Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Смагин, Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений с модифицированной схемой Кранка–Николсон, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 6, 913–923

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm319>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:37:22

УДК 517.988.8

ОЦЕНКИ В СИЛЬНЫХ НОРМАХ ПОГРЕШНОСТИ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МОДИФИЦИРОВАННОЙ СХЕМОЙ КРАНКА–НИКОЛСОН

В. В. Смагин

В сепарабельном гильбертовом пространстве параболическая задача решается приближенно проекционно-разностным методом. Дискретизация задачи по пространству проводится методом Галёркина, а по времени используется модифицированная схема Кранка–Николсон. В работе установлены эффективные по времени и по пространству оценки в сильных нормах погрешности приближенных решений. Эти оценки позволяют получать скорость сходимости по времени погрешности к нулю вплоть до второго порядка. Кроме того, оценки погрешности учитывают аппроксимационные свойства проекционных подпространств, что иллюстрируется на подпространствах типа конечных элементов.

Библиография: 12 названий.

1. Описание задачи и вспомогательные результаты. В данной работе продолжены исследования [1] сходимости в сильных нормах проекционно-разностного метода для параболических уравнений. В [1] дискретизация задачи по времени проводилась по неявной схеме Эйлера. В силу этого в [1] погрешности стремятся к нулю по времени лишь с первым порядком. В настоящей работе для дискретизации по времени предложена разностная схема, являющаяся модификацией известной схемы Кранка–Николсон. Это позволило, естественно при некоторых дополнительных минимальных условиях гладкости на решение исходной задачи, получить эффективные оценки скорости сходимости погрешности к нулю с более высоким порядком по времени, вплоть до второго.

Обратим внимание, что в сходной ситуации сходимость проекционно-разностного метода с классической схемой Кранка–Николсон в более слабых нормах, чем в настоящей работе, изучалась в [2]–[4]. В [2] была установлена среднеквадратичная оценка погрешности приближенных решений. В [3] оценка погрешности получена в энергетической норме. В работе [4] также установлена энергетическая оценка погрешности, но в отличие от [2] и [3] рассматриваются параболические уравнения с несимметричными операторами. В одном частном случае сходимость проекционно-разностного метода в нормах, соответствующих настоящей работе, была рассмотрена в [5] (подробности ниже).

Пусть V и H – сепарабельные гильбертовы пространства такие, что $V \subset H$ и вложение плотно и непрерывно. Через V' обозначим пространство, двойственное V . Отождествляя H со своим двойственным, получим $V \subset H \subset V'$. Под выражением вида (z, v)

далее понимаем значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. В случае $z \in H$ выражение (z, v) совпадает со скалярным произведением элементов $z, v \in H$. Норму элемента z в пространстве H обозначаем $\|z\|$.

Пусть для $t \in [0, T]$, где $T < \infty$, на $u, v \in V$ определено семейство полуторалинейных симметричных форм $a(t, u, v)$. Для всех $t \in [0, T]$ и $u, v \in V$ выполнено

$$|a(t, u, v)| \leq M_1 \|u\|_V \|v\|_V, \quad a(t, u, v) \geq \delta \|u\|_V^2, \quad \delta > 0. \quad (1)$$

Считаем, что функция $t \rightarrow a(t, u, v)$ абсолютно непрерывна на $[0, T]$ и для формы

$$a_1(t, u, v) = \frac{\partial a(t, u, v)}{\partial t}$$

справедлива оценка

$$|a_1(t, u, v)| \leq M_2 \|u\|_V \|v\|_V. \quad (2)$$

Здесь и далее производные понимаются в обобщенном смысле.

Форма $a(t, u, v)$ порождает линейный ограниченный из V в V' оператор $A(t)$, определяемый соотношением $a(t, u, v) = (A(t)u, v)$. Из (1) следует оценка

$$\|A(t)u\|_{V'} \leq M_1 \|u\|_V.$$

Для всех $u \in V$ функция $t \rightarrow A(t)u \in V'$ для всех $u \in V$ дифференцируема и $a_1(t, u, v) = (A'(t)u, v)$. Функция $t \rightarrow A'(t)u \in V'$ измерима и из (2) почти при всех $t \in [0, T]$ следует оценка $\|A'(t)u\|_{V'} \leq M_2 \|u\|_V$.

