Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ф. Абузярова, Конечно порожденные подмодули в модуле целых функций, определяемом ограничениями на индикатор, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 1, 3–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm323>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:47:16

УДК 517.53

КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫЕ ПОДМОДУЛИ В МОДУЛЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМОМ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ИНДИКАТОР

Н. Ф. Абузярова

Исследуются конечно порожденные подмодули в модуле P целых функций, ограниченных системой ρ -тригонометрически выпуклых весов, мажорируемых заданной ρ -тригонометрически выпуклой функцией. Получены достаточные условия обильности конечно порожденного подмодуля в терминах взаимного расположения его образующих. При помощи этих условий доказано, что всякий обильный подмодуль в P порождается двумя (быть может, совпадающими) функциями.

Библиография: 17 названий.

Пусть $\mathcal{P}$ – локально-выпуклое пространство функций, аналитических в области G комплексной плоскости, такое, что операция Λ умножения на независимую переменную непрерывно действует из $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}$. Другими словами, $\mathcal{P}$ – топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[\lambda]$. В работах [1], [2] И. Ф. Красичкова-Терновского исследуется возможность локального описания замкнутых подмодулей модуля $\mathcal{P}$ при условии, что его топология не является слишком “жесткой”. Здесь результаты этих работ используются для исследования конечно порожденных подмодулей в модуле целых функций $P[\rho, H]$, ограниченных системой ρ -тригонометрически выпуклых весов, мажорируемых ρ -тригонометрически выпуклой функцией $H(\theta)$. А именно, с помощью этих результатов будут получены достаточные условия обильности конечно порожденного подмодуля в $P[\rho, H]$ в терминах взаимного расположения нулей его образующих.

Задача локального описания замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций была предметом исследований отечественных и зарубежных авторов (см. [1]–[10] и библиографию в них). Эта задача связана с такими проблемами анализа, как спектральный синтез и уравнения свертки, слабая обратимость функций и весовая аппроксимация многочленами, проблема Помпейю.

В частности, рассматриваемая в данной работе задача локального описания конечно порожденного подмодуля является двойственной к задаче аппроксимации решений системы однородных уравнений типа свертки линейными комбинациями элементарных решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00159.

1. Предварительные сведения. Пусть $\rho > 0$, $H(\theta)$ – 2π -периодическая, ρ -тригонометрически выпуклая полунепрерывная снизу функция со значениями в $(-\infty, \infty]$ такая, что существуют ρ -тригонометрически выпуклые функции $h(\theta) < H(\theta)$.

Обозначим через $P[\rho, H)$ индуктивный предел пространств

$$P_{\rho, h} = \left\{ \mathcal{F} \in H(\mathbb{C}) : \|\mathcal{F}\|_h = \sup_{z \in \mathbb{C}} |\mathcal{F}(z)| \exp(-h(\theta)|z|^\rho) < \infty \right\}, \quad h(\theta) < H(\theta).$$

В работе [11, лемма 2.1] установлено, что существует последовательность

$$h_1(\theta) < \dots < h_k(\theta) < \dots < H(\theta)$$

ρ -тригонометрически выпуклых функций таких, что

$$P[\rho, H) = \lim \text{ind } P_{\rho, h_k},$$

и, значит, $P[\rho, H)$ – пространство типа (LN^*) (см. [12]).

$P[\rho, H)$ обладает структурой топологического модуля над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$.

Пусть I – замкнутый подмодуль в $P[\rho, H)$. Напомним некоторые определения, связанные с понятием подмодуля. (Терминология заимствована из работы [1].)

Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ есть *нуль подмодуля I кратности n* , если любая функция $\mathcal{F}$ из I обращается в точке λ в нуль с кратностью не ниже чем n , и в I существует функция, для которой λ – нуль кратности n .

Обозначим через $\Lambda_I = \{(\lambda_i, n_i)\}$ множество нулей подмодуля I , через n_i кратность нуля λ_i .

