi}(x)$. Кроме того, если $a < x_1 < x_2 < b$, то

$$M'_{\Pi}(a) \leq \frac{M(x_2) - M(x_1)}{x_2 - x_1} \leq M'_{\Lambda}(b).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если $\rho(f, H) = \infty$ или обе функции φ_+ и φ_- – константы, то утверждение теоремы 1 очевидно. Пусть $\rho(f, H) < \infty$, $\varphi_+, \varphi_- \in \Phi$ и отличны от констант. Тогда $\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi_{\alpha_i}(u) = +\infty$, $i = 1, 2$.

Пусть $\{g_k\}$ – минимизирующая для f последовательность элементов из H . Начиная с некоторого k_0 , для всех k справедливо неравенство $\rho(f, g_k) \leq \rho(f, g_1) + 1$. Тогда найдется положительное число A такое, что для всех $k = k_0 + 1, \dots$ выполнена оценка $\|g_k\|_Q \leq A < \infty$. Докажем это методом от противного. Если это не так, то для любого положительного числа B найдется такое число $k \geq k_0 + 1$, что $\|g_k\|_Q > B$. В силу леммы 1 найдется натуральное число m_0 и множество $T_{m_0}^{(1)}$ такое, что

$$T_{m_0}^{(1)} = \left\{ t \in T : |p_+(t)| \geq \frac{1}{m_0} \right\}$$

и на $T_{m_0}^{(1)}$ система Q является базисом. Также в силу леммы 1 найдется натуральное число s_0 и множество $T_{s_0}^{(2)}$ такое, что

$$T_{s_0}^{(2)} = \left\{ t \in T_{m_0}^{(1)} : |p_-(t)| \geq \frac{1}{s_0} \right\}$$

и система Q будет на нем базисом. Тогда на множестве $T_0 = T_{s_0}^{(2)}$ будем иметь $|p_+(t)| \geq 1/m_0$, $|p_-(t)| \geq 1/s_0$. Из леммы 2 следует существование таких $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$, что для любого $g \in H$ мера множества $R_g = \{t \in T_0 : |g(t)| \geq \|g\|_Q \cdot \delta_0\}$ больше ε_0 . Пусть $R_g^N = R_g \cap \{t \in T : |f(t)| \leq N\}$. Функция f конечна почти всюду, поэтому найдется такое N_0 , что при $N > N_0$ и всех $g \in H$ (в частности, и для минимизирующей последовательности $\{g_k\}$) будет справедливо неравенство $\mu(R_g^N) > \delta_0/2$. Тогда

$$\rho(f, g_k) \geq \sum_{i=1}^2 \int_{R_{g_k}^N} \varphi_{\alpha_i}(((f(t) - g_k(t)); p(t))^{\alpha_i}) d\mu.$$

Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} G_k^+ &= \{t \in R_{g_k}^N : f(t) - g_k(t) > 0\}, & G_k^- &= \{t \in R_{g_k}^N : f(t) - g_k(t) \leq 0\}, \\ G_k^{++} &= \left\{ t \in G_k^+ : p_+(t) \geq \frac{1}{m_0} \right\}, & G_k^{+-} &= \left\{ t \in G_k^+ : p_+(t) \leq -\frac{1}{m_0} \right\}, \\ G_k^{-+} &= \left\{ t \in G_k^- : p_-(t) \geq \frac{1}{s_0} \right\}, & G_k^{--} &= \left\{ t \in G_k^- : p_-(t) \leq -\frac{1}{s_0} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho(f, g_k) &\geq C_1 \left(\int_{G_k^{++}} \varphi_+(f(t) - g_k(t)) d\mu + \int_{G_k^{--}} \varphi_+(g_k(t) - f(t)) d\mu \right. \\ &\quad \left. + \int_{G_k^{+-}} \varphi_-(f(t) - g_k(t)) d\mu + \int_{G_k^{-+}} \varphi_-(g_k(t) - f(t)) d\mu \right), \end{aligned}$$

где C_1 – положительная постоянная, зависящая лишь от функций φ_+ и φ_- и чисел m_0, s_0 .

