Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Владимиров, Оценки числа собственных значений
самосопряженных оператор-функций, *Матем. заметки*,
2003, том 74, выпуск 6, 838–847

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm321>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 16:49:55

ОЦЕНКИ ЧИСЛА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

А. А. Владимиров

Рассматривается определенная на отрезке $[\sigma, \tau] \subset \mathbb{R}$ оператор-функция F , значениями которой являются полуограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. С оператор-функцией F связываются величины $\mathcal{N}_F$ и $\nu_F(\lambda)$, представляющие собой, соответственно, число собственных значений оператор-функции F на полуинтервале $[\sigma, \tau)$ и число отрицательных собственных значений оператора $F(\lambda)$ при произвольном $\lambda \in [\sigma, \tau]$. Устанавливаются условия, при которых справедлива оценка $\mathcal{N}_F \geq \nu_F(\tau) - \nu_F(\sigma)$. Также устанавливаются условия, при которых справедливо равенство $\mathcal{N}_F = \nu_F(\tau) - \nu_F(\sigma)$. Полученные результаты применяются к обыкновенным дифференциальным оператор-функциям на конечном отрезке.

Библиография: 7 названий.

1. Общие утверждения

Пусть F есть определенная на отрезке $[\sigma, \tau] \subset \mathbb{R}$ оператор-функция, значениями которой являются самосопряженные операторы с компактной резольвентой в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. В дальнейшем будет предполагаться выполнение следующих двух условий:

- (а) операторы $F(\lambda)$ равномерно по $\lambda \in [\sigma, \tau]$ ограничены снизу;
- (б) оператор-функция V , удовлетворяющая тождеству

$$V(\lambda) \equiv (F(\lambda) - i)^{-1}$$

(здесь i – мнимая единица), непрерывна на отрезке $[\sigma, \tau]$ в смысле равномерной операторной топологии.

Через $\mathcal{N}_F$ будет в дальнейшем обозначаться сосчитанное с учетом кратности число собственных значений оператор-функции F , лежащих на полуинтервале $[\sigma, \tau)$. При этом, как обычно, под *собственным значением кратности m* оператор-функции F понимается число $\lambda \in [\sigma, \tau]$, для которого $\dim \ker F(\lambda) = m$.

Через $\nu_F(\lambda)$ будет в дальнейшем обозначаться сосчитанное с учетом кратности число отрицательных собственных значений оператора $F(\lambda)$.

Целью текущего раздела является изучение вопроса о связи между величинами $\nu_F(\lambda)$ и $\mathcal{N}_F$.

1.1. Случай без дополнительных ограничений на оператор-функцию F . Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (а) и (б). Тогда имеет место неравенство

$$\mathcal{N}_F \geq \nu_F(\tau) - \nu_F(\sigma).$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующая вспомогательная последовательность числовых функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Через Λ_m , $m = 1, 2, \dots$, будут обозначаться определенные на отрезке $[\sigma, \tau]$ числовые функции со следующим свойством: при любом $\lambda \in [\sigma, \tau]$ число $\Lambda_m(\lambda)$ есть m -ое снизу (с учетом кратности) собственное значение оператора $F(\lambda)$.

При выполнении условий (а) и (б) определение 1 корректно, поскольку тогда операторы $F(\lambda)$ ограничены снизу и имеют чисто дискретный спектр.

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия (а) и (б). Тогда каждая из функций Λ_m непрерывна на всем отрезке $[\sigma, \tau]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем вещественное число C , для которого оператор $F(\lambda) - C$ будет положителен независимо от выбора $\lambda \in [\sigma, \tau]$. Такое C существует в силу предположения (а).