Подмодуль I *устойчив в точке λ* , если из того, что $\mathcal{F} \in I$ и имеет в точке λ нуль кратности большей, чем кратность этой точки как нуля I , следует, что $\mathcal{F}/(z - \lambda) \in I$.

Подмодуль *устойчив*, если он устойчив в любой точке.

Функция $\mathcal{F} \in P[\rho, H)$ *принадлежит I локально*, если в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ она имеет нуль кратности не ниже, чем кратность этой точки как нуля I .

Подмодуль I *обилён*, если он совпадает с множеством всех функций $\mathcal{F}$ из $P[\rho, H)$, принадлежащих I локально.

В работе [1] проведены исследования свойства обильности замкнутых подмодулей в модулях голоморфных вектор-функций одной переменной, в том числе связь между обильностью и устойчивостью подмодуля. Предложение 6.5 этой работы в применении к модулю $P[\rho, H)$ дает: *обильность замкнутого подмодуля в $\mathcal{P}$ эквивалентна его устойчивости*.

Там же доказано, что для подмодуля с конечным числом образующих $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ устойчивость, а значит и обильность, эквивалентна тому, что для некоторого $z_0 \in \mathbb{C}$ и любого набора комплексных чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, удовлетворяющего условию $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$, тождественный нуль можно аппроксимировать в топологии $\mathcal{P}$ функциями вида $P_1 \mathcal{F}_1 + \dots + P_n \mathcal{F}_n$, где $P_1, \dots, P_n$ – многочлены и $P_l(z_0) = \alpha_l$, $\mathcal{F}_l(z_0) = 1$, $l = 1, \dots, n$ [1, предложение 4.9].

В частности, подмодуль с образующими $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ обилён тогда и только тогда, когда для некоторого $z_0 \in \mathbb{C}$ найдутся обобщенные последовательности многочленов $\{P_\alpha\}, \{Q_\alpha\}$ такие, что $P_\alpha \mathcal{F} - Q_\alpha \mathcal{G} \rightarrow 0$ в $\mathcal{P}$ и $P_\alpha(z_0) = Q_\alpha(z_0) = \mathcal{F}(z_0) = \mathcal{G}(z_0) = 1$.

С использованием этого критерия в работе [13] построены необильные подмодули с двумя образующими в $P[1, H)$ (теоремы 7.1 и 7.3). Эти построения основаны на факте разделенности нулей функций, взятых в качестве образующих.

Мы докажем, что, напротив, при определенном сближении нулей функций $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ из $\mathcal{P}$ порожденный ими подмодуль I обилеи.

Аналитическая подготовка, необходимая для получения этих условий, проводится в следующем пункте.

2. Аналитические леммы. В этом пункте выводятся оценки для целых функций специального вида, необходимые в дальнейшем.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – целые функции, допускающие представление $\mathcal{F} = fF$, $\mathcal{G} = gG$, где F и G – целые функции порядка не выше чем ρ , разложение Адамара для которых имеет вид

$$\begin{aligned} F(z) &= e^{az^p} \prod_{\Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right) e^{z/\lambda_i + \dots + z^p/(p\lambda_i^p)}, \\ G(z) &= e^{bz^p} \prod_{\Gamma} \left(1 - \frac{z}{\gamma_i}\right) e^{z/\gamma_i + \dots + z^p/(p\gamma_i^p)}, \end{aligned} \quad \text{если } p = [\rho] > 0,$$

$$F(z) = \prod_{\Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right), \quad G(z) = \prod_{\Gamma} \left(1 - \frac{z}{\gamma_i}\right), \quad \text{если } p = [\rho] = 0,$$

$\Lambda = \{\lambda_i\}$ и $\Gamma = \{\gamma_i\}$ – последовательности нулей функций F и G соответственно, занумерованные каким-либо образом, $0 \notin \Lambda \cup \Gamma$; в этих произведениях, а также во всех подобных, встречающихся ниже, каждый множитель выписывается столько раз, какова кратность соответствующего нуля рассматриваемой функции.