Для $t \in [0, T]$ определим множество $D[A(t)] = \{u \in V \mid A(t)u \in H\}$. Заметим, что оператор $A(t)$, рассматриваемый в H с областью определения $D[A(t)] \subset H$, является самосопряженным и положительно определенным. При этом для операторов $A^{1/2}(t)$ области определения $D[A^{1/2}(t)] = V$.

Предположим существование гильбертова пространства E такого, что для $t \in [0, T]$ выполняется $D[A(t)] \subset E \subset V$, пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E, H]_{1/2}$ (см. [6, с. 23]) и для $t \in [0, T]$ и $u \in D[A(t)]$ выполняется оценка $\|u\|_E \leq d \|A(t)u\|$.

Предположим, что на V для $t \in [0, T]$ определены линейные операторы $B(t): V \rightarrow H$ такие, что $\|B(t)u\| \leq M_3 \|u\|_V$. Для $u \in V$ функция $t \rightarrow B(t)u \in H$ дифференцируема и справедлива оценка $\|B'(t)u\| \leq M_4 \|u\|_V$.

Предположим, что задана непрерывная на $[0, T]$ функция $t \rightarrow f(t) \in H$ такая, что существует производная $f' \in L_2(0, T; V')$. Пусть также задан элемент $u^0 \in D[A(0)]$.

В сделанных предположениях рассмотрим в пространстве V' задачу

$$u'(t) + [A(t) + B(t)]u(t) = f(t), \quad u(0) = u^0. \quad (3)$$

В [7] установлено, что задача (3) имеет единственное решение $u(t)$, в дальнейшем называемое *гладким*, такое, что

1) выполнены условия

$$u' \in C([0, T], H) \cap L_2(0, T; V), \quad A(\cdot)u(\cdot) \in C([0, T], H), \quad u'' \in L_2(0, T; V');$$

2) удовлетворяются уравнение и начальное условие (3);

3) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq T} \|u'(t)\|^2 + \max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|^2 + \int_0^T (\|u'(t)\|_{V'}^2 + \|u''(t)\|_{V'}^2) dt \\ & \leq M \left\{ \|A(0)u^0\|^2 + \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|^2 + \int_0^T \|f'(t)\|_{V'}^2 dt \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где константа M не зависит от u^0 и $f(t)$.

Из уравнения (3) следует, что и $B(\cdot)u(\cdot) \in C([0, T], H)$.

Заметим здесь, что обоснование приведенного утверждения из [7] о гладкой разрешимости задачи (3) проводится методом, который позволяет получать по времени, путем последовательного дифференцирования уравнения, сколь угодно большую гладкость решения, причем, с соответствующей оценкой, подобной (4) (см. также [8]).

Примеры классических начально-краевых задач для параболических уравнений, сводящихся к задаче (3), и реализацию пространств V , H , V' , E можно найти в [6] (см. также [2]–[4]). Отметим только, что к задаче (3) сводятся параболические задачи как с краевыми условиями Дирихле, так и Неймана, а также и смешанными краевыми условиями. Кроме того, можно рассматривать задачи произвольного $2m$, $m \geq 1$, порядка по пространственным переменным.

Построение приближенной задачи проведем по схеме, впервые предложенной в [9]. Через V_h , где параметр $h > 0$, обозначим конечномерное подпространство пространства V . Определим на элементах $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V'_h} = \sup |(u_h, v_h)|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h$ с $\|v_h\|_V = 1$. Очевидно, что $\|u_h\|_{V'_h} \leq \|u_h\|_{V'}$. Пусть P_h – ортопроектор в пространстве H на V_h . В [10] показано, что оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\bar{P}_h: V' \rightarrow V'_h$ и $\|\bar{P}_h u\|_{V'_h} \leq \|u\|_{V'}$ для $u \in V'$. Отметим для $u \in V'$ и $v \in H$ важное в приложениях соотношение из [9] $(\bar{P}_h u, v) = (u, P_h v)$.

Задаче (3) сопоставим следующую разностную задачу в V_h :

$$\begin{aligned} & (u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + \bar{P}_h[A(t_k)u_k^h + A(t_{k-1})u_{k-1}^h]2^{-1} \\ & + P_h[B(t_k)u_k^h + B(t_{k-1})u_{k-1}^h]2^{-1} = f_h^k, \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (5)$$

где N – натуральное число, $\tau N = T$, $t_k = k\tau$, $f_h^k = P_h[f(t_k) + f(t_{k-1})]2^{-1}$ и элемент $u_0^h \in V_h$ считаем заданным.