Возьмем N настолько большим, что

$$\min\{\varphi_+(N), \varphi_-(N)\} \geq \frac{2(\rho(f, g_1) + 1)}{\varepsilon \cdot C_1}.$$

Тогда для тех элементов g_k из H , для которых $\|g_k\|_Q > B_0 = 2N/\delta_0$, выполняется неравенство $\rho(f, g_k) > \rho(f, g_1) + 1$, что противоречит ограничению $\rho(f, g_k) \leq \rho(f, g_1) + 1$. Полученное противоречие доказывает, что $\{g_k\}$ является λ -ограниченной последовательностью.

Так как последовательность $\{g_k\}$ λ -ограничена, то существует подпоследовательность $\{g_{k_s}\}$ и элемент $g \in H$ такие, что $\lim_{s \rightarrow \infty} g_{k_s}(t) = g(t)$ при почти всех $t \in T$. По лемме 3

$$\rho(f, g) \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 \int_T \varphi_{\alpha_i}(((f(t) - g_{k_s}(t)); p(t))^{\alpha_i}) d\mu = \rho(f, H),$$

а значит, $r(f, g) = \rho(f, H)$, т.е. g является элементом наилучшего несимметричного приближения. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Ниже будем рассматривать только те точки t , в которых конечны функции $f(t)$, $q_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, так как мера точек, не удовлетворяющих этому условию, равна нулю.

Докажем вначале *необходимость*. Пусть $Q = \{q_i\}_{i=1}^n$ – базис конечномерного подпространства H , g_0 – элемент наилучшего несимметричного приближения, g – произвольный элемент из H . Тогда в базисе Q их можно представить в виде

$$g_0(t) = \sum_{i=1}^n a_i^{(0)} \cdot q_i(t), \quad g(t) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot q_i(t).$$

Рассмотрим функцию

$$I(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n \int_T \varphi_{\alpha_i} \left(\left(\left(f(t) - \sum_{k=1}^n a_k \cdot q_k(t) \right); p(t) \right)^{\alpha_i} \right) d\mu.$$

Возьмем какую-либо последовательность $\{h_m\}_{m=1}^\infty$, для которой $0 < h_m \leq 1$, $h_m \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$, и найдем предел

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{h_m} (I(a_1^{(0)} + h_m \cdot (a_1 - a_1^{(0)}), \dots, a_n^{(0)} + h_m \cdot (a_n - a_n^{(0)})) - I(a_1^{(0)}, \dots, a_n^{(0)})) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\int_T F_{m+} d\mu + \int_T F_{m-} d\mu \right), \end{aligned}$$

где

$$F_{m\alpha_i}(t) = \frac{\varphi_{\alpha_i}(((f(t) - g_0(t) - h_m \cdot (g(t) - g_0(t))); p(t))^{\alpha_i})}{h_m}, \quad i = 1, 2.$$

Выясним, к чему сходятся подинтегральные функции. Для этого совершим предельный переход в трех случаях:

- 1) $f(t) - g_0(t) > 0$;
- 2) $f(t) - g_0(t) < 0$;
- 3) $f(t) - g_0(t) = 0$.

В случае 1), если m достаточно велико, имеем

$$\begin{aligned} F_{m\alpha_i} &= \frac{1}{h_m} \varphi_{\alpha_i}(((f(t) - g_0(t) - h_m \cdot (g(t) - g_0(t))) \cdot p_+(t))^{\alpha_i}) \\ &\quad - \varphi_{\alpha_i}(((f(t) - g_0(t)) \cdot p_+(t))^{\alpha_i}), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Рассмотрим три случая:

- а) $p_+(t) > 0$;
- б) $p_+(t) < 0$;
- в) $p_+(t) = 0$.