Введем обозначения, необходимые для формулировки утверждений этого пункта:

$$\begin{aligned} \Delta &= \max \left\{ \sup_n \frac{n}{|\lambda_n|^\rho}, \sup_n \frac{n}{|\gamma_n|^\rho} \right\}, \quad t_n = \max_{i \leq n} \{|\lambda_i|, |\gamma_i|\}, \\ A_n &= a + \sum_{i \leq n} \frac{1}{p\lambda_i^p}, \quad B_n = b + \sum_{i \leq n} \frac{1}{p\gamma_i^p} \quad \text{при } p > 0, \\ a &= b = A_n = B_n = 0 \quad \text{при } p = 0, \\ f_n(z) &= \prod_{i \leq n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right) e^{z/\lambda_i + \dots + z^{p-1}/((p-1)\lambda_i^{p-1})}, \\ g_n(z) &= \prod_{i \leq n} \left(1 - \frac{z}{\gamma_i}\right) e^{z/\gamma_i + \dots + z^{p-1}/((p-1)\gamma_i^{p-1})} \quad \text{при } p > 1, \\ f_n(z) &= \prod_{i \leq n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right), \quad g_n(z) = \prod_{i \leq n} \left(1 - \frac{z}{\gamma_i}\right) \quad \text{при } p = 0 \text{ или } 1, \\ L_n(z) &= g_n(z)g(z)\mathcal{F}(z) - f_n(z) \exp((A_n - B_n)z^p)f(z)\mathcal{G}(z). \end{aligned} \tag{1}$$

Следующие величины отражают близость последовательностей Λ и Γ :

$$S_n = \sum_{i \geq n} \left| \frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\lambda_i} \right|, \quad K_M = \max_{i \in M} \left\{ \max \left\{ \left| \frac{\lambda_i}{\gamma_i} \right|, \left| \frac{\gamma_i}{\lambda_i} \right| \right\} \right\},$$

где M – некоторое множество значений индекса i ; $K_M = 1$, если $M = \emptyset$.

Далее, пусть

$$\chi_\rho(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{1+\mu} + [\rho] \ln\left(1 + \frac{1}{\mu}\right), & \rho > 1, \\ \frac{1}{\mu^\rho} \left(\ln(1+\mu) + \frac{1}{\rho}\right) + [\rho] \ln\left(1 + \frac{1}{\mu}\right), & \rho \leq 1; \end{cases}$$

эта функция монотонно убывает к нулю на положительной полуоси, поэтому существует обратная к ней функция $\mu_\rho(\chi)$, также монотонно убывающая при $\chi > 0$.

ЛЕММА 1. Пусть $|\lambda_i| \geq 1$, $|\gamma_i| \geq 1$, $i = 1, 2, \dots$ (это условие не ограничивает применения леммы в рассматриваемых ситуациях, так как в них всегда можно пренебречь конечным числом нулей), $c_p = 3e(2 + \ln p)$, если $p > 1$, и $c_p = 1$, если $p \leq 1$; δ_0 – положительное число такое, что $\mu(\delta_0/(c_p \Delta)) \geq 1$. При любых $\sigma \in (0; 1/2)$, $\delta \in (0; \delta_0)$ для функции $L_n(z)$ верны следующие оценки:

1) в круге $\{z : |z| \leq R_n\}$

$$|L_n(z)| \leq C_\sigma \left(1 + \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)^r K_{M_n}^r R_n\right) S_n \cdot M\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma} K_{M_n} R_n\right) \exp(C_\sigma S_n) \times \exp\left(C_\sigma \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)^r K_{M_n}^r S_n R_n^r + \delta R_n^\rho\right); \quad (2)$$

2) при $|z| \geq R_n$

$$|L_n(z)| \leq (|f(z)\mathcal{G}(z)| + |g(z)\mathcal{F}(z)|) \exp((|A_n - B_n| + \delta)|z|^\rho); \quad (3)$$

здесь

$$C_\sigma = 6\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{\sigma} + p\right), \quad R_n = \mu_\rho\left(\frac{\delta}{c_p \Delta}\right) t_n, \quad M(R) = \max_{|z|=R} |g(z)\mathcal{F}(z)|, \\ r = \max\{p; 1\}, \quad M_n = \{i \in \mathbb{N} : i > n, \min(|\lambda_i|(1-\sigma); |\gamma_i|(1-\sigma)) \leq R_n\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\rho > 1$, ρ – нецелое (другие случаи рассматриваются аналогично). Установим сначала несколько вспомогательных оценок.