Обратим внимание, что для случая операторов $A(t)$ и $B(t)$, не зависящих от t , разностная схема (5) совпадает с классической схемой Кранка–Николсон [11, с. 291].

Укажем здесь также, что в [5] рассматривается задача, сводящаяся к (3) с $A(t) \equiv A$, не зависящим от t , симметричным эллиптическим оператором второго порядка, порожденным условием Дирихле, а оператор $B(t) \equiv 0$. Разностное уравнение (5) естественным образом упрощается в левой части, а в правой части $f_h^k = \tau^{-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{P}_h f(t) dt$. Кроме того, соответствующая оценка погрешности в [5] получена только с первым порядком по времени.

Установим однозначную разрешимость задачи (5), т.е. обратимость в V_h операторов $I + \tau 2^{-1}[\bar{P}_h A(t_k) + P_h B(t_k)]$. Пусть $v_h \in V_h$ такой, что

$$v_h + \tau 2^{-1}[\bar{P}_h A(t_k)v_h + P_h B(t_k)v_h] = 0.$$

Отсюда следует равенство

$$\|v_h\|^2 + \tau 2^{-1} [a(t_k, v_h, v_h) + (B(t_k)v_h, v_h)] = 0.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ получим неравенство

$$\|v_h\|^2 + \tau 2^{-1} \|v_h\|_V^2 \leq \tau 4^{-1} M_3(\varepsilon \|v_h\|_V^2 + \varepsilon^{-1} \|v_h\|^2).$$

Положим здесь $\varepsilon = 2\delta M_3^{-1}$. При $0 < \tau < 8\delta M_3^{-2}$ получим $v_h = 0$ и, следовательно, однозначную разрешимость задачи (5).

Далее получим априорную оценку решения задачи (5), которая достаточно очевидна в случае операторов $A(t)$ и $B(t)$, не зависящих от t . Подобные оценки обычно связаны с понятием устойчивости разностной схемы.

ЛЕММА. Для решения u_k^h задачи (5) справедлива оценка

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|u_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^N \|(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|^2 \tau \leq M \left\{ \|u_0^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^N \|f_k^h\|^2 \tau \right\}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим (5) скалярно в H на $(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}$:

$$\begin{aligned} & \|(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|^2 + 2^{-1} (A(t_k)u_k^h + A(t_{k-1})u_{k-1}^h, (u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}) \\ & = (f_k^h, (u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}) - 2^{-1} (B(t_k)u_k^h + B(t_{k-1})u_{k-1}^h, (u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}). \end{aligned} \quad (7)$$

В (7) прежде всего рассмотрим

$$\begin{aligned} & 2^{-1} (A(t_k)u_k^h + A(t_{k-1})u_{k-1}^h, (u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}) \\ & = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(A(t) \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}, \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right) dt \\ & \quad + \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{A(t_k)u_k^h + A(t_{k-1})u_{k-1}^h}{2} - A(t) \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}, \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что в (8)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(A(t) \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}, \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right) dt \\ & = \frac{1}{2\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [a(t, u_k^h, u_k^h) - a(t, u_{k-1}^h, u_{k-1}^h) + 2i \operatorname{Im} a(t, u_{k-1}^h, u_k^h)] dt \\ & = \frac{1}{2\tau} a(t_k, u_k^h, u_k^h) - \frac{1}{2\tau} a(t_{k-1}, u_{k-1}^h, u_{k-1}^h) + \frac{i}{\tau^2} \operatorname{Im} \int_{t_{k-1}}^{t_k} a(t, u_{k-1}^h, u_k^h) dt \\ & \quad + \frac{1}{2\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [a(t, u_k^h, u_k^h) - a(t_k, u_k^h, u_k^h)] dt \\ & \quad + \frac{1}{2\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [a(t_{k-1}, u_{k-1}^h, u_{k-1}^h) - a(t, u_{k-1}^h, u_{k-1}^h)] dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь в (9) i – минимальная единица. Преобразуем в (8) выражение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{A(t_k)u_k^h + A(t_{k-1})u_{k-1}^h}{2} - A(t) \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}, \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} ([A(t_k) - A(t)]u_k^h, u_k^h - u_{k-1}^h) dt \\ &+ \frac{1}{2\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} ([A(t_{k-1}) - A(t)]u_{k-1}^h, u_k^h - u_{k-1}^h) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Возьмем от (7) удвоенную вещественную часть. Учитывая (8), (9) и (10), получим равенство