В случае а) для достаточно больших m $F_{m-}(t) = 0$, $F_{m+}(t) = \{\varphi_+((f(t) - g_0(t) - h_m \cdot (g(t) - g_0(t))) \cdot p_+(t)) - \varphi_+((f(t) - g_0(t)) \cdot p_+(t))\}/h_m$. Если $g(t) - g_0(t) > 0$, то при $m \rightarrow \infty$ выполнено

$$\begin{aligned} F_{m+}(t) &\rightarrow -\varphi'_{+\wedge}(p_+(t) \cdot (f(t) - g_0(t))) \cdot p_+(t) \cdot (g(t) - g_0(t)) \\ &= \varphi'_{+\cap}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^+) \cdot \{\text{sign}(f(t) - g_0(t))^+ \cdot p_+^+(t) \cdot (g(t) - g_0(t))^- \\ &\quad + \text{sign}(f(t) - g_0(t))^- \cdot p_-^-(t) \cdot (g(t) - g_0(t))^+\} - \varphi'_{+\wedge}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^+) \\ &\quad \times \{\text{sign}(f(t) - g_0(t))^+ \cdot p_+^+(t) \cdot (g(t) - g_0(t))^+ \\ &\quad + \text{sign}(f(t) - g_0(t))^- \cdot p_-^-(t) \cdot (g(t) - g_0(t))^- \} = B_+(t). \end{aligned}$$

Если $g(t) - g_0(t) < 0$, то при $m \rightarrow \infty$ имеем

$$F_{m+}(t) \rightarrow -\varphi'_{+\cap}((f(t) - g_0(t)) \cdot p_+(t)) \cdot p_+(t) \cdot (g(t) - g_0(t)) = B_+(t).$$

В случае б) для достаточно больших m имеем $F_{m+}(t) = 0$, $F_{m-}(t) = \{\varphi_-(-(f(t) - g_0(t) - h_m \cdot (g(t) - g_0(t)))) \cdot p_+(t)) - \varphi_-(-(f(t) - g_0(t)) \cdot p_+(t))\}/h_m$. Если $g(t) - g_0(t) > 0$, то при $m \rightarrow \infty$ выполнено

$$\begin{aligned} F_{m-}(t) &\rightarrow -\varphi'_{-\wedge}(-p_+(t) \cdot (f(t) - g_0(t))) \cdot p_+(t) \cdot (g(t) - g_0(t)) \\ &= \varphi'_{-\cap}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^-) \cdot \{\text{sign}(f(t) - g_0(t))^+ \cdot p_+^-(t) \cdot (g(t) - g_0(t))^- \\ &\quad + \text{sign}(f(t) - g_0(t))^- \cdot p_-^+(t) \cdot (g(t) - g_0(t))^+\} - \varphi'_{-\wedge}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^-) \\ &\quad \times \{\text{sign}(f(t) - g_0(t))^+ \cdot p_+^-(t) \cdot (g(t) - g_0(t))^+ \\ &\quad + \text{sign}(f(t) - g_0(t))^- \cdot p_-^+(t) \cdot (g(t) - g_0(t))^- \} = B_-(t). \end{aligned}$$

Если $g(t) - g_0(t) < 0$, то при $m \rightarrow \infty$ имеем

$$F_{m-}(t) \rightarrow \varphi'_{-\cap}(-(f(t) - g_0(t)) \cdot p_+(t)) \cdot p_+(t) \cdot (g(t) - g_0(t)) = B_-(t).$$

Если $g(t) - g_0(t) = 0$ или $p_+(t) = 0$, то

$$F_{m+}(t) = F_{m-}(t) = 0 = B_+(t) = B_-(t).$$

Случай 2) аналогичен разобранным. Рассмотрим теперь случай 3). Если $g(t) - g_0(t) > 0$, то при достаточно больших m при $i = 1, 2$ имеем

$$F_{m\alpha_i}(t) = \frac{\varphi_{\alpha_i}((-h_m \cdot (g(t) - g_0(t)) \cdot (p_-(t))^{\alpha_i}) - \varphi_{\alpha_i}(0))}{h_m}.$$

При $p_-(t) > 0$ выполнено $F_{m+} = 0$ и при $m \rightarrow \infty$ выполнено

$$\begin{aligned} F_{m-}(t) &\rightarrow \varphi'_{-\cap}(0) \cdot p_-(t) \cdot (g(t) - g_0(t)) \\ &= \varphi'_{-\cap}(0) \cdot \{p_+^-(t) \cdot (g_0(t) - g(t))^+ + p_-^+(t) \cdot (g_0(t) - g(t))^- \} = A_-(t). \end{aligned}$$

Аналогично рассматривается случай, когда $g(t) - g_0(t) \leq 0$.

