Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Порядки в цепных кольцах, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 6, 924–933

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm320>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 03:02:50

УДК 512.55

ПОРЯДКИ В ЦЕПНЫХ КОЛЬЦАХ

А. А. Туганбаев

Пусть A – кольцо и $T(A)$ и $N(A)$ – множество всех регулярных элементов и множество всех нерегулярных элементов кольца A соответственно. Доказано, что A – правый порядок в цепном справа кольце тогда и только тогда, когда множество всех регулярных элементов кольца A является левым идеалом мультипликативной полугруппы A и для любых элементов a_1 и a_2 кольца A либо существуют такие элементы $b_1 \in A$ и $t_1 \in T(A)$, что $a_1 b_1 = a_2 t_1$, либо существуют такие элементы $b_2 \in A$ и $t_2 \in T(A)$, что $a_2 b_2 = a_1 t_2$. Дистрибутивное справа кольцо A является правым порядком в цепном справа кольце тогда и только тогда, когда множество $N(A)$ является левым идеалом кольца A . Если A – такое дистрибутивное справа кольцо, что все его правые делители нуля содержатся в радикале Джекобсона $J(A)$ кольца A , то A – правый порядок в цепном справа кольце.

Библиография: 11 названий.

В данной работе все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Модуль M называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению, т.е. решетка $\text{Lat}(M)$ всех его подмодулей является цепью (термин введен Л. А. Скорняковым). Цепные справа кольца подробно исследуются в книгах Дубровина, Бессенродта, Брунгса и Тёнера, (см. [1]–[3]); кроме того, следует отметить работы Дубровина [4], [5]. Модуль M называется *дистрибутивным*, если решетка $\text{Lat}(M)$ дистрибутивна. Дистрибутивные модули и кольца исследуются в книгах Беренса, Кона и Туганбаева (см. [6]–[9]). Кольцо без делителей нуля называется *областью*. Радикал Джекобсона и множество всех правых или левых делителей нуля кольца A обозначаются через $J(A)$ и $N(A)$ соответственно; множество $A \setminus N(A)$ обозначается через $T(A)$, а элементы множества $T(A)$ называются *регулярными элементами* (в A). Мультипликативное замкнутое подмножество T множества $T(A)$ называется *правым множеством Ore*, если выполняются следующие два эквивалентных условия:

- (1) для любых элементов $a \in A$ и $t \in T$ существуют такие элементы $b \in A$ и $u \in T$, что $au = tb$;
- (2) существует такое кольцо A_T , что A – унитарное подкольцо в A_T , все элементы множества T обратимы в A_T и $A_T = \{at^{-1} \mid a \in A, t \in T\}$.

В этом случае кольцо A_T называется *правым кольцом частных* кольца A относительно T . Если $T(A)$ – правое множество Ore, то кольцо $A_{T(A)}$ называется *правым классическим кольцом частных* кольца A и говорят, что A – *правый порядок* в Q .

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 99-01-00382.

Хорошо известно, что область A является правым порядком в теле тогда и только тогда, когда $T(A)$ – правое множество Оре. Кроме того, любая дистрибутивная справа область является правым порядком в теле [10]. Заметим, что каждое тело является цепным кольцом. Основными результатами данной работы являются теоремы 1–3.

ТЕОРЕМА 1. *Кольцо A является правым порядком в цепном справа кольце тогда и только тогда, когда множество $N(A)$ является левым идеалом мультипликативной полугруппы A и для любых элементов a_1 и a_2 кольца A либо существуют такие элементы $b_1 \in A$ и $t_1 \in T(A)$, что $a_1 b_1 = a_2 t_1$, либо существуют такие элементы $b_2 \in A$ и $t_2 \in T(A)$, что $a_2 b_2 = a_1 t_2$.*

Отметим связь нашей теоремы 1 с классической теоремой Оре о правых порядках в телах. Кроме того, теорема 1 используется для доказательства теорем 1 и 2.

ТЕОРЕМА 2. *Дистрибутивное справа кольцо A является правым порядком в цепном справа кольце тогда и только тогда, когда множество $N(A)$ является левым идеалом кольца A .*

ТЕОРЕМА 3. *Если A – такое дистрибутивное справа кольцо, что все его правые делители нуля содержатся в радикале Джекобсона $J(A)$ кольца A , то A – правый порядок в цепном справа кольце.*

Доказательства теорем 1, 2 и 3 разбиты на ряд утверждений. Приведем необходимые обозначения и определения. Кольцо A называется *локальным*, если фактор-кольцо $A/J(A)$ является телом (это равносильно тому, что для любого необратимого элемента $a \in A$ элемент $1 - a$ обратим). Непосредственно проверяется, что все цепные справа кольца локальны. Если A – кольцо и M – правый (соответственно левый) A -модуль, то через $N_r(M)$ (соответственно $N_\ell(M)$) обозначается множество всех элементов кольца A аннулирующих ненулевые элементы модуля M ; в частности, $N_r(A)$ и $N_\ell(A)$ – множество всех правых делителей нуля и множество всех левых делителей нуля кольца A соответственно. Ясно, что $N(A) = N_r(A) \cup N_\ell(A)$.

Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Подмодуль N модуля M называется *существенным* (в M), если $N \cap X \neq 0$ для каждого ненулевого подмодуля X модуля M . Через $Z(A_A)$ обозначается множество всех элементов кольца A , правые аннуляторы которых являются существенными правыми идеалами кольца A . Хорошо известно, что $Z(A_A)$ – идеал кольца A (см., например, утверждение 1.28 из [10]); этот идеал называется *правым сингулярным идеалом* кольца A . Правый или левый идеал B кольца A называется *вполне первичным*, если $B \neq A$ и множество $A \setminus B$ мультипликативно замкнуто.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть A – кольцо, $T = T(A)$ и $N = N(A)$. Тогда равносильны следующие условия:*

- (1) A – правый порядок в локальном кольце Q ;
- (2) T – правое множество Оре и N – подполугруппа аддитивной группы A ;
- (3) A – правый порядок в локальном кольце Q , радикал Джекобсона $J(Q)$ кольца Q совпадает с множеством $\bar{N}$ всех нерегулярных элементов кольца Q и N – вполне первичный идеал кольца A , совпадающий с множеством $A \cap J(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) Так как A имеет правое классическое кольцо частных, то T – правое множество Оре. Пусть a и b – нерегулярные элементы кольца A . Тогда a

и b – необратимые элементы кольца Q . Так как кольцо Q локально, то элемент $a + b$ не обратим в Q . Поэтому элемент $a + b$ не регулярен в A и N – подполугруппа аддитивной группы A .

(2) $\Rightarrow$ (3) Так как T – правое множество Оре, то кольцо A имеет правое классическое кольцо частных Q . Пусть q – необратимый элемент кольца Q . Существуют такие элементы $a \in A$ и $t \in T$, что $q = at^{-1}$. Так как элемент q не обратим в Q , то элемент a не регулярен в A . Так как N – подполугруппа аддитивной группы A и сумма нерегулярного элемента $a \in A$ и элемента $t - a$ является регулярным элементом t кольца A , то элемент $t - a$ регулярен в A . Поэтому элемент $t - a$ обратим в Q . Так как $1 - q = 1 - at^{-1} = (t - a)t^{-1}$, то элемент $1 - q$ обратим в Q . Поэтому кольцо Q локально.

Так как Q – локальное кольцо и все регулярные элементы кольца Q обратимы в Q , то $J(Q) = \overline{N}$. Так как $J(Q)$ – вполне первичный идеал кольца Q , то $A \cap J(Q)$ – вполне первичный идеал кольца A . Так как

$$N \subseteq A \cap \overline{N} = A \cap J(Q),$$

то остается доказать, что $A \cap J(Q) \subseteq N$. Пусть a – элемент идеала $A \cap J(Q)$. Элемент a не обратим в Q . Поэтому элемент a не регулярен в A и $a \in N$.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) очевидна.

Для удобства следующие три известные леммы мы приведем с краткими доказательствами.

ЛЕММА 1 [11]. Пусть A – кольцо и M – правый A -модуль. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) M – дистрибутивный модуль;
- (2) для любых элементов x и y модуля M существует такой элемент a кольца A , что элементы xa и $y(1 - a)$ содержатся в пересечении модулей xA и yA .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) Так как M – дистрибутивный модуль, то

$$(x + y)A = (x + y)A \cap (xA + yA) = (x + y)A \cap xA + (x + y)A \cap yA.$$

Поэтому существуют такие элементы a и b кольца A , что

$$x + y = (x + y)b + (x + y)a, \quad (x + y)b \in xA \quad \text{и} \quad (x + y)a \in yA.$$

Тогда

$$yb = (x + y)b - xb \in xA \cap yA \quad \text{и} \quad xa = (x + y)a - ya \in xA \cap yA.$$

Так как $(x + y)(1 - a - b) = 0$, то

$$y(1 - a) = (x + y)(1 - a - b) - x(1 - a - b) + yb = x(a + b - 1) + yb \in xA \cap yA.$$

Поэтому a – требуемый элемент кольца A .

