Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Рышков, Бесконечные грани совершенного полиэдра Вороного, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 2, 261–268

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm32>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:48:26

УДК 514.17

БЕСКОНЕЧНЫЕ ГРАНИ СОВЕРШЕННОГО ПОЛИЭДРА ВОРОНОГО

С. С. Рышков

В статье изучаются бесконечные грани совершенного полиэдра Вороного. Результат оказывается существенно различным в зависимости от того, рассматривать ли совершенный полиэдр Вороного как замкнутую или как незамкнутую выпуклую оболочку множества точек Вороного (см. теорему 1 из п. 5 и теорему 2 из п. 7).

Библиография: 2 названия.

Автор посвящает эту статью своему дорогому другу профессору Петеру Манфреду Груберу к его 60-летию.

1. Рассматривается (см., например, [1]) евклидово пространство $\mathbf{E}^N = \mathbb{E}(n)$ размерности $N = n(n+2)/2$, где n – натуральное число. Пространство $\mathbf{E}^N$ считается заданным ортонормированной системой координат

$$(v_{11}, v_{22}, \dots, v_{n,n}, v_{12}, \dots, v_{n-1,n})$$

с началом в точке $\mathbf{0}$.

Каждой точке $f \in \mathbf{E}^N$, имеющей координаты

$$(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{n,n}, a_{12}, \dots, a_{n-1,n}), \quad (1)$$

ставится в соответствие квадратичная форма

$$f = f(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \bar{x}^T A \bar{x}, \quad (2)$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ – действительные числа, через A обозначена симметрическая матрица чисел a_{ij} , через $\bar{x}$ – столбец переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и через T обозначена операция транспонирования.

Наоборот, каждой квадратичной форме вида (2) ставится в соответствие точка $f \in \mathbf{E}^N$, имеющая координаты (1).

Множество точек $f \in \mathbf{E}^N$, соответствующих положительно определенным квадратичным формам вида (2) (далее ПКФ), образует открытый выпуклый конус $\mathbb{K}(n) \subset \mathbb{E}(n)$ – конус положительности ранга n . Граница $\partial \mathbb{K}(n) \subset \mathbb{E}(n)$ состоит из тех и

Работа поддержана Международным институтом математической физики (ESI), Вена, Австрия, а также Российским фондом фундаментальных исследований, гранты № № 97-01-266 и 00-01-00619.

только тех точек пространства $\mathbb{E}(n)$, которые отвечают неотрицательно определенным квадратичным формам вида (2) ранга меньшего, чем n (*неотрицательным, положительно полуопределенным формам*), и нулевой форме. Рассматривается также конус $\overline{\mathbb{K}}(n) = \partial\mathbb{K}(n) \cup \mathbb{K}(n)$.

2. Точкой Вороного называется каждая точка пространства $\mathbb{E}(n)$, отвечающая квадратичной форме вида $(q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n)^2$, где $q_1, q_2, \dots, q_n$ — *нижние координаты точки Вороного* — целые, не все равные нулю, числа. *Примитивной точкой Вороного* называется такая точка Вороного, у которой числа $q_1, q_2, \dots, q_n$ не имеют общего делителя. Очевидно, что все точки Вороного лежат в границе $\partial\mathbb{K}(q)$, конуса $\mathbb{K}(n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Замкнутым (совершенным) полиэдром Вороного (ранга n)* называется замкнутая выпуклая оболочка $\Pi^+(n) \subset \overline{\mathbb{K}}(n)$ множества всех точек Вороного.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Незамкнутым (совершенным) полиэдром Вороного (ранга n)* называется незамкнутая выпуклая оболочка $\Pi^-(n) \subset \overline{\mathbb{K}}(n)$ множества всех точек Вороного.

Если не важно, какая рассматривается выпуклая оболочка множества всех точек Вороного, замкнутая или нет, то говорят [1] просто о (*совершенном*) *полиэдре Вороного* $\Pi(n)$ (*ранга n*).