$$\begin{aligned} & 2\|(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|^2 + \tau^{-1}a(t_k, u_k^h, u_k^h) - \tau^{-1}a(t_{k-1}, u_{k-1}^h, u_{k-1}^h) \\ &= \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [a(t_k, u_k^h, u_k^h) - a(t, u_k^h, u_k^h)] dt \\ &+ \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [a(t, u_{k-1}^h, u_{k-1}^h) - a(t_{k-1}, u_{k-1}^h, u_{k-1}^h)] dt \\ &+ \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \operatorname{Re}([A(t) - A(t_k)]u_k^h, u_k^h - u_{k-1}^h) dt \\ &+ \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \operatorname{Re}([A(t) - A(t_{k-1})]u_{k-1}^h, u_k^h - u_{k-1}^h) dt + 2 \operatorname{Re}(f_h^k, (u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}) \\ &- \operatorname{Re}(B(t_k)u_k^h + B(t_{k-1})u_{k-1}^h, (u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}) = \sum_{i=1}^6 I_i. \end{aligned} \quad (11)$$

Оценим слагаемые I_i в правой части равенства (11). Для I_1 и I_2 , учитывая (1) и (2), получим оценки

$$\begin{aligned} I_1 &\leq M_2 \|u_k^h\|_V^2 \leq M_2 \delta^{-1} a(t_k, u_k^h, u_k^h), \\ I_2 &\leq M_2 \|u_{k-1}^h\|_V^2 \leq M_2 \delta^{-1} a(t_{k-1}, u_{k-1}^h, u_{k-1}^h). \end{aligned}$$

Перейдем к оценкам I_3 и I_4 :

$$I_3 \leq 2^{-1} M_2 (3\|u_k^h\|_V^2 + \|u_{k-1}^h\|_V^2), \quad I_4 \leq 2^{-1} M_2 (\|u_k^h\|_V^2 + 3\|u_{k-1}^h\|_V^2).$$

Таким образом, в (11)

$$I_3 + I_4 \leq 2M_2 \delta^{-1} [a(t_k, u_k^h, u_k^h) + a(t_{k-1}, u_{k-1}^h, u_{k-1}^h)].$$

Оцениваем пятое слагаемое в (11):

$$I_5 \leq \varepsilon_1^{-1} \|f_h^k\|^2 + \varepsilon_1 \|(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|^2.$$

Для шестого слагаемого в (11) оценка следующая:

$$I_6 \leq (2\varepsilon_2)^{-1} \|B(t_k)u_k^h + B(t_{k-1})u_{k-1}^h\|^2 + 2^{-1} \varepsilon_2 \|(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|^2.$$

Заметим, что в последней оценке

$$\begin{aligned} \|B(t_k)u_k^h + B(t_{k-1})u_{k-1}^h\|^2 &\leq 2M_3(\|u_k^h\|_V^2 + \|u_{k-1}^h\|_V^2) \\ &\leq 2M_3\delta^{-1}[a(t_k, u_k^h, u_k^h) + a(t_{k-1}, u_{k-1}^h, u_{k-1}^h)]. \end{aligned}$$

В оценках слагаемых I_5 и I_6 положим $\varepsilon_1 = 2^{-1}\varepsilon_2 = 2^{-1}$. Собирая затем оценки слагаемых I_i в правой части (11), получим неравенство

$$\begin{aligned} \tau^{-1}a(t_k, u_k^h, u_k^h) - \tau^{-1}a(t_{k-1}, u_{k-1}^h, u_{k-1}^h) + \|(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|^2 \\ \leq c_1\|f_k^h\|^2 + c_2a(t_k, u_k^h, u_k^h) + c_3a(t_{k-1}, u_{k-1}^h, u_{k-1}^h). \end{aligned} \quad (12)$$

Умножим (12) на τ и суммируем полученные неравенства по k от 1 до $m \leq N$:

$$\begin{aligned} a(t_m, u_m^h, u_m^h) - a(0, u_0^h, u_0^h) + \sum_{k=1}^m \|(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|^2\tau \\ \leq c_1 \sum_{k=1}^m \|f_k^h\|^2\tau + c_2 \sum_{k=1}^m a(t_k, u_k^h, u_k^h)\tau + c_3Ta(0, u_0^h, u_0^h). \end{aligned} \quad (13)$$

В (13) выделим суммарное неравенство для $a(t_k, u_k^h, u_k^h)$. В результате для всех $1 \leq m \leq N$ получим оценку

$$a(t_m, u_m^h, u_m^h) + \sum_{k=1}^m \|(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|^2\tau \leq c \left[a(0, u_0^h, u_0^h) + \sum_{k=1}^N \|f_k^h\|^2\tau \right].$$

Воспользовавшись теперь (1), получим окончательную оценку (6). Лемма доказана.