Обозначим через $\Theta_{m,C}$ определенные на отрезке $[\sigma, \tau]$ числовые функции, которые любому $\lambda \in [\sigma, \tau]$ ставят в соответствие m -ое сверху (с учетом кратности) собственное значение оператора $(F(\lambda) - C)^{-1}$. Из предположения (б) следует, что оператор-функция $(F - C)^{-1}$ непрерывна на отрезке $[\sigma, \tau]$ в смысле равномерной операторной топологии. Поэтому числовые функции $\Theta_{m,C}$ непрерывны на отрезке $[\sigma, \tau]$ (см., например, теорему [1, с. 257]). Однако для выбранного числа C справедливы тождества

$$\Theta_{m,C}(\lambda) \equiv \frac{1}{\Lambda_m(\lambda) - C}.$$

Следовательно, функции Λ_m непрерывны на отрезке $[\sigma, \tau]$. Тем самым, лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Непосредственно из определения величин $\nu_F(\lambda)$ и функций Λ_m следует, что не менее $\nu_F(\tau) - \nu_F(\sigma)$ функций из последовательности Λ_m принимают неотрицательное значение в точке σ и отрицательное – в точке τ . Из утверждаемой леммой 1 непрерывности функций Λ_m потому следует, что не менее $\nu_F(\tau) - \nu_F(\sigma)$ функций из последовательности Λ_m имеют нуль на полуинтервале $[\sigma, \tau)$. Утверждение теоремы теперь немедленно получается из определения функций Λ_m .

1.2. Случай монотонности оператор-функции F . При формулировке следующих утверждений будет использоваться понятие замыкания квадратичной формы. Определение этого понятия можно найти в [2, гл. VI]. Кроме того, при формулировке следующих утверждений будет предполагаться выполнение такого условия:

- (в) пусть определенная на отрезке $[\sigma, \tau]$ функция f , значениями которой являются квадратичные формы в пространстве $\mathfrak{H}$, такова, что при любом $\lambda \in [\sigma, \tau]$ квадратичная форма $f(\lambda)$ есть замыкание определенной на $\text{dom } F(\lambda)$ квадратичной формы $\langle F(\lambda) \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{H}}$; тогда область определения квадратичной формы $f(\lambda)$ не зависит от выбора значения $\lambda \in [\sigma, \tau]$.

Ниже не зависящая от выбора $\lambda \in [\sigma, \tau]$ область определения квадратичной формы $f(\lambda)$ будет обозначаться через $\text{dom } f$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (а)–(в). Пусть также при любых $\lambda_1, \lambda_2 \in [\sigma, \tau]$, удовлетворяющих неравенству $\lambda_1 < \lambda_2$, определенная на линейном подпространстве $\text{dom } f$ квадратичная форма

$$f(\lambda_1) - f(\lambda_2)$$

является положительной. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{N}_F = \nu_F(\tau) - \nu_F(\sigma).$$

Доказательство теоремы 2 опирается на следующее приводимое без доказательства утверждение, представляющее собой простое следствие известного вариационного принципа [3, гл. 1, теорема 13^{bis}].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть T есть ограниченный снизу самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, спектр которого чисто дискретен на луче $(-\infty, 0)$. Пусть t есть замыкание определенной на линейном подпространстве $\text{dom } T$ квадратичной формы $\langle T \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{H}}$. Тогда число отрицательных собственных значений оператора T равно максимуму размерностей подпространств $\mathfrak{M} \subset \text{dom } t$, на которых квадратичная форма t отрицательна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Зафиксируем произвольное число $m \in \mathbb{N}$, а также произвольные числа $\lambda_1, \lambda_2 \in [\sigma, \tau]$, удовлетворяющие неравенству $\lambda_1 < \lambda_2$. Очевидно, что найдется m -мерное подпространство $\mathfrak{M} \subset \text{dom } F(\lambda_1)$, на котором квадратичная форма оператора $F(\lambda_1) - \Lambda_m(\lambda_1)$ будет неположительна. Однако при выполнении условий теоремы указанное подпространство $\mathfrak{M}$ будет подпространством области определения квадратичной формы $f(\lambda_2)$, причем квадратичная форма

$$f(\lambda_2) - \Lambda_m(\lambda_1) \parallel \cdot \parallel_{\mathfrak{H}}^2$$

будет на подпространстве $\mathfrak{M}$ отрицательна. Из утверждения 1 теперь немедленно вытекает справедливость неравенства $\Lambda_m(\lambda_2) < \Lambda_m(\lambda_1)$.

Ввиду произвольности выбора чисел m , λ_1 и λ_2 , сказанное означает, что каждая из функций Λ_m строго убывает на отрезке $[\sigma, \tau]$.