Часто в определении полиэдра Вороного рассматривается выпуклая оболочка множества не всех точек Вороного, а только примитивных; это не корректно при $n = 1$ и, тем самым, нарушает дуальность совершенных полиэдров $\Pi^-(n)$ и $M(n)$. Однако при рассмотрении лишь конечных граней полиэдра Вороного этой некорректностью, хотя она и затрудняет доказательства, можно пренебречь.

3. В пространстве $\mathbb{E}(n)$ рассматриваются плоскости с уравнениями вида

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_{ij} = C. \quad (3)$$

Если фиксировать значение $C \neq 0$, то каждой квадратичной форме вида (2), не равной тождественно нулю, ставится в соответствие единственная плоскость вида (3) и наоборот. Рассматриваемые плоскости классифицируются как *эллиптические*, *параболические* и *гиперболические* плоскости в зависимости от того, является ли форма f определенной, полуопределенной или неопределенной.

На эллиптических плоскостях могут лежать только конечные грани полиэдра Вороного. На гиперболических плоскостях, а также на параболических плоскостях вида (3) при $C \neq 0$ не лежит никаких граней полиэдра Вороного, см. [1]. (*Гранью* выпуклого множества называется его пересечение с произвольной опорной к нему плоскостью. Например, каждая точка границы замкнутого метрического шара есть его грань. Открытый метрический шар граней не имеет.)

Итак, нас будут интересовать лишь параболические плоскости $\mathbb{P}_f^{N-1}$ вида (3), в основном, при $C = 0$; при этом мы будем предполагать, что форма f полуопределена положительно.

4. Наряду с пространством $\mathbf{E}^N$ мы будем рассматривать пространство (переменных формы) $\mathbf{E}^n$, заданное ортонормированной системой координат $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Через $\mathbf{E}^q$

мы будем обозначать координатную плоскость первых q координат пространства $\mathbf{E}^n$, а через $\mathbb{E}(q)$ – пространство квадратичных форм от переменных $(x_1, x_2, \dots, x_q)$. Соответствующим образом определяются и множества $\mathbb{K}(q)$, $\partial\mathbb{K}(q)$, $\overline{\mathbb{K}}(q)$.

Уравнение $f(\bar{x}) = 0$, где $f(\bar{x})$ – положительно полуопределенная форма ранга $p > 0$ ($\text{rg } f(\bar{x}) = p$), задает в пространстве $\mathbf{E}^n$ плоскость $\mathcal{P}^q$, где, как и всюду далее, $p + q = n$. (Например, плоскость $\mathbf{E}^q$ задается уравнением $x_{q+1}^2 + x_{q+2}^2 + \dots + x_n^2 = 0$.)

В случае, когда плоскость $\mathcal{P}^q$ пересекается с решеткой $\mathbb{Z}^n \subset \mathbf{E}^n$ по подрешетке ранга q , плоскость $\mathcal{P}^q$ называется *вполне рациональной*. (Например, плоскость $\mathbf{E}^q$ вполне рациональна.)

В случае, когда плоскость $\mathcal{P}^q$ пересекается с решеткой $\mathbb{Z}^n \subset \mathbf{E}^n$ лишь по точке $(0, 0, \dots, 0)$, плоскость $\mathcal{P}^q$ называется *вполне иррациональной*. (Промежуточные случаи специальных названий не имеют.)

5. ЛЕММА 1. Пусть плоскость $\mathbb{P}_f^{N-1}$ задана равенством

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{ij} = 0, \quad (4)$$

где $n > \text{rg } f(\bar{x}) = p > 0$. Тогда пересечение плоскости $\mathbb{P}_f^{N-1}$ с конусом $\overline{\mathbb{K}}(n)$ аффинно эквивалентно конусу $\overline{\mathbb{K}}(q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем форму $f(\bar{x})$ к следующему нормальному виду:

$$f'(\bar{x}) = x_{q+1}^2 + x_{q+2}^2 + \dots + x_n^2.$$

Это приведение повлечет за собой некоторое аффинное преобразование, переводящее плоскость $\mathbb{P}_f^{N-1}$ в плоскость $\mathbb{P}_{f'}^{N-1}$ с уравнением $v_{q+1,q+1} + v_{q+2,q+2} + \dots + v_{n,n} = 0$, а конус $\overline{\mathbb{K}}(n)$ в себя. Заметим, что при этом преобразовании полиэдр Вороного не сохраняется.