Сделаем общий вывод. Подынтегральные функции при $m \rightarrow \infty$ стремятся соответственно к функциям $F_{\alpha_i}(t)$, определенным следующим образом: при $t \in T \setminus E$ функция $F_{\alpha_i}(t)$ равна $B_{\alpha_i}(t)$, а при $t \in E$ равна $A_{\alpha_i}(t)$, $i = 1, 2$.

Покажем теперь, что для любого m подынтегральные функции по модулю не превосходят $2B_1(t)$, где

$$B_1(t) = \sum_{i=1}^2 \varphi'_{\alpha_i \cap} (M_p(|f(t) - g_0(t)| + |g(t) - g_0(t)|)) \cdot M_p \cdot |g(t) - g_0(t)|.$$

Пусть $g(t) - g_0(t) > 0$. Если $f(t) - g_0(t) > 0$, то разность $R(t) = f(t) - g_0(t) - h_m \cdot (g(t) - g_0(t))$ может быть положительна, отрицательна или равна нулю.

Пусть в точке t выполнена оценка $R(t) > 0$. Тогда $(R(t); p(t)) = p_+(t) \cdot R(t)$. Если $p_+(t) > 0$, то $F_{m-}(t) = 0 \leq B_1(t)$,

$$|F_{m+}(t)| = \frac{|\varphi_+(p_+(t) \cdot R(t)) - \varphi_+(p_+(t)(f(t) - g_0(t)))|}{h_m}.$$

Применяя лемму 5, имеем

$$|F_{m+}(t)| \leq \varphi'_{+\wedge} (p_+(t)(f(t) - g_0(t))) \cdot p_+(t) \cdot (g(t) - g_0(t)) \leq B_1(t).$$

Если $p_+(t) < 0$, то

$$\begin{aligned} |F_{m+}(t)| &= 0 \leq B_1(t), \\ |F_{m-}(t)| &= \frac{1}{h_m} |\varphi_-(-p_+(t)(f(t) - g_0(t) - h_m \cdot (g(t) - g_0(t)))) \\ &\quad - \varphi_-(-p_+(t)(f(t) - g_0(t)))| \\ &\leq \varphi'_{-\wedge} (-p_+(t)(f(t) - g_0(t))) \cdot |p_+(t)(g(t) - g_0(t))| \leq B_1(t). \end{aligned}$$

Если $R(t)$ отрицательна или равна нулю, то проверка проводится таким же образом.

Аналогичными рассуждениями получаем верхние оценки для $|F_{m\alpha_i}|$, $i = 1, 2$, через $B_1(t)$ в случае, когда $g(t) - g_0(t) < 0$. Если же $g(t) - g_0(t) = 0$, то оценка тривиальна, так как $F_{m\alpha_i}(t) = 0 \leq B_1(t)$, $i = 1, 2$. Тем самым доказано, что для любого m

$$|F_{m\alpha_i}(t)| \leq 2B_1(t), \quad i = 1, 2.$$

Покажем теперь, что функция $B_1(t)$ суммируема. Используя свойства функции φ для $h > 0$ имеем $\varphi(u) + \varphi'_{\cap}(u) \cdot h \leq \varphi(u + h)$.

Тогда существует интеграл (при $i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} &\int_T \varphi'_{\alpha_i \cap} (M_p(|f(t) - g_0(t)| + |g(t) - g_0(t)|)) \cdot M_p \cdot (|f(t) - g_0(t)| + |g(t) - g_0(t)|) d\mu \\ &\leq \int_T \varphi_{\alpha_i} (2M_p(|f(t) - g_0(t)| + |g(t) - g_0(t)|)) d\mu. \end{aligned}$$