(2) $\Rightarrow$ (1) Пусть X , Y и Z – подмодули модуля M и z – элемент модуля $(X + Y) \cap Z$. Существуют такие элементы $x \in X$ и $y \in Y$, что $z = x + y$. По условию существует

такой элемент a кольца A , что элементы xa и $y(1-a)$ содержатся в модуле $xA \cap yA$. Тогда

$$\begin{aligned} z(1-a) &= x(1-a) + y(1-a) \in xA \cap zA \in X \cap Z, \\ za &= xa + ya \in yA \cap zA \in Y \cap Z, \\ z &= z(1-a) + za \in X \cap Z + Y \cap Z, \\ (X+Y) \cap Z &\subseteq X \cap Z + Y \cap Z \subseteq (X+Y) \cap Z. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2 [10]. Пусть A – кольцо и M – дистрибутивный правый A -модуль. Тогда верны следующие утверждения:

- (1) если x и y – такие элементы модуля M , что $xA \cap yA = 0$, то существует такой элемент a кольца A , что $xa = 0$ и $y(1-a) = 0$;
- (2) если X и Y – такие подмодули модуля M , что $X \cap Y = 0$, то $\text{Hom}(X, Y) = \text{Hom}(Y, X) = 0$;
- (3) для каждого равномерного правого A -модуля N и любых гомоморфизмов $f, g: M \rightarrow N$ подмодули $\text{Ker}(f)$ и $\text{Ker}(g)$ модуля M сравнимы по включению;
- (4) если A – равномерное справа кольцо, то M – равномерный модуль тогда и только тогда, когда для любых элементов x и y модуля M правые аннуляторы $r(x)$ и $r(y)$ сравнимы по включению;
- (5) если A – дистрибутивное справа кольцо, то для любых двух вполне первичных правых идеалов X и Y кольца A верно, что либо $X + Y = A$, либо правые идеалы X и Y сравнимы по включению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из леммы 1.

(2) Пусть $f: xA \rightarrow yA$ – гомоморфизм, x – элемент модуля X и $y \equiv f(x) \in Y$. По (1) существует такой элемент a кольца A , что $xa = 0$ и $y(1-a) = 0$. Тогда $y = ya + y(1-a) = ya = f(xa) = f(0) = 0$. Поэтому $\text{Hom}(X, Y) = 0$.

(3) Допустим противное. Существуют ненулевые элементы $u \in \text{Ker}(g) \setminus \text{Ker}(f)$ и $v \in \text{Ker}(f) \setminus \text{Ker}(g)$. Ненулевые подмодули $f(uA)$ и $g(vA)$ равномерного модуля N имеют ненулевое пересечение. Поэтому существует ненулевой элемент $t \in f(uA) \cap g(vA)$. Существуют такие элементы

$$x \in uA \subseteq \text{Ker}(g) \quad \text{и} \quad y \in vA \subseteq \text{Ker}(f),$$

что

$$t = f(x) = g(y) \neq 0.$$

По лемме 1 существует такой элемент a кольца A , что элементы xa и $y(1-a)$ содержатся в модуле $xA \cap yA \subseteq \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$. Поэтому $ta = f(xa) = 0$ и $t(1-a) = g(y(1-a)) = 0$. Так как $0 \neq t = ta + t(1-a) = 0$, то получаем противоречие.

(4) Докажем импликацию $\Leftarrow$. Пусть x и y – такие элементы модуля M , что $xA \cap yA = 0$. По условию можно считать, что $r(x) \subseteq r(y)$. По (1) существует такой элемент a кольца A , что $a \in r(x) \subseteq r(y)$ и $(1-a) \in r(y)$. Тогда $1 = a + (1-a) \subseteq r(y)$. Поэтому $y = 0$ и M – равномерный модуль.

$\Rightarrow$ Существуют такие гомоморфизмы $f, g: A_A \rightarrow M$, что $f(1) = x$ и $g(1) = y$. По (3) можно считать, что $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(g)$. Так как $\text{Ker}(f) = r(x)$ и $\text{Ker}(g) = r(y)$, то $r(x) \subseteq r(y)$.

(5) Допустим, что правые идеалы X и Y не сравнимы по включению. Тогда существуют элементы $x \in X \setminus Y$ и $y \in Y \setminus X$. По лемме 1 существует такой элемент a кольца A , что $xa \in yA \subseteq Y$ и $y(1-a) \in xA \subseteq X$. Так как правые идеалы X и Y вполне первичны, то $a \in Y$ и $1-a \in X$. Поэтому

$$A = (1-a)A + aA \subseteq X + Y \subseteq A.$$

ЛЕММА 3. (1) Если A – равномерное справа кольцо и N_ℓ – множество всех левых делителей нуля кольца A , то N_ℓ – вполне первичный идеал кольца A , совпадающий с правым сингулярным идеалом $Z(A_A)$ кольца A .