1. Покажем, что при $|z| \geq R_n$

$$\ln |f_n(z)| \leq \delta |z|^\rho, \quad \ln |g_n(z)| \leq \delta |z|^\rho. \quad (4)$$

Используя известный прием оценки произведений типа (1) (см. [14]) и учитывая, что $0 \notin \Lambda \cup \Gamma$, а $n_\Lambda(t) \leq \Delta t^\rho$, $t > 0$, нетрудно вывести, что

$$\ln |f_n(z)| \leq c_p \Delta |z|^\rho \left(\frac{t_n}{|z|}\right)^{\rho-p} \left(\frac{t_n}{t_n + |z|} + p \ln\left(1 + \frac{t_n}{|z|}\right)\right) \\ = c_p \Delta |z|^\rho \left(\frac{t_n}{|z|}\right)^{\rho-p} \chi_\rho\left(\frac{|z|}{t_n}\right).$$

При $|z| \geq R_n$ будет

$$\frac{|z|}{t_n} \geq \mu_\rho\left(\frac{\delta}{c_p \Delta}\right);$$

так как функция $\chi_\rho(\mu)$ убывающая, при $\delta \in (0; \delta_0)$ получим

$$\ln |f_n(z)| \leq c_p \Delta \left(\frac{t_n}{|z|} \right)^{\rho-p} \chi_\rho \left(\mu_\rho \left(\frac{\delta}{c_p \Delta} \right) \right) |z|^\rho \leq \delta |z|^\rho, \quad |z| \geq R_n.$$

Аналогично доказывается, что

$$\ln |g_n(z)| \leq \delta |z|^\rho, \quad |z| \geq R_n.$$

2. Пусть M – некоторое множество натуральных чисел, $q = \min\{i : i \in M\}$. Положим

$$F_M(z) = \prod_{i \in M} \left(1 - \frac{z}{\lambda_i} \right) \exp \left(\frac{z}{\lambda_i} + \dots + \frac{z^p}{p \lambda_i^p} \right),$$

$$G_M(z) = \prod_{i \in M} \left(1 - \frac{z}{\gamma_i} \right) \exp \left(\frac{z}{\gamma_i} + \dots + \frac{z^p}{p \gamma_i^p} \right);$$

если $M = \emptyset$, то полагаем $F_M(z)$ и $G_M(z)$ тождественно равными единице.

Покажем, что при $z \notin E_{M,\sigma}$ выполняются оценки

$$\left| \ln \left| \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| \right| \leq \left(p + \frac{1}{\sigma} \right) S_q(|z|^p + 1), \quad (5)$$

$$\left| 1 - \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| \leq S'_q(|z|^p + 1) \exp(S'_q(|z|^p + 1)), \quad (6)$$

где

$$S'_q = \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{\sigma} + p \right) S_q, \quad E_{M,\sigma} = \bigcup_{i \in M} (\Delta_\sigma(\lambda_i) \cup \Delta_\sigma(\gamma_i)),$$

$\Delta_\sigma(\lambda)$ – замкнутый круг с центром в точке λ радиуса $\sigma|\lambda|$.