Итак, функция $B_1(t)$ суммируема. Значит, последовательность $\{F_{m\alpha_i}\}$, $i = 1, 2$, удовлетворяет всем условиям леммы 4, применение которой позволяет совершить предельный переход под знаком интеграла. А так как $g_0(t)$ является элементом наилучшего несимметричного приближения, то разность

$$I(a_1^{(0)} + h_m \cdot (a_1 - a_1^{(0)}), \dots, a_n^{(0)} + h_m \cdot (a_n - a_n^{(0)})) - I(a_1^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}) \geq 0,$$

и поэтому

$$\sum_{i=1}^2 \int_T F_{\alpha_i}(t) d\mu \geq 0. \quad (5)$$

После замены функции $g(t) - g_0(t)$, входящей в выражение для $F_{\alpha_i}(t)$, $i = 1, 2$, на $-g(t)$ и при использовании введенных выше обозначений неравенство (5) перейдет в (3). Необходимость доказана.

Докажем теперь достаточность теоремы 2. Пусть для любого элемента g из H выполняется (3), а значит, и (5). Пусть $t \in T \setminus E$. Выражение для $F_{\alpha_i}(t)$, $i = 1, 2$, перепишем в следующем виде:

$$F(t) = F_+(t) + F_-(t) = B_+ + B_-(t) = -(g(t) - g_0(t)) \cdot B_2(t),$$

где

$$\begin{aligned} B_2(t) = & \varphi'_{+\cap}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^+) \cdot (\text{sign}((f(t) - g_0(t))^+) \cdot p_+(t) \cdot \text{sign}(p_+^+(t)) \\ & \times \text{sign}((g(t) - g_0(t))^-) + \text{sign}((f(t) - g_0(t))^-) \cdot p_-(t) \\ & \times \text{sign}(p_-^-(t)) \cdot \text{sign}((g(t) - g_0(t))^+)) + \varphi'_{+\wedge}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^+) \\ & \times (\text{sign}((f(t) - g_0(t))^+) \cdot p_+(t) \cdot \text{sign}(p_+^+(t)) \\ & \times \text{sign}((g(t) - g_0(t))^+) + \text{sign}((f(t) - g_0(t))^-) \cdot p_-(t) \\ & \times \text{sign}(p_-^-(t)) \cdot \text{sign}((g(t) - g_0(t))^-)) - \varphi'_{-\cap}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^-) \\ & \times (\text{sign}((f(t) - g_0(t))^+) \cdot p_+(t) \cdot \text{sign}(p_+^-(t)) \\ & \times \text{sign}((g(t) - g_0(t))^-) + \text{sign}((f(t) - g_0(t))^-) \cdot p_-(t) \\ & \times \text{sign}(p_-^+(t)) \cdot \text{sign}((g(t) - g_0(t))^+)) - \varphi'_{-\wedge}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^-) \\ & \times (\text{sign}((f(t) - g_0(t))^+) \cdot p_+(t) \cdot \text{sign}(p_+^-(t)) \\ & \times \text{sign}((g(t) - g_0(t))^+) + \text{sign}((f(t) - g_0(t))^-) \cdot p_-(t) \\ & \times \text{sign}(p_-^+(t)) \cdot \text{sign}((g(t) - g_0(t))^-)). \end{aligned}$$

Учитывая (5), имеем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{T \setminus E} (f(t) - g_0(t)) \cdot B_2(t) d\mu \\ &= \int_T (-F(t)) d\mu + \int_E F(t) d\mu + \int_{T \setminus E} (f(t) - g(t)) \cdot B_2(t) d\mu \\ &\leq \int_E F(t) d\mu + \int_{T \setminus E} ((f(t) - g(t)) - (f(t) - g_0(t))) \cdot B_2(t) d\mu + I_1 = I_2 + I_1. \end{aligned}$$