Рассмотрим, какие точки конуса $\overline{\mathbb{K}}(n)$ принадлежат плоскости $\mathbb{P}_{f'}^{N-1}$. Пусть

$$g(\bar{x}) = g(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{n,n}, a_{12}, \dots, a_{n-1,n}) \in \mathbb{P}_{f'}^{N-1} \cap \overline{\mathbb{K}}(n),$$

тогда имеем

- 1) $a_{q+1,q+1} = 0, a_{q+2,q+2} = 0, \dots, a_{n,n} = 0$ (иначе, по крайней мере, одна из этих величин отрицательна, в то время как форма $g(\bar{x})$ неотрицательно определена);
- 2) $a_{q+1,q+2} = 0, a_{q+1,q+3} = 0, \dots, a_{n-1,n} = 0$;
- 3) $a_{i,j} = 0$ при $i = 1, 2, \dots, q$ и $j = q+1, q+2, \dots, n$ (иначе, снова получаем противоречие с неотрицательностью формы $g(\bar{x})$).

Таким образом, форма $g(\bar{x})$ – неотрицательно определенная форма только от переменных $x_1, x_2, \dots, x_q$, причем, как легко видеть, произвольная.

СЛЕДСТВИЕ. Для любой грани конуса $\overline{\mathbb{K}}(n)$, не совпадающей с его вершиной, найдется такое $q > 0$, что эта грань аффинно эквивалентна конусу $\overline{\mathbb{K}}(q)$.

ЛЕММА 2. Пусть равенство

$$f(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = 0 \quad (5)$$

определяет q -мерную вполне рациональную плоскость $\mathcal{P}^q \subset \mathbf{E}^n$, тогда множество точек Вороного, лежащих в плоскости $\mathbb{P}_f^{N-1}$ с уравнением (4), аффинно эквивалентно множеству вершин полиэдра Вороного $\Pi(q) \subset \mathbf{E}(q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем базис пересечения $\mathcal{P}^q \cap \mathbb{Z}^n$ и дополним его до базиса всей решетки $\mathbb{Z}^n$. Произведем такое линейное преобразование пространства $\mathbf{E}^n$, переводящее полученный базис решетки $\mathbb{Z}^n$ в стандартный ее базис, чтобы плоскость $\mathcal{P}^q$ перешла в плоскость $\mathbf{E}^q$. Это целочисленное линейное преобразование повлечет за собой (см. [1]) такое аффинное преобразование пространства $\mathbf{E}(n)$, которое переведет плоскость (5) в плоскость $\mathbf{E}(q)$, полиэдр Вороного в себя, а точки Вороного, лежащие в (5), взаимно однозначно переведет в вершины полиэдра Вороного $\Pi(q)$.

ЛЕММА 3. Пусть равенство (5) определяет p -мерную плоскость $\mathcal{P}^p \subset \mathbf{E}^n$, тогда множество точек Вороного, лежащих в плоскости (4), совпадает с множеством точек Вороного, определенных максимальной вполне рациональной плоскостью $\mathcal{P}_*^q$, содержащейся в плоскости $\mathcal{P}^p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай, когда плоскость $\mathcal{P}^p \subset \mathbf{E}^n$ вполне рациональная, разобран в лемме 2. Пусть плоскость $\mathcal{P}^p$ не является ни вполне рациональной, ни вполне иррациональной. Заметим, что плоскость $\mathcal{P}_*^q$ однозначно определена плоскостью $\mathcal{P}^p$ и что ее можно без уменьшения общности считать плоскостью $\mathbf{E}^q$. Выберем теперь произвольную точку Вороного с нижними координатами, например, равными

$$q_1, \quad q_2, \quad \dots, \quad q_n. \quad (6)$$

Если $q_{q+1}^2 + q_{q+2}^2 + \dots + q_n^2 = 0$, то наша точка определена точкой из $\mathbf{E}^q$. Если же $q_{q+1}^2 + q_{q+2}^2 + \dots + q_n^2 \neq 0$, то подстановка строки (6) в “левую часть” уравнения плоскости $\mathcal{P}^p$ не может дать 0, так как все целые точки этой плоскости находятся в плоскости $\mathbf{E}^q$. Следовательно, подстановка строки (6) в левую часть уравнения (5) дает число, большее нуля.