Так же, как это было сделано в доказательстве леммы 1 в [15], можно вывести, что отдельный множитель

$$e_i(z) = \frac{1 - z/\gamma_i}{1 - z/\lambda_i} \exp \left(\left(\frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\lambda_i} \right) z + \dots + \left(\frac{1}{p \gamma_i^p} - \frac{1}{p \lambda_i^p} \right) z^p \right)$$

при $z \notin \Delta_\sigma(\lambda_i) \cup \Delta_\sigma(\gamma_i)$ удовлетворяет неравенствам

$$|\operatorname{Re} \ln e_i(z)| = |\ln |e_i(z)|| \leq \left(\left(p + \frac{1}{\sigma} \right) \left| \frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\lambda_i} \right| (|z|^p + 1) \right),$$

$$|\operatorname{Im} \ln e_i(z)| = |\arg e_i(z)| \leq \left(\left(p + \frac{\pi}{\sigma} \right) \left| \frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\lambda_i} \right| (|z|^p + 1) \right);$$

для доказательства этих неравенств, нужно использовать предположение, что $|\lambda_i| \geq 1$, $|\gamma_i| \geq 1$, $i = 1, 2, \dots$, а также, что $|\arg(1 + w)| \leq \pi|w|$, $w \in \mathbb{C}$ (при доказательстве второго из неравенств).

Используя оценки отдельного множителя, получаем, что при $z \notin E_{M,\sigma}$ для всего отношения $G_M(z)/F_M(z)$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \ln \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| &= \left| \ln \left| \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| \right| \leq \left(p + \frac{1}{\sigma} \right) S_q(|z|^p + 1), \\ \left| \operatorname{Im} \ln \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| &= \left| \arg \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| \leq \left(p + \frac{\pi}{\sigma} \right) S_q(|z|^p + 1) \end{aligned}$$

и, значит,

$$\left| \ln \frac{G_M(z)}{F_M(z)} \right| \leq S'_q(|z|^p + 1), \quad z \notin E_M,$$

где $S'_q = \sqrt{2}(p + \pi/\sigma)S_q$.

Таким образом, выражение $G_M(z)/F_M(z)$ представляется в виде $\exp s_M(z)$, где $|s_M(z)| \leq S'_q(|z|^p + 1)$, $z \notin E_{M,\sigma}$. Разлагая $\exp s_M(z)$ в ряд по степеням $s_M(z)$ и используя стандартный метод оценки таких рядов, получим требуемую оценку (6) для $(1 - G_M(z)/F_M(z))$.

Оценим теперь $L_n(z)$ в круге $|z| \leq R_n$. Пусть M_n – множество значений индекса i , определенное так, как указано в формулировке леммы; $N_n = \{i > n : i \notin M_n\}$.

Круг $\{z : |z| \leq R_n\}$ и множество $E_{N_n,\sigma}$ не имеют общих внутренних точек; а множество $E_{M_n,\sigma}$ при условии, что $M_n \neq \emptyset$, лежит в круге $\{z : |z| \leq R'_n\}$, где

$$R'_n = \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} K_{M_n} R_n.$$

Учитывая, что $\{i : i > n\} = M_n \cup N_n$, представим функцию

$$L_n(z) = g_n(z)g(z)\mathcal{F}(z) - f_n(z)\exp((A_n - B_n)z^p)f(z)\mathcal{G}(z)$$

в следующем виде:

$$L_n(z) = g_n(z)g(z)\mathcal{F}(z)\left(1 - \frac{G_{M_n}(z)}{F_{M_n}(z)}\right) + g_n(z)g(z)\mathcal{F}(z)\frac{G_{M_n}(z)}{F_{M_n}(z)}\left(1 - \frac{G_{N_n}(z)}{F_{N_n}(z)}\right), \quad (*)$$

где

$$F_n(z) = \prod_{i>n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right) e^{z/\lambda_i + \dots + z^p/(p\lambda_i^p)}, \quad G_n(z) = \prod_{i>n} \left(1 - \frac{z}{\gamma_i}\right) e^{z/\gamma_i + \dots + z^p/(p\gamma_i^p)}.$$