(2) Если X – вполне первичный правый идеал кольца A , содержащийся в $J(A)$, то X – идеал кольца A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как A – равномерное справа кольцо, то каждый ненулевой правый идеал кольца A является существенным. Поэтому $N_\ell(A)$ совпадает с правым сингулярным идеалом $Z(A_A)$ кольца A . В частности, $N_\ell(A)$ – идеал кольца A . Непосредственно проверяется, что $N_\ell(A)$ – вполне первичный идеал.

(2) Пусть x – элемент правого идеала X и a – элемент кольца A . Элемент $1 + axa$ обратим в A , обратимый элемент $(1 + axa)^{-1}$ не содержится во вполне первичном правом идеале X и $(1 + axa)^{-1}(1 + axa)x = x \in X$. Поэтому

$$(1 + axa)x \in X \quad \text{и} \quad (ax)^2 = (1 + axa)x - x \in X.$$

Так как $(ax)^2 \in X$ и X – вполне первичный правый идеал, то $ax \in X$ и X – идеал кольца A .

ЛЕММА 4. Пусть A – кольцо, M – дистрибутивный правый A -модуль и $N_r(M)$ – множество всех элементов кольца A , являющихся правыми аннуляторами ненулевых элементов модуля M . Тогда верны следующие утверждения:

(1) для любых двух множеств $\{X_i\}_{i \in I}$ и $\{Y_j\}_{j \in J}$ подмодулей модуля M выполнено равенство

$$\left(\sum_{i \in I} X_i \right) \cap \left(\sum_{j \in J} Y_j \right) = \sum_{i \in I, j \in J} (X_i \cap Y_j);$$

(2) если X и Y – такие подмодули модуля M , что $X \cap Y = 0$, то существуют такие вполне инвариантные подмодули $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ модуля M , что

$$X \subseteq \overline{X}, \quad Y \subseteq \overline{Y}, \quad \text{Hom}(X, Y) = \text{Hom}(Y, X) = 0$$

(следовательно, M – равномерный модуль тогда и только тогда, когда любые два его вполне инвариантных ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение);

(3) если $1-a \notin N_r(M)$ для каждого элемента $a \in N_r(M)$, то M – равномерный модуль;

(4) если $N_r(M)$ – подполугруппа аддитивной группы A , то M – равномерный модуль;

(5) если $N_r(M) \subseteq J(A)$, то M – равномерный модуль;

(6) если A – равномерное справа кольцо, то следующие три условия эквивалентны:

- а) M – равномерный модуль;
- б) $N_r(M)$ – подполугруппа аддитивной группы A ;
- в) $N_r(M)$ – вполне первичный правый идеал кольца A ;

(7) если A – равномерное справа кольцо и $N_r(M) \subseteq J(A)$, то M – равномерный модуль и $N_r(M)$ – вполне первичный идеал кольца A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) проверяется непосредственно.

(2) Обозначим через $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ вполне инвариантные подмодули $\sum_{g \in \text{End}(M)} g(X)$ и $\sum_{h \in \text{End}(M)} h(Y)$ модуля M соответственно. С использованием (1) и леммы 2(2) непосредственно проверяется, что $\overline{X} \cap \overline{Y} = 0$.

(3) Пусть x – ненулевой элемент модуля M и y – такой элемент модуля M , что $xA \cap yA = 0$. По лемме 2(1) существует такой элемент a кольца A , что $xa = 0$ и $y(1 - a) = 0$. Тогда $a \in N_r(M)$. По условию $1 - a \notin N_r(M)$. Тогда $y = 0$, поскольку $y(1 - a) = 0$. Поэтому M – равномерный модуль.

(4) Пусть a – элемент множества $N_r(M)$. По (3) достаточно доказать, что $1 - a \notin N_r(M)$. Допустим противное. Так как $N_r(M)$ – подполугруппа аддитивной группы A , то $1 = a + (1 - a) \in N_r(M)$. Поэтому $m \cdot 1 = 0$ для некоторого ненулевого элемента m модуля M ; получено противоречие.

(5) Пусть a – элемент множества $N_r(M) \subseteq J(A)$. Тогда элемент $1 - a$ обратим в A . Поэтому $1 - a \notin N_r(M)$. По (3) M – равномерный модуль.