Однако из непрерывности и строгого убывания функций Λ_m следует, что величина $\mathcal{N}_F$ в точности равна числу таких функций из последовательности Λ_m , которые принимают неотрицательное значение в точке σ и отрицательное – в точке τ . Поскольку число таких функций есть $\nu_F(\tau) - \nu_F(\sigma)$, то утверждение теоремы справедливо.

1.3. Случай отрицательности типа собственных значений оператор-функции F . Содержание следующего утверждения тесно связано с известным в теории операторных пучков понятием *типа собственного значения*.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (а)–(в). Пусть также некоторая определенная на отрезке $[\sigma, \tau]$ функция f' , значениями которой являются квадратичные формы в пространстве $\mathfrak{H}$, обладает следующими свойствами:

- 1) при любом $\lambda \in [\sigma, \tau]$ область определения квадратичной формы $f'(\lambda)$ является линейное подпространство $\text{dom } f$;
- 2) квадратичные формы $f'(\lambda)$ равномерно по $\lambda \in [\sigma, \tau]$ ограничены относительно произвольной нормы $\|\cdot\|_{\mathfrak{F}}$, превращающей $\text{dom } f$ в банахово пространство;
- 3) при любом $y \in \text{dom } f$ числовая функция Φ_y , удовлетворяющая на отрезке $[\sigma, \tau]$ тождеству

$$\Phi_y(\lambda) \equiv f(\lambda)[y],$$

является непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет тождеству

$$\Phi'_y(\lambda) \equiv f'(\lambda)[y];$$

- 4) для любой собственной пары $\{\lambda, y\}$ оператор-функции F справедливо неравенство $f'(\lambda)[y] < 0$.

Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{N}_F = \nu_F(\tau) - \nu_F(\sigma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $\lambda_0 \in [\sigma, \tau]$ – произвольные числа, удовлетворяющие равенству $\Lambda_m(\lambda_0) = 0$.

В силу предположения (а) найдется вещественное число C , для которого квадратичная форма $f(\lambda_0) - C\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}^2$ мажорирует квадратичную форму $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}^2$. Нетрудно убедиться, что для такого C линейное пространство $\text{dom } f$ полно относительно нормы

$$\|y\|_{\mathfrak{F}} := \sqrt{f(\lambda_0)[y] - C\|y\|_{\mathfrak{H}}^2}. \quad (1)$$

В дальнейшем гильбертово пространство, заданное на $\text{dom } f$ нормой (1), будет обозначаться через $\mathfrak{F}$.

Заметим, что при любом $\lambda \in [\sigma, \tau]$ квадратичная форма $f(\lambda)$ ограничена относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathfrak{F}}$. Действительно, поскольку норма $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ мажорируется нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{F}}$, то из полуограниченности квадратичной формы $f(\lambda)$ относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ следует, что квадратичная форма $f(\lambda)$ полуограничена относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathfrak{F}}$. Однако ограниченность всюду определенной полуограниченной квадратичной формы есть несложное следствие теоремы о замкнутом графике (см., например, [2, гл. III, теорема 5.20]).

Сказанное означает, что тождество

$$\langle (1 + K(\lambda))y, y \rangle_{\mathfrak{F}} \equiv f(\lambda)[y]$$

определяет оператор-функцию K , значениями которой являются ограниченные самосопряженные операторы в пространстве $\mathfrak{F}$. При этом, как следует из компактности резольвенты оператора $F(\lambda_0)$, оператор $K(\lambda_0)$ является компактным. Из свойств функции f' следует также, что оператор-функция K является дифференцируемой в смысле

равномерной операторной топологии, причем ее производная K' удовлетворяет тождеству

$$\langle K'(\lambda)y, y \rangle_{\mathfrak{F}} \equiv f'(\lambda)[y],$$

и операторы $K'(\lambda)$ равномерно по $\lambda \in [\sigma, \tau]$ ограничены.