Выражение $g(z)\mathcal{F}(z)(1 - G_{M_n}(z)/F_{M_n}(z))$ оценивается сначала на окружности $|z| = R'_n$, а затем, по принципу максимума и в круге $|z| \leq R'_n$ (тем более, в круге $|z| \leq R_n$):

$$\left| g(z)\mathcal{F}(z)\left(1 - \frac{G_{M_n}(z)}{F_{M_n}(z)}\right) \right| \leq M(R'_n)S'_n(R_n^p + 1)\exp(S'_n(R_n^p + 1));$$

при оценке использовано соотношение (6) (с $M = M_n$). В круге $|z| \leq R_n$ выполнено неравенство

$$|g_n(z)| \leq e^{\delta R_n^p},$$

поэтому первое слагаемое в представлении $(*)$ удовлетворяет оценке

$$\left| g_n(z)g(z)\mathcal{F}(z)\left(1 - \frac{G_{M_n}(z)}{F_{M_n}(z)}\right) \right| \leq M(R'_n)S'_n(R_n^p + 1) \exp(S'_n(R_n^p + 1) + \delta R_n^p), \quad |z| \leq R_n.$$

Для второго слагаемого в $(*)$, применяя (5) (с $M = M_n$) и (6) (с $M = N_n$), получим

$$\begin{aligned} & \left| g_n(z)g(z)\mathcal{F}(z)\frac{G_{M_n}(z)}{F_{M_n}(z)} \right| \cdot \left| 1 - \frac{G_{N_n}(z)}{F_{N_n}(z)} \right| \\ & \leq M(R'_n) \exp(S'_n(R_n^p + 1)) S'_n(R_n^p + 1) \exp(S'_n(R_n^p + 1) + \delta R_n^p), \quad |z| \leq R_n. \end{aligned}$$

Объединение двух последних оценок дает (2).

Неравенство (3) для $L_n(z)$ следует из (4). Действительно, при $|z| \geq R_n$ имеем

$$\begin{aligned} |L_n(z)| & \leq \max\{|f_n(z)|, |g_n(z)|\} \cdot (|g(z)\mathcal{F}(z)| + |f(z)\mathcal{G}(z)|) \exp(|A_n - B_n||z|^\rho) \\ & \leq (|g(z)\mathcal{F}(z)| + |f(z)\mathcal{G}(z)|) \exp((|A_n - B_n| + \delta)|z|^\rho). \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Следующая лемма содержит оценки для подпоследовательности $L_{n_\nu}(z)$, $\nu = 1, 2, \dots$, в терминах роста функций $f\mathcal{G}$ и $g\mathcal{F}$.

ЛЕММА 2. *Предположим, что для функций f, F, g, G выполнены следующие условия:*

- 1) *существуют постоянная $C > 0$ и ограниченная ρ -тригонометрически выпуклая 2π -периодическая функция $h(\theta)$ такие, что*

$$|g(z)\mathcal{F}(z)| \leq C \exp(h(\theta)|z|^\rho), \quad |f(z)\mathcal{G}(z)| \leq C \exp(h(\theta)|z|^\rho), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \theta = \arg z;$$

- 2) *множества Λ и Γ можно упорядочить так, что для некоторого $\delta > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1/S_n)}{t_n^\rho} > \mu_\rho^\rho \left(\frac{\delta}{c_p \Delta} \right) (h + \delta), \quad (7)$$

где

$$h = h_{\max} - \min \left\{ \min_{\theta} h(\theta); 0 \right\}, \quad h_{\max} = \max_{\theta} h(\theta).$$

Тогда существуют последовательность $N_0 = \{n_\nu\}$ натуральных чисел

$$n_1 < n_2 < \dots < n_\nu \rightarrow \infty$$

и последовательность положительных чисел

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_\nu \rightarrow 0$$

такие, что

$$|L_n(z)| \leq \varepsilon_\nu \exp((h(\theta) + \delta_0 + \delta)|z|^\rho), \quad z \in \mathbb{C},$$