Случай вполне иррациональной плоскости уже очевиден.

ТЕОРЕМА 1. Для каждой бесконечной грани незамкнутого совершенного полиэдра Вороного $\Pi^-(n)$ найдется такое $q \leq n$, что эта грань есть аффинный образ незамкнутого совершенного полиэдра Вороного $\Pi^-(q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай, когда опорная плоскость к совершенному полиэдру $\Pi^-(n)$ вполне рациональна, разобран в лемме 2, все другие – в лемме 3.

6°. Прежде, чем перейти к основному результату, докажем несколько утверждений различного характера.

Обозначим через $\mathcal{K} \subset \mathbf{E}^d$ бесконечный (не вырождающийся в полупространство) замкнутый телесный круговой конус с вершиной в точке $\mathbf{0}$. Через $\mathcal{K}'$ обозначим конус, который центрально симметричен конусу $\mathcal{K}$ относительно точки $\mathbf{0}$. Пусть конус $\mathcal{K}$ (или

$\mathcal{K}'$) так параллельно перенесен, что его вершина попала в точку x , тогда результат переноса обозначим через $\mathcal{K}_x$ (соответственно через $\mathcal{K}'_x$).

Всюду дальше символом $+$ обозначена операция векторного сложения (сумма Минковского). Без потери общности мы можем и будем считать, что точка, относительно которой берется сумма Минковского, — это точка 0 .

ЛЕММА 4. Пусть $a, b, c \in \mathcal{K}$, пусть также $a + b \in \mathcal{K}'_c$. Тогда a и $b \in \mathcal{K}'_c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $a + b = c$. Тогда точки $0, a, b$ и c лежат в одной плоскости, скажем, $\mathcal{P}^2$, и образуют параллелограмм $0, a, c, b$. Пересечение $\mathcal{P}^2 \cap \mathcal{K} \cap \mathcal{K}'_c$ также является параллелограммом с парой противоположных вершин c и 0 (см. рис. 1). Очевидно, что если одна из вершин a или b лежит вне угла $\mathcal{P}^2 \cap \mathcal{K}'_c$, то другая лежит вне угла $\mathcal{P}^2 \cap \mathcal{K}$. Очевидно также, что это равносильно утверждению леммы в рассматриваемом случае.

Рис. 1.

Пусть теперь $a + b = x \in \mathcal{K}'_c$. Имеем $\mathcal{K}'_x \subset \mathcal{K}'_c$, и все следует из предыдущего случая.

ЛЕММА 5. Для любых двух множеств A и $B \subset \mathcal{K}$ имеет место равенство

$$\text{clos}(A + B) = \text{clos } A + \text{clos } B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $x \in \text{clos}(A + B)$. Выберем такую точку c , чтобы точка x вместе с некоторой своей окрестностью $\mathbf{O}x$ (относительно конуса $\mathcal{K}$) принадлежала конусу $\mathcal{K}'_c$. В сколь угодно малой окрестности точки x найдутся точки вида $x_i = a_i + b_i$, где $a_i \in A \subset \text{clos } A$ и $b_i \in B \subset \text{clos } B$. Мы можем считать, что точки $x_1, x_2, \dots$ образуют последовательность, сходящуюся к точке x и что $x_1, x_2, \dots \in \mathbf{O}x \subset \mathcal{K}'_c$. В силу леммы 4 все точки вида a_i и b_i лежат в пересечении $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}'_c$. Следовательно, быть может, дважды переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что последовательности $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ сходятся соответственно к некоторым точкам $a \in \text{clos } A \cap \mathcal{K} \cap \mathcal{K}'_c$ и $b \in \text{clos } B \cap \mathcal{K} \cap \mathcal{K}'_c$. Очевидно, что $x = a + b$, т.е.