2. Оценки погрешности. Определим для $t \in [0, T]$ гильбертовы пространства

$$V(t) = \{u, v \in V \mid (u, v)_{V(t)} = a(t, u, v)\}.$$

Через $Q_h(t)$ обозначим ортопроектор в пространстве $V(t)$ на V_h . Заметим, что для всех $u \in V$ выполняется тождество

$$\overline{P}_h A(t)u = \overline{P}_h A(t)Q_h(t)u. \quad (14)$$

В [12] доказано, что для $u \in V$ функция $t \rightarrow Q_h(t)u \in V_h$ абсолютно непрерывна и для $u \in V$, $v_h \in V_h$ почти при всех $t \in [0, T]$

$$a(t, Q_h'(t)u, v_h) = a_1(t, [I - Q_h(t)]u, v_h). \quad (15)$$

ТЕОРЕМА. Пусть $u(t)$ – гладкое решение задачи (3), а u_k^h – решение задачи (5). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} S &\equiv \max_{1 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_\tau^2 \\ &\leq M \left\{ \|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + \max_{0 \leq t \leq T} \|[I - Q_h(t)]u(t)\|_V^2 + \int_0^T \|[I - Q_h(t)]u'(t)\|^2 dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} P_h \left[\frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} - u'(t) \right] dt \right\|_\tau^2 \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

где Q_h – ортопроектор в пространстве V на V_h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $w_h(t) = Q_h(t)u(t)$ и $z_k^h = w_h(t_k) - u_k^h$, где $k = \overline{1, N}$. Для z_k^h , учитывая (5), получим равенство

$$\begin{aligned} (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1} + \overline{P}_h[A(t_k)z_k^h + A(t_{k-1})z_{k-1}^h]2^{-1} + P_h[B(t_k)z_k^h + B(t_{k-1})z_{k-1}^h]2^{-1} \\ = [w_h(t_k) - w_h(t_{k-1})]\tau^{-1} + \overline{P}_h[A(t_k)w_h(t_k) + A(t_{k-1})w_h(t_{k-1})]2^{-1} \\ + P_h[B(t_k)w_h(t_k) + B(t_{k-1})w_h(t_{k-1})]2^{-1} - f_k^h. \end{aligned}$$

Из уравнения (3) следует, что

$$\begin{aligned} f_h^k &= P_h[u'(t_k) + u'(t_{k-1})]2^{-1} + P_h[A(t_k)u(t_k) + A(t_{k-1})u(t_{k-1})]2^{-1} \\ &\quad + P_h[B(t_k)u(t_k) + B(t_{k-1})u(t_{k-1})]2^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, воспользовавшись (14), получим для $k = \overline{1, N}$ равенства

$$\begin{aligned} (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1} + \overline{P}_h[A(t_k)z_k^h + A(t_{k-1})z_{k-1}^h]2^{-1} + P_h[B(t_k)z_k^h + B(t_{k-1})z_{k-1}^h]2^{-1} \\ = \{[w_h(t_k) - w_h(t_{k-1})]\tau^{-1} - P_h[u'(t_k) + u'(t_{k-1})]2^{-1}\} \\ + P_h\{B(t_k)[w_h(t_k) - u(t_k)] + B(t_{k-1})[w_h(t_{k-1}) - u(t_{k-1})]\}2^{-1} = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Преобразуем слагаемое I_1 в правой части (17):

$$I_1 = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} P_h[w_h'(t) - u'(t)] dt + \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} P_h \left[u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \right] dt. \quad (18)$$

Учитывая (18), применим к (17) оценку (6):