где

$$\delta_0 = \left| a - b + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p\lambda_i^p} - \frac{1}{p\gamma_i^p} \right) \right| \quad \text{при } p > 0, \quad \delta_0 = 0 \quad \text{при } p = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем δ' , $0 < \delta' < \delta$, столь близким к δ , что соотношение (7) остается выполненным при замене в нем δ на δ' . Найдутся подпоследовательность $N_0 = \{n_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \dots$, и число $h' > \mu_\rho^\rho(\delta'/(c_p\Delta))(h + \delta')$ такие, что

$$\frac{\ln(1/S_{n_\nu})}{t_{n_\nu}^\rho} > h'. \quad (8)$$

Поэтому

$$S_{n_\nu} < \exp(-h't_{n_\nu}^\rho), \quad \nu \geq \nu_0;$$

значит, $S_{n_\nu} t_{n_\nu}^\alpha \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

Положим

$$R_n = \mu_\rho \left(\frac{\delta'}{c_p\Delta} \right) t_n.$$

В силу условия 1) и оценки (4)

$$|L_n(z)| \leq C \exp((h(\theta) + |A_n - B_n| + \delta')|z|^\rho), \quad |z| \geq R_n.$$

Так как $|A_n - B_n| \leq \delta_0 + S_{n+1}$, а $S_{n+1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, найдутся значение индекса n_0 и положительное число δ'' , $\delta' < \delta'' < \delta$, такие, что

$$|A_n - B_n| + \delta' \leq \delta_0 + \delta'', \quad n \geq n_0.$$

Поэтому для всех $n \geq n_0$

$$|L_n(z)| \leq C \exp((h(\theta) + \delta_0 + \delta'')|z|^\rho), \quad |z| \geq R_n. \quad (9)$$

Фиксируем произвольное $\sigma \in (0, 1/2)$ и воспользуемся оценкой (3) для $L_n(z)$. Получим

$$|L_n(z)| \leq \exp(D_n R_n^\rho) \cdot \exp(h(\theta)|z|^\rho), \quad |z| \leq R_n,$$

где

$$D_n = d_n + \frac{1}{\mu_\rho^\rho(\delta'/(c_p\Delta))} \left(-\frac{\ln(1/S_n)}{t_n^\rho} + \mu_\rho^\rho \left(\frac{\delta'}{c_p\Delta} \right) \left(\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma} \right)^\rho K_{M_n}^\rho h + \delta' \right) \right),$$

а

$$d_n = R_n^{-\rho} C_\sigma S_n \left(1 + \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma} \right)^{p'} K_{M_n}^{p'} R_n^{p'} \right) + R_n^{-\rho} \ln \left(C_\sigma \left(1 + \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma} \right)^{p'} K_{M_n}^{p'} R_n^{p'} \right) \right) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, $n \in N_0$.

В силу (8)

$$D_n \leq d_n + \left(\mu_\rho \left(\frac{\delta'}{c_p\Delta} \right) \right)^{-\rho} \left[-h' + \mu_\rho^\rho \left(\frac{\delta'}{c_p\Delta} \right) \left(\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma} \right)^\rho K_{M_n}^\rho h + \delta' \right) \right],$$

где $h' > (\mu_\rho(\delta'/(c_p\Delta)))^\rho(h + \delta')$.

Из определения M_n и того, что $S_{n_\nu} t_{n_\nu} \rightarrow 0$, нетрудно вывести, что $K_{M_n} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, $n \in N_0$. Значит, при всех n , начиная с некоторого номера, и при всех σ , достаточно близких к нулю, выражение в квадратных скобках является отрицательным

числом. Следовательно, при $n \rightarrow \infty$, $n \in N_0$, последовательность $\{D_n\}$ имеет отрицательный верхний предел. Поэтому выполнено

$$|L_{n_\nu}(z)| \leq \varepsilon'_\nu \exp(h(\theta)|z|^\rho), \quad |z| \leq R_{n_\nu},$$

где $\varepsilon'_\nu = \exp(D_{n_\nu} R_{n_\nu}^\rho) \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Далее, из оценки (9) следует, что

$$|L_{n_\nu}(z)| \leq \varepsilon''_\nu \exp((h(\theta) + \delta_0 + \delta)|z|^\rho), \quad |z| \geq R_{n_\nu},$$

где $\varepsilon''_\nu = C \exp(-(\delta - \delta'')R_{n_\nu}^\rho) \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow \infty$.