(6) Докажем первую эквивалентность. Импликация б) $\Rightarrow$ а) следует из (4).

а) $\Rightarrow$ б) Пусть b и c – элементы множества $N_r(M)$. Существуют такие ненулевые элементы x и y модуля M , что $b \in r(x)$ и $c \in r(y)$. По лемме 2(4) правые идеалы $r(x)$ и $r(y)$ сравнимы по включению. Без ограничения общности можно считать, что $r(x) \subseteq r(y)$. Тогда $b + c \in r(x) + r(y) = r(y)$. Поэтому $b + c \in N_r(M)$.

Докажем вторую эквивалентность. Импликация в) $\Rightarrow$ б) очевидна. б) $\Rightarrow$ в) Пусть b – элемент множества $N_r(M)$. Существует такой ненулевой элемент x модуля M , что $xb = 0$. Так как $bA \subseteq r(x)$ и $N_r(M)$ – подполугруппа аддитивной группы A , то $N_r(M)$ – правый идеал кольца A .

Допустим, что $b = cd$ для некоторых элементов c и d кольца A и $c \notin N_r(M)$. Тогда $xc \neq 0$ и $(xc)d = xb = 0$. Поэтому $d \in N_r(M)$ и $N_r(M)$ – вполне первичный правый идеал.

(7) По (5) M – равномерный модуль. По (6) $N_r(M)$ – вполне первичный правый идеал кольца A . По лемме 3(2) $N_r(M)$ – идеал кольца A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть A – кольцо, $T = T(A)$, $N = N(A)$ и $N_\ell = N_\ell(A)$. Тогда равносильны следующие условия:

(1) A – правый порядок в цепном справа кольце Q ;

(2) N – левый идеал мультипликативной полугруппы A и для любых элементов a_1 и a_2 кольца A либо существуют такие элементы $b_1 \in A$ и $t_1 \in T$, что $a_1 b_1 = a_2 t_1$, либо существуют такие элементы $b_2 \in A$ и $t_2 \in T$, что $a_2 b_2 = a_1 t_2$;

(3) A – равносильное справа кольцо, являющееся правым порядком в цепном справа кольце Q , радикал Джекобсона $J(Q)$ кольца Q совпадает с множеством $\overline{N}$ всех нерегулярных элементов кольца Q , N – вполне первичный идеал кольца A , совпадающий с множеством $A \cap J(Q)$, N_ℓ – вполне первичный идеал кольца A , совпадающий с правым сингулярным идеалом $Z(A_A)$ кольца A , множество $\overline{N}_r$ всех правых делителей нуля кольца Q является вполне первичным идеалом в Q , множество $\overline{N}_\ell$ всех левых делителей нуля кольца Q является вполне первичным

идеалом в Q , совпадающим с правым сингулярным идеалом $Z(Q_Q)$ кольца Q , и $\overline{N}_\ell = N_\ell Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) По предположению 1 N – идеал кольца A . Пусть a_1 и a_2 – элементы кольца A . Так как A – правый порядок в цепном справа кольце Q , то либо существуют такие элементы $b_1 \in A$ и $t_1 \in T$, что $a_1 b_1 t_1^{-1} = a_2$, либо существуют такие элементы $b_2 \in A$ и $t_2 \in T$, что $a_2 b_2 t_2^{-1} = a_1$. Поэтому выполняется условие (2).

(2) $\Rightarrow$ (3) Докажем, что A имеет правое классическое кольцо частных Q . Достаточно доказать, что $aT \cap tA \neq \emptyset$ для любого элемента a кольца A и каждого элемента t множества T . По условию либо существуют такие элементы $b_1 \in A$ и $t_1 \in T$, что $tb_1 = at_1$, либо существуют такие элементы $b_2 \in A$ и $t_2 \in T$, что $ab_2 = tt_2$. В первом случае $tb_1 = at_1 \in aT \cap tA \neq \emptyset$. Допустим, что $ab_2 = tt_2 \in T$. Если $b_2 \in T$, то $ab_2 \in aT \cap tA \neq \emptyset$. Допустим, что $b_2 \in A \setminus T = N$. Так как N – левый идеал мультипликативной полугруппы A , то $ab_2 = tt_2 \in N \cap T = \emptyset$; получено противоречие. Поэтому A имеет правое классическое кольцо частных Q .