Шаг 2. Разложим пространство $\mathfrak{F}$ в прямую сумму

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_- \oplus \mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{F}_+,$$

где

$\mathfrak{F}_-$ есть инвариантное подпространство оператора $K(\lambda_0)$, отвечающее той части его спектра, которая лежит на луче $(-\infty, -1)$;

$\mathfrak{F}_0$ есть инвариантное подпространство оператора $K(\lambda_0)$, отвечающее собственному значению -1 ;

$\mathfrak{F}_+$ есть инвариантное подпространство оператора $K(\lambda_0)$, отвечающее той части его спектра, которая лежит на луче $(-1, +\infty)$.

Из компактности оператора $K(\lambda_0)$ следует существование такого $\varepsilon > 0$, для которого на подпространстве $\mathfrak{F}_-$ справедливы оценки

$$\langle K(\lambda_0)y, y \rangle_{\mathfrak{F}} \leq (-1 - \varepsilon)\|y\|_{\mathfrak{F}}^2, \quad (2)$$

а на подпространстве $\mathfrak{F}_+$ справедливы оценки

$$\langle K(\lambda_0)y, y \rangle_{\mathfrak{F}} \geq (-1 + \varepsilon)\|y\|_{\mathfrak{F}}^2. \quad (3)$$

Однако из условий теоремы и из первой теоремы о представлении (см. [2, гл. VI, теорема 2.1]) следует, что для любого ненулевого вектора $y \in \mathfrak{F}_0$ выполняется неравенство

$$\langle K'(\lambda_0)y, y \rangle_{\mathfrak{F}} < 0.$$

Поэтому из оценки (2) и конечномерности подпространства $\mathfrak{F}_-$ следует, что найдется правая проколота полуокрестность $\mathcal{U}^+(\lambda_0)$ точки λ_0 такая, что для любого $\lambda \in \mathcal{U}^+(\lambda_0) \cap [\sigma, \tau]$ квадратичная форма оператора $1 + K(\lambda)$ будет отрицательна на подпространстве $\mathfrak{F}_- \oplus \mathfrak{F}_0$. Аналогично, из оценки (3) и равномерной ограниченности операторов $K'(\lambda)$ следует, что найдется левая проколота полуокрестность $\mathcal{U}^-(\lambda_0)$ точки λ_0 такая, что для любого $\lambda \in \mathcal{U}^-(\lambda_0) \cap [\sigma, \tau]$ квадратичная форма оператора $1 + K(\lambda)$ будет положительна на подпространстве $\mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{F}_+$.

Заметим теперь, что подпространство $\mathfrak{F}_- \oplus \mathfrak{F}_0$ имеет размерность $\geq m$. Поэтому из определения оператор-функции K и утверждения 1 следует, что при любом

$$\lambda \in \mathcal{U}^+(\lambda_0) \cap [\sigma, \tau]$$

справедливо неравенство $\Lambda_m(\lambda) < 0$. Аналогично, подпространство $\mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{F}_+$ имеет коразмерность $< m$. Поэтому при любом

$$\lambda \in \mathcal{U}^-(\lambda_0) \cap [\sigma, \tau]$$

справедливо неравенство $\Lambda_m(\lambda) \geq 0$.

Шаг 3. Результаты предыдущего шага можно резюмировать следующим образом: *каковы бы ни были $m \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in [\sigma, \tau]$, удовлетворяющие равенству $\Lambda_m(\lambda) = 0$, функция Λ_m неотрицательна в некоторой левой полукрестности точки λ и отрицательна в некоторой правой проколотой полукрестности точки λ* . Поскольку любая из функций Λ_m непрерывна в силу леммы 1, то эти результаты означают, что любая из функций Λ_m строго убывает в каждом из своих нулей. Отсюда, в свою очередь, следует, что каждая из функций Λ_m имеет не более одного нуля, слева от которого она принимает только положительные, а справа – только отрицательные значения.

Повторяя теперь рассуждения, завершающие доказательство теоремы 2, убеждаемся в справедливости утверждения доказываемой теоремы.