$$\text{clos}(A + B) \subset \text{clos } A + \text{clos } B,$$

2) Пусть $x \in \text{clos } A + \text{clos } B$. Выберем произвольно малое $\varepsilon > 0$ и через $\mathbf{O}_\varepsilon x \subset \mathbf{E}^d$ обозначим сферическую ε -окрестность точки $x \in \mathbf{E}^d$.

Тогда в $(\varepsilon/3)$ -окрестности точки x найдется точка вида $a' + b'$, где $a' \in \text{clos } A$ и $b' \in \text{clos } B$. Выберем точки $a \in \mathbf{O}_{\varepsilon/3}x \cap A$ и $b \in \mathbf{O}_{\varepsilon/3}x \cap B$, очевидно, что $a + b \in \mathbf{O}_{\varepsilon}x$. Последнее ввиду произвольной малости ε эквивалентно включению

$$\text{clos } A + \text{clos } B \subset \text{clos}(A + B).$$

Во всем дальнейшем мы будем считать, что

- а) начало $\mathbf{0}$ конуса $\overline{\mathbb{K}}(n)$ совпадает с началом, уже N -мерного, конуса $\mathcal{K}$;
- б) $\overline{\mathbb{K}}(n) \setminus \mathbf{0} \subset \mathcal{K}$;
- с) начало векторного суммирования есть точка $\mathbf{0}$.

ЛЕММА 6. При каждом $n \geq 1$ имеют место равенства

$$(\mathbb{K}(n) \cup \mathbf{0}) \oplus \Pi^-(n) = \Pi^-(n) \quad \text{и} \quad \overline{\mathbb{K}}(n) \oplus \Pi^+(n) = \Pi^+(n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\Pi^-(n) \subset \Pi^-(n) \oplus (\mathbf{0} \cup \mathbb{K}(n)).$$

Покажем противоположное включение. Каждая точка $\varphi \in \Pi^-(n)$ имеет вид

$$\varphi = \sum_1^{N-1} \alpha_i l_i^2, \quad (7)$$

где l_i – линейные целочисленные ненулевые формы, $\alpha_i \geq 0$ и $\sum_1^{N-1} \alpha_i \geq 1$. Каждая точка $\psi \in \mathbb{K}(n)$ имеет вид, см. [2, § 1.1] и [1, § 11], $\psi = \sum_1^{N-1} \beta_i l_i^2$, где l_i – линейные целочисленные ненулевые формы, $\beta_i \geq 0$ и $\sum_1^{N-1} \beta_i \geq 1$.

Точка

$$\frac{\varphi + \psi}{\sum_1^{N-1} \alpha_i + \sum_1^{N-1} \beta_i}$$

является точкой многогранника, натянутого на вершины совершенного полиэдра $\Pi^-(n)$, т.е.

$$\frac{\varphi + \psi}{\sum_1^{N-1} \alpha_i + \sum_1^{N-1} \beta_i} \in \Pi^-(n).$$

Поскольку $\sum_1^{N-1} \alpha_i + \sum_1^{N-1} \beta_i \geq 1$, а для любых $g \in \Pi^-(n)$ и $\lambda \geq 1$ справедливо включение $g\lambda \in \Pi^-(n)$, то $\varphi + \psi \in \Pi^-(n)$. Тем самым, первое из равенств леммы доказано.

Второе равенство есть прямое следствие первого и леммы 5.

ЛЕММА 7. Пусть для множества $\mathbb{M} \subset \overline{\mathbb{K}}(n)$ и точки $g \in \mathbb{K}(n)$ существуют плоскость $\mathbb{P}^{N-1}$, отделяющая точку g от множества $\mathbb{M}$, и такая точка $\varphi \in \overline{\mathbb{K}}(n)$, что $\varphi \oplus \overline{\mathbb{K}}(n) \subset \mathbb{M}$.