Пусть q_1 и q_2 – элементы кольца Q . Существуют такие элементы $a_1, a_2 \in A$ и $t \in T$, что $q_1 = a_1 t^{-1}$ и $q_2 = a_2 t^{-1}$. По условию либо существуют такие элементы $b_1 \in A$ и $t_1 \in T$, что $a_1 b_1 = a_2 t_1$, либо существуют такие элементы $b_2 \in A$ и $t_2 \in T$, что $a_2 b_2 = a_1 t_2$. В первом случае

$$q_2 = a_2 t_1 t^{-1} \in a_1 b_1 Q \subseteq q_1 Q.$$

Аналогично, $q_1 \in q_2 Q$ во втором случае. Поэтому Q – цепное справа кольцо. В частности, кольцо Q локально. По предположению 1 $J(Q) = \overline{N}$ и N – вполне первичный идеал кольца A , совпадающий с множеством $A \cap J(Q)$. Так как A – правый порядок в цепном справа кольце Q , то непосредственно проверяется, то A – равномерное справа кольцо.

Так как A и Q – равномерные справа кольца, то из леммы 3(1) следует, что N_ℓ – вполне первичный идеал кольца A , совпадающий с $Z(A_A)$, и $\overline{N}_\ell$ – вполне первичный идеал кольца Q , совпадающий с $Z(Q_Q)$. Поэтому $N_\ell Q \subseteq \overline{N}_\ell$. Пусть s_1 – элемент множества $\overline{N}_\ell$. Тогда $s_1 s_2 = 0$ для некоторого ненулевого элемента s_2 кольца Q . Существуют такие элементы $c_1, c_2 \in A$ и $u_1, u_2 \in T$, что $s_1 = c_1 u_1^{-1}$ и $s_2 = c_2 u_2^{-1} \neq 0$. Существуют такие элементы $d \in A$ и $v \in T$, что $u_1^{-1} c_2 u_2^{-1} = dv^{-1}$. Так как $s_2 \neq 0$, то $d \neq 0$. Тогда $c_1 d = c_1 dv^{-1} v = s_1 s_2 v = 0$ и $c_1 \in N_\ell$. Поэтому

$$\overline{N}_\ell \subseteq N_\ell Q \subseteq \overline{N}_\ell.$$

По лемме 4(7) $\overline{N}_r$ – вполне первичный идеал кольца Q .

Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) очевидна.

ЛЕММА 5. Пусть A – дистрибутивное справа кольцо. Тогда верны следующие утверждения:

(1) если X и Y – такие правые идеалы кольца A , что $X \cap Y = 0$, то

$$(AXA) \cap (AYA) = 0, \quad (AXA)(AYA) = (AYA)(AXA) = 0$$

(следовательно, если A – первичное кольцо, то A – равномерное справа кольцо);

(2) если B – вполне первичный левый идеал кольца A , то для любых элементов $x \in A$ и $y \in A \setminus B$ существуют такие элементы $x' \in A$ и $y \in A \setminus B$, что $xy' = yx'$;

(3) если B – вполне первичный левый идеал кольца A и каждый элемент множества $A \setminus B$ регулярен в A , то $A \setminus B$ – правое множество Оре в A и A – подкольцо некоторого цепного справа кольца Q являющегося правым кольцом частных относительно множества $A \setminus B$;

(4) если множество $N(A)$ всех нерегулярных элементов кольца A является левым идеалом кольца A , то A – правый порядок в цепном справа кольце;

(5) если X – вполне первичный правый идеал кольца A , содержащийся в $J(A)$, то X – идеал кольца A и $X = yX \subseteq yA$ для каждого элемента $y \in A \setminus X$ (поэтому X сравним по включению с любым правым идеалом кольца A).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По лемме 4(2) $(AXA) \cap (AYA) = 0$. Возьмем любые элементы $z \in X$ и $y \in Y$. Обозначим через x элемент $zy \in X$. Достаточно доказать, что $x = 0$. Так как $xA \cap yA \subseteq X \cap Y = 0$, то из леммы 2(1) следует, что существует такой элемент a кольца A , что $xa = 0$ и $y(1 - a) = 0$. Поэтому

$$x = xa + x(1 - a) = x(1 - a) = zy(1 - a) = 0.$$

(2) По лемме 1 существуют такие элементы a, c и d кольца A , что $xa = yc$ и $y(1 - a) = xd$. Если $a \in A \setminus B$, то можно положить $y' \equiv a$ и $x' \equiv c$. Поэтому можно считать, что $a \in B$. Тогда $1 - a \in A \setminus B$ и $xd = y(1 - a) \in A \setminus B$. Так как B – левый идеал, то $d \in A \setminus B$. В этом случае можно положить $y' \equiv d$ и $x' \equiv 1 - a$.