2. Применение к дифференциальным оператор-функциям

Рассмотрим теперь определенную на отрезке $[\sigma, \tau] \subset \mathbb{R}$ оператор-функцию S , значениями которой являются самосопряженные операторы в пространстве $L_2[a, b]$, заданные дифференциальным выражением

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} (p_k(x, \lambda) y^{(n-k)}(x))^{(n-k)} \quad (4)$$

и краевыми условиями

$$(U(\lambda) - 1)y^\vee + i(U(\lambda) + 1)y^\wedge = 0. \quad (5)$$

Здесь и далее предполагается выполнение следующих условий:

- (1) вещественные функции p_k , $k = 0, \dots, n$, непрерывны на прямоугольнике $[a, b] \times [\sigma, \tau]$;
- (2) функция p_0 положительна на прямоугольнике $[a, b] \times [\sigma, \tau]$;
- (3) при любом фиксированном $\lambda \in [\sigma, \tau]$ справедливы включения

$$p_k(\cdot, \lambda) \in C^{n-k}[a, b], \quad k = 0, \dots, n;$$

- (4) матрица-функция U , значениями которой являются унитарные комплексные матрицы порядка $2n$, непрерывна на отрезке $[\sigma, \tau]$.

Через $y^\wedge$ и $y^\vee$ в (5) обозначены векторы

$$y^\wedge := \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(a) \\ y(b) \\ y'(b) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(b) \end{pmatrix}, \quad y^\vee := \begin{pmatrix} y^{[2n-1]}(a) \\ y^{[2n-2]}(a) \\ \dots \\ y^{[n]}(a) \\ -y^{[2n-1]}(b) \\ -y^{[2n-2]}(b) \\ \dots \\ -y^{[n]}(b) \end{pmatrix}$$

(ср. с [4, формула (7.50)]). Здесь $y^{[n+m]}(x)$ суть обычные сокращения

$$y^{[n+m]}(x) := \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} (p_k(x, \lambda) y^{(n-k)}(x))^{(m-k)}, \quad m = 0, \dots, n$$

(ср. с [5, § 15, формула (3)] и [4, формула (7.46)]).

Из теоремы [4, теорема 7.5] следует, что значениями оператор-функции S , заданной посредством (4), (5), являются самосопряженные операторы.

2.1. Свойства оператор-функции S . Заданная посредством (4), (5) оператор-функция S обладает следующими свойствами.

ЛЕММА 2. Пусть A есть матрица-функция, удовлетворяющая тождеству

$$A(\lambda) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{z+1}{z-1} \cdot (U(\lambda) - z)^{-1} dz, \quad (6)$$

где U есть матрица-функция из краевых условий (5), а $\Gamma(\lambda)$ есть произвольный положительно ориентированный контур, внутренность которого не содержит точку 1, но содержит все отличные от 1 собственные значения матрицы $U(\lambda)$.

Тогда при любом $\lambda \in [\sigma, \tau]$ для любой функции $y \in \text{dom } S(\lambda)$ справедливо равенство

$$\langle S(\lambda)y, y \rangle_{L_2[a, b]} = \sum_{k=0}^n \int_a^b p_k(x, \lambda) |y^{(n-k)}(x)|^2 dx + \langle A(\lambda)y^\wedge, y^\wedge \rangle_{\mathbb{C}^{2n}}. \quad (7)$$

ЛЕММА 3. Если матрица-функция U такова, что числовая функция $\text{rank}(U-1)$ постоянна на отрезке $[\sigma, \tau]$, то операторы $S(\lambda)$ равномерно по $\lambda \in [\sigma, \tau]$ ограничены снизу.

ЛЕММА 4. Оператор-функция V , удовлетворяющая тождеству

$$V(\lambda) \equiv (S(\lambda) - i)^{-1},$$

непрерывна на отрезке $[\sigma, \tau]$ в смысле равномерной операторной топологии.

ЛЕММА 5. При любом $\lambda \in [\sigma, \tau]$ замыканием определенной на линейном подпространстве $\text{dom } S(\lambda)$ квадратичной формы $\langle S(\lambda)\cdot, \cdot \rangle_{L_2[a, b]}$ является квадратичная форма $\mathfrak{s}(\lambda)$ с областью определения

$$\{y \in L_2[a, b] \mid y \in W_2^n[a, b], y^\wedge \perp \ker(U(\lambda) - 1)\},$$