Тогда существует и эллиптическая плоскость, отделяющая точку g от множества $\mathbb{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, отметим, что плоскость $\mathbb{P}^{N-1}$ не гиперболическая, поскольку любая гиперболическая плоскость разрезает каждую параллельную копию конуса $\overline{\mathbb{K}}(n)$ на две полномерные части. Если плоскость $\mathbb{P}^{N-1}$ эллиптическая, то лемма доказана.

Пусть плоскость $\mathbb{P}^{N-1}$ параболическая. Без потери общности мы можем считать, что она находится на положительном расстоянии от множества $\mathbb{M}$. Заметим также, что, поскольку параболический “карман” заключен между двумя плоскостями, точки g и 0 лежат по одну сторону от плоскости $\mathbb{P}^{N-1}$. Опустим из них перпендикуляры на плоскость $\mathbb{P}^{N-1}$ и проведем через эти перпендикуляры двумерную плоскость $\mathbb{P}^2$. Прямая $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^{N-1} \cap \mathbb{P}^2$ пересечет границу конуса $\overline{\mathbb{K}}(n)$ в некоторой точке φ . Проведем, наконец, плоскость $\mathbb{P}^{N-2} \subset \mathbb{P}^{N-1}$, касающуюся пересечения $\mathbb{P}^{N-1} \cap \overline{\mathbb{K}}(n)$ в точке φ .

Теперь для получения искомой плоскости достаточно сколь угодно мало повернуть плоскость $\mathbb{P}^{N-1}$ вокруг плоскости $\mathbb{P}^{N-2}$ в сторону точки g (но не переходя ее).

ЛЕММА 8. Пусть $\overline{\mathbb{K}}$ – грань некоторого ранга q конуса $\overline{\mathbb{K}}(n)$ и $\mathbb{P}$ – плоскость размерности $Q - 1 = (q + 1)q/2 - 1$, эллиптическая относительно конуса $\overline{\mathbb{K}}$.

Тогда существует такая эллиптическая плоскость $\mathbb{P}^{N-1}$, что $\mathbb{P}^{N-1} \cap \overline{\mathbb{K}} = \mathbb{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произведя, если нужно, соответствующее преобразование, мы можем считать, что $\overline{\mathbb{K}} = \overline{\mathbb{K}}(q)$. Тогда общее уравнение $(Q - 1)$ -мерной, эллиптической относительно конуса $\overline{\mathbb{K}}(q)$, плоскости, т.е. плоскости $\mathbb{P}$, имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^q a_{ij} v_{ij} = C > 0,$$

где $\sum_{i,j=1}^q a_{ij} x_i x_j$ – ПКФ от первых q переменных.

Теперь уже очевидно, что уравнение

$$\sum_{i,j=1}^q a_{ij} v_{ij} + v_{q+1,q+1} + \dots + x_{nn} = C$$

задает одну из плоскостей вида $\mathbb{P}^{N-1}$, обладающих требуемым свойством.

7. ТЕОРЕМА 2. Для каждой бесконечной грани $\mathbb{G}$ замкнутого совершенного полиэдра Вороного $\Pi^+(n)$ найдутся такие $r \leq q \leq n$, что грань $\mathbb{G}$ есть аффинный образ векторной суммы конуса $\overline{\mathbb{K}}(q)$ и содержащегося в нем замкнутого совершенного полиэдра Вороного $\Pi^+(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть грань $\mathbb{G}$ определена плоскостью $\mathbb{P}_f^{N-1}$, заданной уравнением (4) при $\text{rg } f(\bar{x}) = p$, т.е.

$$\mathbb{G} = \Pi^+(n) \cap \mathbb{P}_f^{N-1}.$$

Отметим, что пересечение $\overline{\mathbb{K}}$ нашей плоскости с конусом $\overline{\mathbb{K}}(n)$ согласно лемме 1 аффинно эквивалентно конусу $\overline{\mathbb{K}}(q)$, а также, что $\mathbb{G} \subset \overline{\mathbb{K}}$.