(3) По (2) кольцо A имеет правое кольцо частных Q относительно множества $A \setminus B$. Остается доказать, что для любых элементов q_1 и q_2 кольца Q верно, что либо $q_1 \in q_2Q$, либо $q_2 \in q_1Q$. Существуют такие элементы $x_1, x_2 \in A$ и $t \in A \setminus B$, что $q_1 = x_1t^{-1}$ и $q_2 = x_2t^{-1}$. По лемме 1 существует такой элемент a кольца A , что $x_1a \in x_2A$ и $x_2(1 - a) \in x_1A$. Множество $A \setminus B$ содержит хотя бы один из элементов a и $1 - a$. Можно считать, что $a \in A \setminus B$. Тогда a – обратимый элемент кольца Q . Поэтому

$$q_1 = x_1t^{-1} = x_1a \cdot a^{-1}t^{-1} \in x_2Aa^{-1}t^{-1} \subseteq x_2Q = q_2Q.$$

(4) Это следует из (3) и того, что произведение любых двух регулярных элементов является регулярным элементом.

(5) По лемме 3(2) X – идеал кольца A . Пусть $y \in A \setminus X$. По лемме 1 существует такой элемент z кольца A , что $xz \in yA$ и $y(1 - z) \in xA \subseteq X$. Так как X – вполне первичный правый идеал кольца A и $y \in A \setminus X$, то $1 - z \in X \subseteq J(A)$. Поэтому z – обратимый элемент и $x = xzz^{-1} \in yA$. Тогда $x = yb$ для некоторого элемента b кольца A . Так как X – вполне первичный идеал и $y \in A \setminus X$, то $b \in X$. Поэтому $x = yb \in yX$ и $X \subseteq yX \subseteq X$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть A – дистрибутивное справа кольцо. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) любые два ненулевых идеала кольца A имеют ненулевое пересечение;
- (2) A – равномерное справа кольцо;
- (3) $N_r(A)$ – подполугруппа аддитивной группы A ;
- (4) $N_r(A)$ – вполне первичный правый идеал кольца A , $N_\ell(A)$ – вполне первичный идеал кольца A , $N_\ell(A)$ совпадает с правым сингулярным идеалом $Z(A_A)$ кольца A и либо $N_r(A) + N_\ell(A) = A$, либо правый идеал $N_r(A)$ и идеал $N_\ell(A)$ сравнимы по включению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (1) и (2) следует из леммы 5(1).

(2) $\Rightarrow$ (4) По лемме 4(6) $N_r(A)$ – вполне первичный правый идеал. Так как A – равномерное справа кольцо, то каждый ненулевой правый идеал кольца A является существенным. Поэтому $N_\ell(A)$ совпадает с правым сингулярным идеалом $Z(A_A)$ кольца A . В частности, $N_\ell(A)$ – идеал кольца A . Непосредственно проверяется, что $N_\ell(A)$ – вполне первичный идеал. По лемме 2(5) либо $N_r(A) + N_\ell(A) = A$, либо правый идеал $N_r(A)$ и идеал $N_\ell(A)$ сравнимы по включению.

Импликация (4) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (2) следует из леммы 4(4).

ЛЕММА 6. Пусть A – такое дистрибутивное справа кольцо, что для каждого правого делителя нуля $a \in A$ элемент $1 - a$ регулярен в A . Тогда верны следующие утверждения:

(1) A – равномерное справа кольцо и $N_r(A) + N_\ell(A) \neq A$;

(2) $N_r(A)$ и $N(A)$ – вполне первичные правые идеалы кольца A , $N_\ell(A)$ – вполне первичный идеал кольца A , правый идеал $N_r(A)$ и идеал $N_\ell(A)$ сравнимы по включению и либо $N(A) = N_r(A) \supseteq N_\ell(A)$, либо $N(A)$ – идеал кольца A и $N(A) = N_\ell(A) \supseteq N_r(A)$;

(3) если $AN_r(A) \subseteq N(A)$, то A – правый порядок в цепном справа кольце.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Если $a \in N_r(A)$, то $1 - a \notin N_\ell(A)$ по условию. Поэтому $N_r(A) + N_\ell(A) \neq A$.

Пусть x – ненулевой элемент кольца A и y – такой элемент кольца A , что $xA \cap yA = 0$. По лемме 2(1) существует такой элемент a кольца A , что $xa = 0$ и $y(1 - a) = 0$. Тогда $a \in N_r(A)$ и по условию $1 - a$ – регулярный элемент кольца A . Так как $y(1 - a) = 0$, то $y = 0$. Поэтому A – равномерное справа кольцо.

(2) Этот пункт следует из (1) и предложения 3.