Таким образом, $I_2 \geq 0$. Проводя преобразования во втором интеграле в выражении для I_2 , получим

$$\begin{aligned} 0 \leq I_2 \leq & \int_E F(t) d\mu + \int_{T \setminus E} (((f(t) - g(t)); p(t))^+ - ((f(t) - g_0(t)); p(t))^+) \cdot \\ & \times \text{sign}((g(t) - g_0(t))^-) \cdot (\varphi'_{+\cap}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^+) \cdot \text{sign}((f(t) - g_0(t))^+) \\ & \times \text{sign}(p_+^+(t)) + \varphi'_{+\wedge}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^+) \cdot \text{sign}((f(t) - g_0(t))^-) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \operatorname{sign}(p^-(t)) + (((f(t) - g(t)); p(t))^+ - ((f(t) - g_0(t)); p(t))^+ \\
& \times \operatorname{sign}((g(t) - g_0(t))^+ \cdot (\varphi'_{+\square}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^+)) \\
& \times \operatorname{sign}((f(t) - g_0(t))^-) \cdot \operatorname{sign}(p^-(t)) + \varphi'_{+\wedge}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^+ \\
& \times \operatorname{sign}((f(t) - g_0(t))^+ \cdot \operatorname{sign}(p^+_+(t))) \\
& + (((f(t) - g(t)); p(t))^- - ((f(t) - g_0(t)); p(t))^-) \cdot \operatorname{sign}((g(t) - g_0(t))^-) \\
& \times (\varphi'_{-\square}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^-) \cdot \operatorname{sign}((f(t) - g_0(t))^+ \cdot \operatorname{sign}(p^+_+(t)) \\
& + \varphi'_{-\wedge}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^-) \cdot \operatorname{sign}((f(t) - g_0(t))^-) \cdot \operatorname{sign}(p^+_+(t)) \\
& + (((f(t) - g(t)); p(t))^- - ((f(t) - g_0(t)); p(t))^-) \cdot \operatorname{sign}((g(t) - g_0(t))^+ \\
& \times (\varphi'_{-\square}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^-) \cdot \operatorname{sign}((f(t) - g_0(t))^-) \cdot \operatorname{sign}(p^+_-(t)) \\
& + \varphi'_{-\wedge}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^-) \cdot \operatorname{sign}((f(t) - g_0(t))^+ \cdot \operatorname{sign}(p^+_-(t)))) d\mu = I_3.
\end{aligned}$$

Используя лемму 5, получим для φ из ϕ

$$\varphi(|a+x|) \geq \varphi(|a|) + x \cdot \operatorname{sign} a \cdot (\varphi'_{\square}(|a|) \cdot (d^- \cdot b^+ + d^+ \cdot b^-) + \varphi'_{\wedge}(|a|) \cdot (d^- \cdot b^- + d^+ \cdot b^+)) \quad (6)$$

при любых d, b таких, что $d \cdot b \neq 0$. Если $a \cdot x = 0$, то неравенство (6) будет справедливо и для тех d и b , для которых $d \cdot b = 0$. Применяя (6), будем иметь для любого g из H

$$\begin{aligned}
\rho(f, g) & \geq I_3 + \sum_{i=1}^2 \left(\int_E \varphi_{\alpha_i}(0) d\mu + \int_{T \setminus E} \varphi_{\alpha_i}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^{\alpha_i}) d\mu \right) \\
& \geq \sum_{i=1}^2 \left(\int_T \varphi_{\alpha_i}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^{\alpha_i}) d\mu \right).
\end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
- [2] Козко А. И. Аналоги неравенств Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 6. С. 687–699.
- [3] Бабенко В. Ф. Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // Укр. матем. ж. 1982. Т. 34. № 4. С. 409–419.
- [4] Рахметов Н. К. О некоторых вопросах теории приближения функций. Дисс. ... к. ф.-м. н. М.: МГУ, 1990.
- [5] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1978.
- [6] Панасович В. А., Смирнов Г. С. Некоторые вопросы теории аппроксимации функций. Киев, 1985.
- [7] Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Знакочувствительные аппроксимации. Пространство знакочувствительных весов. Жесткость и свобода системы // Докл. РАН. 1993. Т. 332. № 6. С. 686–689.
- [8] Гаркави А. Л. Теорема существования элемента наилучшего приближения в пространствах типа (F) с интегральной метрикой // Матем. заметки. 1970. Т. 8. № 5. С. 583–594.
- [9] Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
- [10] Красносельский М. А., Рутцкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.