Без уменьшения общности мы можем считать, что максимальная вполне рациональная плоскость, содержащаяся в плоскости $\mathcal{P}^q$, определенной уравнением (5), – это плоскость $\mathbb{E}^r$. Следовательно, $\Pi^+(r) \subset \mathbb{G}$.

а) Докажем включение $\overline{\mathbb{K}} \oplus \Pi^+(r) \subset \mathbb{G}$.

Согласно лемме 6 имеем, что

$$\overline{\mathbb{K}}(n) \oplus \Pi^+(n) = \Pi^+(n).$$

Отсюда, очевидно, следует равенство

$$[\overline{\mathbb{K}}(n) \oplus \Pi^+(n)] \cap \mathbb{P}_f^{N-1} = \Pi^+(n) \cap \mathbb{P}_f^{N-1}.$$

Поскольку все множества, встречающиеся в этой формуле, лежат в одном и том же замкнутом полупространстве, определенном плоскостью $\mathbb{P}_f^{N-1}$, мы получаем

$$[\overline{\mathbb{K}}(n) \cap \mathbb{P}_f^{N-1}] \oplus [\Pi^+(n) \cap \mathbb{P}_f^{N-1}] = \Pi^+(n) \cap \mathbb{P}_f^{N-1}.$$

Отсюда, учитывая, что $\mathbb{G} = \Pi^+(n) \cap \mathbb{P}_f^{N-1}$, что $\overline{\mathbb{K}}(n) \cap \mathbb{P}_f^{N-1} = \overline{\mathbb{K}}$ и что $\mathbb{G} \subset \overline{\mathbb{K}}$, имеем $\overline{\mathbb{K}} \oplus \mathbb{G} \subset \mathbb{G}$. И окончательно, учитывая, что $\Pi^+(r) \subset \mathbb{G}$, имеем

$$\overline{\mathbb{K}} \oplus \Pi^+(r) \subset \mathbb{G}.$$

б) Докажем включение $\mathbb{G} \subset \overline{\mathbb{K}} \oplus \Pi^+(r)$.

Возьмем произвольную точку

$$g \in \overline{\mathbb{K}} \setminus (\overline{\mathbb{K}} \oplus \Pi^+(r))$$

и покажем, что $g \in \mathbb{G}$. Действительно, множество $\mathbb{M} = \overline{\mathbb{K}} \oplus \Pi^+(r)$ как векторная сумма двух замкнутых и выпуклых множеств, замкнуто и выпукло. Следовательно, относительно пары g и $\mathbb{M}$ выполнены все условия леммы 7, тем самым существует эллиптическая относительно конуса $\mathbb{K}$ плоскость, отделяющая точку g от множества $\mathbb{M}$. Согласно лемме 8 эта плоскость может быть продолжена до некоторой, эллиптической относительно конуса $\mathbb{K}(n)$ плоскости $\mathbb{P}^{N-1}$. Плоскость $\mathbb{P}^{N-1}$ отделяет множество $\mathbb{M}$ от точки g и, вообще говоря, еще от конечного числа точек Вороного. Повернув плоскость $\mathbb{P}^{N-1}$ относительно плоскости $\mathbb{P}^{N-2} \subset \mathbb{P}^{N-1}$, касательной к пересечению $\mathbb{P}^{N-1} \cap \mathbb{K}(n)$, мы найдем плоскость, отделяющую точку g от множества $\mathbb{M}$ и от всех точек Вороного, лежащих вне него. Таким образом, $g \in \mathbb{G}$, что эквивалентно утверждаемому включению.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рышков С. С., Барановский Е. П. Классические методы теории решетчатых упаковок // УМН. 1979. Т. 34. № 4 (208). С. 3–63.
- [2] Вороной Г. Ф. Исследования о примитивных параллелоэдрах // Собр. соч. Т. 2. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. С. 239–368. (Оригинал в J. Reine Angew. Math., 1908, V. 134, P. 198–287, 1909, V. 136, P. 67–179).