(3) Так как $AN_r(A) \subseteq N(A)$, то из (2) следует, что $N(A)$ – вполне первичный идеал. По лемме 5(4) A – правый порядок в цепном справа кольце.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть A – дистрибутивное справа кольцо. Тогда равносильны следующие условия:

(1) A – правый порядок в цепном справа кольце Q ;

(2) множество $N(A)$ является левым идеалом кольца A ;

(3) $N(A)$ и $N_\ell(A)$ – вполне первичные идеалы кольца A , $N_r(A)$ – вполне первичный правый идеал кольца A , правый идеал $N_r(A)$ и идеал $N_\ell(A)$ сравнимы по включению и либо $N(A) = N_r(A) \supseteq N_\ell(A)$, либо $N(A) = N_\ell(A) \supseteq N_r(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) Так как Q – локальное кольцо, являющееся правым классическим кольцом частных кольца A , то $J(Q)$ является множеством всех необратимых элементов кольца Q и $J(Q)$ совпадает с множеством $N(Q)$ всех нерегулярных элементов кольца Q . Пусть x и y – нерегулярные элементы кольца A и a – элемент кольца A . Тогда $x, y \in N(A) \subseteq N(Q) = J(Q)$. Поэтому $x + y$ и ax содержатся в $J(Q)$. Тогда элементы $x + y$ и ax не обратимы в Q . Поэтому элементы $x + y$ и ax не регуляры в A .

(2) $\Rightarrow$ (3) Так как сумма любых двух нерегулярных элементов кольца A является нерегулярным элементом, то для каждого правого делителя нуля a кольца A элемент $1 - a$ регулярен в A . Поэтому утверждение следует из леммы 6(2).

Импликация $(3) \Rightarrow (1)$ следует из леммы 6(3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть A – такое дистрибутивное справа кольцо, что множество $N_r(A)$ содержится в $J(A)$. Тогда A – правый порядок в цепном справа кольце Q , все множества $N(A)$, $N_r(A)$ и $N_\ell(A)$ являются вполне первичными идеалами кольца A , $N_r(A) = yN_r(A) \subset yA$ для каждого элемента $y \in A \setminus N_r(A)$, идеалы $N_r(A)$ и $N_\ell(A)$ сравнимы по включению и либо $N(A) = N_r(A) \supseteq N_\ell(A)$, либо $N(A) = N_\ell(A) \supseteq N_r(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 6(2) $N_r(A)$ – вполне первичный правый идеал кольца A . Кроме того, $N_r(A) \subseteq J(A)$ по условию. По лемме 5(5) $N_r(A)$ – идеал кольца A и $X = yX \subset yA$ для каждого элемента $y \in A \setminus X$. По лемме 6(3) A – правый порядок в цепном справа кольце Q . Оставшиеся утверждения следуют из предложения 4.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМ 1–3. Теорема 1 следует из предложения 2. Теорема 2 следует из предложения 4. Теорема 3 следует из предложения 5.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dubrovin N. I. The Rational Closure of Group Rings of Leftordered Groups. Gerhard Mercator Universität Duisburg Gesamthochschule, 1994.
- [2] Bessenrodt K., Brungs H. H., Törner G. Right Chain Rings. Part 1. Schriftenreihe des Fachbereich Mathematik. Universität Duisburg, 1990.
- [3] Bessenrodt K., Brungs H. H., Törner G. Right Chain Rings. Parts 2a и 2b. Schriftenreihe des Fachbereich Mathematik. Universität Duisburg, 1992.
- [4] Дубровин Н. И. Цепные области // Вестн. МГУ. Сер. матем., мех. 1980. № 1. С. 51–54.
- [5] Дубровин Н. И. О цепных кольцах // УМН. 1982. Т. 37. № 4. С. 139–140.
- [6] Behrens E. A. Ring Theory. New York: Academic Press, 1972.
- [7] Кон П. Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1975.
- [8] Tuganbaev A. A. Semidistributive Modules and Rings. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [9] Tuganbaev A. A. Distributive Modules and Related Topics. Amsterdam: Gordon and Breach, 1999.
- [10] Stephenson W. Modules whose lattice of submodules is distributive // Proc. London Math. Soc. 1974. V. 28. № 2. P. 291–310.
- [11] Menzel W. Über den Untergruppenverband einer Abelschen Operatorgruppe. Teil II. Distributive und M-Verbande von Untergruppen einer Abelschen Operatorgruppe // Math. Z. 1960. V. 74. № 1. P. 52–65.

Московский энергетический институт
(технический университет)
E-mail: askar@tuganbaev.mccme.ru

Поступило
28.07.2001