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq N} \|z_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^N \|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\|^2 \tau \leq C \left\{ \|Q_h(0)u^0 - u_0^h\|_V^2 \right. \\ + \int_0^T \|w_h'(t) - u'(t)\|^2 dt + \sum_{k=0}^N \|w_h(t_k) - u(t_k)\|_V^2 \tau \\ \left. + \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} P_h \left[u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \right] dt \right\|_\tau^2 \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее заметим, что почти при всех $t \in [0, T]$

$$w'_h(t) - u'(t) = [Q_h(t) - I]u'(t) + Q'_h(t)u(t),$$

а из (15) для $u \in V$ следует оценка

$$\|Q'_h(t)u\|_V \leq M_2\delta^{-1}\|[I - Q_h(t)]u\|_V.$$

Отсюда получим

$$\int_0^T \|w'_h(t) - u'(t)\|^2 dt \leq C \left\{ \max_{0 \leq t \leq T} \|[I - Q_h(t)]u(t)\|_V^2 + \int_0^T \|[I - Q_h(t)]u'(t)\|^2 dt \right\}. \quad (20)$$

Очевидна оценка

$$\sum_{k=0}^N \|w_h(t_k) - u(t_k)\|_V^2 \tau \leq 2T \max_{0 \leq t \leq T} \|[I - Q_h(t)]u(t)\|_V^2. \quad (21)$$

Заметим также, что

$$\|Q_h(0)u^0 - u_0^h\|_V^2 \leq 2\|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + 2 \max_{0 \leq t \leq T} \|[I - Q_h(t)]u(t)\|_V^2. \quad (22)$$

Рассмотрим, наконец, погрешность $z_k = u(t_k) - u_k^h = z_k^h + [u(t_k) - w_h(t_k)]$. Отсюда следует оценка

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|z_k\|_V^2 \leq 2 \max_{1 \leq k \leq N} \|z_k^h\|_V^2 + 2 \max_{0 \leq t \leq T} \|[I - Q_h(t)]u(t)\|_V^2.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} = \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} + \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [u'(t) - w'_h(t)] dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|^2 \tau \\ & \leq C \left\{ \sum_{k=1}^N \|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\|^2 \tau + \int_0^T \|u'(t) - w'_h(t)\|^2 dt \right\}. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь оценкой (20). Заметим также, что для $v \in V$ и $t \in [0, T]$

$$\|[I - Q_h(t)]v\|_V^2 \leq M_1\delta^{-1}\|(I - Q_h)v\|_V^2. \quad (23)$$

Оценка (16) будет следовать теперь из оценок (19)–(23).

Далее покажем, как из (16) получается сходимость погрешности S к нулю, причем с порядком скорости сходимости как по времени, так и по пространству.

Предположим, что подпространства V_h обладают следующим аппроксимационным свойством, типичным для метода конечных элементов:

$$\|(I - Q_h)v\|_V \leq ch\|v\|_E, \quad v \in E, \quad (24)$$

где константа $c > 0$ не зависит от v и h .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $u(t)$ – гладкое решение задачи (3), а u_k^h – решение задачи (5). Пусть выполнено условие (24). Если существует $u'' \in L_p(0, T; H)$ для некоторого $1 \leq p \leq 2$, то справедлива оценка

$$S \leq M \left\{ \|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + h^2 \left[\max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|^2 + \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt \right] + \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|^p dt \right)^{2/p} \right\}, \quad (25)$$

где погрешность S определена в (16). Если же существует $u''' \in L_p(0, T; H)$ для некоторого $1 \leq p \leq 2$, то для S справедлива оценка

$$S \leq M \left\{ \|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + h^2 \left[\max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|^2 + \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt \right] + \tau^{5-2/p} \left(\int_0^T \|u'''(t)\|^p dt \right)^{2/p} \right\}. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обоснуем прежде всего в (25) и (26) порядок h^2 по пространственным переменным. Очевидно

$$\|(I - Q_h)u(t)\|_V \leq cdh \|A(t)u(t)\|. \quad (27)$$

Воспользуемся также для $v \in V$ и $t \in [0, T]$ следующей оценкой из [2]:

$$\|[I - Q_h(t)]v\| \leq M_1 cdh \|(I - Q_h)v\|_V,$$

из которой почти при всех $t \in [0, T]$ получим

$$\|[I - Q_h(t)]u'(t)\| \leq M_1 cdh \|u'(t)\|_V. \quad (28)$$

Оценки (16), (27) и (28) дают необходимый порядок сходимости по h .