удовлетворяющая тождеству

$$\mathfrak{s}(\lambda)[y] \equiv \sum_{k=0}^n \int_a^b p_k(x, \lambda) |y^{(n-k)}(x)|^2 dx + \langle A(\lambda)y^\wedge, y^\wedge \rangle_{\mathbb{C}^{2n}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. При помощи интегрирования по частям нетрудно установить справедливость тождества

$$\langle S(\lambda)y, y \rangle_{L_2[a, b]} \equiv \sum_{k=0}^n \int_a^b p_k(x, \lambda) |y^{(n-k)}(x)|^2 dx + \langle y^\vee, y^\wedge \rangle_{\mathbb{C}^{2n}}.$$

Поэтому лемма будет доказана, если будет установлено, что для любых векторов $Y, Z \in \mathbb{C}^{2n}$, удовлетворяющих условию

$$(U(\lambda) - 1)Z + i(U(\lambda) + 1)Y = 0, \quad (8)$$

выполняется равенство

$$\langle Z, Y \rangle_{\mathbb{C}^{2n}} = \langle A(\lambda)Y, Y \rangle_{\mathbb{C}^{2n}}. \quad (9)$$

Заметим, что условие (8) можно переписать в параметрической форме

$$\begin{aligned} Y &= (U(\lambda) - 1)X, \\ Z &= -i(U(\lambda) + 1)X, \\ X &\in \mathbb{C}^{2n}. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом левая часть предполагаемого равенства (9) оказывается равна скалярному произведению

$$\langle B(\lambda)X, X \rangle_{\mathbb{C}^{2n}},$$

где через $B(\lambda)$ обозначена матрица

$$B(\lambda) := -i(U^{-1}(\lambda) - 1) \cdot (U(\lambda) + 1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} (z^{-1} - 1) \cdot (z + 1) \cdot (U(\lambda) - z)^{-1} dz.$$

Здесь Γ_1 есть положительно ориентированная граница кольца

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)\}, \quad \varepsilon < 1.$$

С другой стороны, правая часть предполагаемого равенства (9) оказывается равна скалярному произведению

$$\langle B^+(\lambda)X, X \rangle_{\mathbb{C}^{2n}},$$

где через $B^+(\lambda)$ обозначена матрица

$$B^+(\lambda) := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(\lambda)} (z^{-1} - 1) \cdot (z + 1) \cdot (U(\lambda) - z)^{-1} dz.$$

Контур $\Gamma(\lambda)$ определен в формулировке доказываемой леммы.

Между тем, функция $-i(z^{-1} - 1)(z + 1)$ обращается в нуль в точке $z = 1$, а матрица $U(\lambda)$ заведомо не имеет присоединенных векторов, отвечающих собственному значению 1. Поэтому матрицы $B(\lambda)$ и $B^+(\lambda)$ равны. Следовательно, при выполнении условия (8) равенство (9) действительно справедливо. Тем самым лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. При выполнении условия $\text{rank}(U(\lambda) - 1) \equiv \text{const}$ матрица-функция A является непрерывной на отрезке $[\sigma, \tau]$. Поэтому найдется такое вещественное число C , что определенная в пространстве $W_2^n[a, b]$ ограниченная квадратичная форма

$$\mathfrak{s}_C(\lambda)[y] \equiv \sum_{k=0}^n \int_a^b p_k(x, \lambda) |y^{(n-k)}(x)|^2 dx - \int_a^b C \cdot |y(x)|^2 dx + \langle A(\lambda)y^\wedge, y^\wedge \rangle_{\mathbb{C}^{2n}}$$

будет неотрицательна независимо от выбора $\lambda \in [\sigma, \tau]$.

Однако из леммы 2 с очевидностью следует, что неотрицательность квадратичной формы $\mathfrak{s}_C(\lambda)$ влечет за собой неотрицательность оператора $S(\lambda) - C$ (обратное, вообще говоря, неверно). Значит, ранее определенное число C представляет собой равномерную по $\lambda \in [\sigma, \tau]$ миноранту операторов $S(\lambda)$. Тем самым утверждение леммы справедливо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Рассмотрим определенную на параллелепипеде $[a, b] \times [a, b] \times [\sigma, \tau]$ функцию G , для которой при любом $\lambda \in [\sigma, \tau]$ функция $G(\cdot, \cdot, \lambda)$ представляет собой функцию Грина оператора $S(\lambda) + i$. Нетрудно проверить, что непрерывность функций p_k и U приводит к тому, что функция G непрерывна на параллелепипеде $[a, b] \times [a, b] \times [\sigma, \tau]$. Отсюда с очевидностью вытекает справедливость утверждения леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Справедливость утверждения доказываемой леммы нетрудно вывести из леммы 2 и возможности записи условия (8) в форме (10).