Оценим последнее слагаемое в правой части (16). Из равенства

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} - u'(t) \right] dt = -\frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_{k-1} - 2t + t_k) u''(t) dt$$

и оценки $|t_k - 2t + t_{k-1}| \leq \tau$ для $t \in [t_{k-1}, t_k]$ получим оценку

$$\frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} P_h \left[\frac{u'(t_k) - u'(t_{k-1})}{2} - u'(t) \right] dt \right\|^2 \leq \frac{\tau^{3-2/p}}{4} \left(\int_0^T \|u''(t)\|^p dt \right)^{2/p},$$

а, значит, и оценку (25). Воспользовавшись же равенством

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} - u'(t) \right] dt = \frac{1}{8} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\tau^2 - (t_k - 2t + t_{k-1})^2] u'''(t) dt$$

и оценкой $|\tau^2 - (t_k - 2t + t_{k-1})^2| \leq \tau^2$ для $t \in [t_{k-1}, t_k]$, получим

$$\frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} P_h \left[\frac{u'(t_k) - u'(t_{k-1})}{2} - u'(t) \right] dt \right\|^2 \leq \frac{\tau^{5-2/p}}{64} \left(\int_0^T \|u'''(t)\|^p dt \right)^{2/p},$$

т.е. мы доказали и (26).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В условиях выполнения оценки (25) справедлива еще одна оценка:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \left\| u'(t_k) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|^2 \tau \\ & \leq M \left\{ \|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + h^2 \left[\max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|^2 + \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt \right] \right. \\ & \quad \left. + \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|^p dt \right)^{2/p} \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \left\| u'(t_k) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|^2 \tau \\ & \leq 2 \sum_{k=1}^N \left\| u'(t_k) - \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt \right\|^2 \tau \\ & \quad + 2 \sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|^2 \tau = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Оценка слагаемого I_2 уже установлена в (26). Проведем оценку

$$I_1 = \frac{2}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} [u'(t_k) - u'(t)] dt \right\|^2 \leq 2\tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|^p dt \right)^{2/p}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оценки (25), (26) и (29) можно было бы выписать в терминах условий на данные задачи. Однако не исключено, что задачи (3) с негладкими данными могут иметь весьма гладкие решения. Поэтому оценки (25), (26) и (29) с априорными данными на решение представляются более предпочтительными.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Результаты данной работы, как легко видеть, остаются справедливыми, если равномерную сетку по времени заменить произвольной $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, удовлетворяющей условию $N \max \tau_k \leq C$, где $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ и $k = \overline{1, N}$. При этом в оценках погрешности, например (29), в левой части вместо τ следует писать τ_k , а в правой части под τ надо понимать $\max \tau_k$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Смагин В. В. Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода приближенного решения абстрактного параболического уравнения // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 6. С. 898–909.
- [2] Смагин В. В. Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений // ЖВМиМФ. 2000. Т. 40. № 6. С. 908–919.
- [3] Смагин В. В. Энергетические оценки погрешности проекционно-разностного метода со схемой Кранка–Николсон для параболических уравнений // Сиб. матем. ж. 2001. Т. 42. № 3. С. 670–682.
- [4] Смагин В. В. Проекционно-разностные методы приближенного решения параболических уравнений с несимметричными операторами // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 1. С. 115–123.
- [5] Туретаев И. Д. Точные оценки градиента погрешности проекционно-разностных схем для параболических уравнений в произвольной области // ЖВМиМФ. 1986. Т. 26. № 11. С. 1748–1751.

- [6] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
- [7] Смагин В.В. О разрешимости абстрактного параболического уравнения с оператором, область определения которого зависит от времени // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 5. С. 711–712.
- [8] Смагин В.В. О гладкой разрешимости вариационных задач параболического типа // Тр. матем. ф-та (новая серия). Т. 3. Воронеж: Изд-во Воронежского гос. ун-та, 1998. С. 67–72.
- [9] Смагин В.В. Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 3. С. 143–160.
- [10] Вайникко Г. М., Оя П. Э. О сходимости и быстрой сходимости метода Галёркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 7. С. 1269–1277.
- [11] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
- [12] Смагин В.В. Оценки погрешности полудискретных приближений по Галёркину для параболических уравнений с краевым условием типа Неймана // Изв. вузов. Сер. матем. 1996. Т. 3 (406). С. 50–57.

Воронежский государственный университет

Поступило
08.04.2002