2.2. Оценки числа собственных значений. Из лемм 2–5 и теорем 1–3 вытекает справедливость следующих утверждений.

ТЕОРЕМА 4. Пусть матрица-функция U такова, что числовая функция $\text{rank}(U - 1)$ постоянна на отрезке $[\sigma, \tau]$. Тогда имеет место оценка

$$\mathcal{N}_S \geq \nu_S(\tau) - \nu_S(\sigma).$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) подпространство $\ker(U(\lambda) - 1)$ не зависит от выбора значения $\lambda \in [\sigma, \tau]$;
- 2) при любом фиксированном $x \in [a, b]$ функции $p_k(x, \cdot)$, $k = 0, \dots, n-1$, не возрастают; кроме того, при любом фиксированном $x \in [a, b]$ функция $p_n(x, \cdot)$ строго убывает;
- 3) отвечающая матрице-функции U матрица-функция A (см. лемму 2) не возрастает в том смысле, что при любых $\lambda_1, \lambda_2 \in [\sigma, \tau]$, удовлетворяющих неравенству $\lambda_1 < \lambda_2$, самосопряженная матрица $A(\lambda_1) - A(\lambda_2)$ является неотрицательной.

Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{N}_S = \nu_S(\tau) - \nu_S(\sigma).$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) подпространство $\ker(U(\lambda) - 1)$ не зависит от выбора значения $\lambda \in [\sigma, \tau]$;
- 2) функции p_k , $k = 0, \dots, n$, обладают непрерывными на прямоугольнике $[a, b] \times [\sigma, \tau]$ частными производными по второму аргументу;
- 3) матрица-функция U является непрерывно дифференцируемой;
- 4) для любой собственной пары $\{\lambda, y\}$ оператор-функции S имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^n \int_a^b \left| \frac{\partial p_k(x, \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=\lambda} \cdot |y^{(n-k)}(x)| dx + \langle A'(\lambda)y^\wedge, y^\wedge \rangle_{\mathbb{C}^{2n}} < 0.$$

Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{N}_S = \nu_S(\tau) - \nu_S(\sigma).$$

Отметим, что фигурирующее в формулировке теоремы 4 требование постоянности числовой функции $\text{rank}(U - 1)$ является существенным. Действительно, определенная на отрезке $[-1, 1]$ оператор-функция $\tilde{S}$, значениями которой являются операторы в $L_2[0, \pi]$ вида

$$-y'', \quad y(0) = y(\pi) - \lambda y'(\pi) = 0$$

(см. [2, гл. V, пример 4.14]), не удовлетворяет этому требованию, и для нее имеет место неравенство

$$0 = \mathcal{N}_{\tilde{S}} < \nu_{\tilde{S}}(1) - \nu_{\tilde{S}}(-1) = 1 - 0 = 1.$$

В качестве следствий теорем 4–6 могут быть получены некоторые известные оценки числа собственных значений дифференциальных оператор-функций – в частности, оценки, связанные с результатами работ [6] и [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
- [2] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [3] Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963.
- [4] Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М. Спектральный анализ дифференциальных операторов. Связь спектральных и осцилляционных свойств. Мариуполь, 2001.
- [5] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
- [6] Kamke E. Neue Herleitung der Oszillationssätze für die linearen selbstadjungierten Randwertaufgaben zweiter Ordnung // Math. Z. 1938. V. 44. P. 635–658.
- [7] Mennicken R., Schmid H., Shkalikov A. A. On the eigenvalue accumulation of Sturm–Liouville problems depending nonlinearly on the spectral parameter // Math. Nachr. 1998. V. 189. P. 157–170.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: vladimi@mech.math.msu.su

Поступило
30.09.2002
Исправленный вариант
22.05.2003