Положив $\varepsilon_\nu = \varepsilon'_\nu + \varepsilon''_\nu$, получим

$$|L_{n_\nu}(z)| \leq \varepsilon_\nu \exp((h(\theta) + \delta_0 + \delta)|z|^\rho), \quad z \in \mathbb{C},$$

причем $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$.

Лемма 2 доказана.

3. Пусть $P[\rho, H)$ – локально-выпуклый модуль, определенный в п. 1. Известно, что подмодуль в $P[\rho, H)$, порожденный одной функцией, всегда обилен [13], [16], а подмодуль, порожденный n функциями, $n > 1$, может не быть обильным [13].

В этом пункте будет доказано, что конечно порожденный подмодуль в $P[\rho, H)$ является обильным, если нули его образующих определенным образом сближаются.

Если длина каждого максимального интервала, на котором функция $H(\theta)$ принимает конечные значения, не превосходит π/ρ , то в силу результатов работы [16] любой замкнутый подмодуль в $P[\rho, H)$ является обильным. Поэтому утверждения об условиях обильности будут содержательными для подмодулей в $P[\rho, H)$ лишь в случае, когда $H(\theta)$ конечна хотя бы на одном интервале длины большей, чем π/ρ .

Ниже мы будем пользоваться обозначениями, введенными в п. 2.

Приведем сначала теорему об условиях обильности в $P[\rho, H)$ подмодуля I , порожденного двумя функциями $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что существуют положительные числа C, δ , ограниченная ρ -тригонометрически выпуклая 2π -периодическая функция $h(\theta)$ такие, что*

1) $h(\theta) + \delta_0 + \delta < H(\theta)$, где

$$\delta_0 = \begin{cases} \left| a - b + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p\lambda_i^p} - \frac{1}{p\gamma_i^p} \right) \right| & \text{при } p > 0, \\ 0 & \text{при } p = 0; \end{cases}$$

2) функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ допускают представление

$$\mathcal{F} = fF, \quad \mathcal{G} = gG,$$

где F и G – целые функции конечного типа при порядке ρ с последовательностями нулей $\Lambda = \{\lambda_i\}$ и $\Gamma = \{\gamma_i\}$ соответственно, $0 \notin \Lambda \cup \Gamma$, и для всех $z \in \mathbb{C}$

$$|f(z)\mathcal{G}(z)| \leq C \exp(h(\theta)|z|^\rho), \quad |g(z)\mathcal{F}(z)| \leq C \exp(h(\theta)|z|^\rho);$$

3) множества Λ и Γ можно упорядочить так, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1/S_n)}{t_n^\rho} > \mu_\rho^\rho \left(\frac{\delta}{c_p \Delta} \right) (h + \delta),$$

где $h = \max_\theta h(\theta) - \min\{\min_\theta h(\theta), 0\}$, $c_p = 3e(2 + \ln p)$.

Тогда I – обильный подмодуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем и фиксируем точку z_0 такую, что $\mathcal{F}(z_0) \neq 0$, $\mathcal{G}(z_0) \neq 0$. Функции $\mathcal{F}(z)/\mathcal{F}(z_0)$, $\mathcal{G}(z)/\mathcal{G}(z_0)$ порождают тот же подмодуль I , что и исходные; кроме того, они удовлетворяют условиям предложения вместе с функциями $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Поэтому, не ограничивая общности, можем считать, что $\mathcal{F}(z_0) = 1$, $\mathcal{G}(z_0) = 1$.

В силу сформулированного в п. 1 критерия обильности для подмодулей с двумя образующими доказательство сводится к построению последовательностей многочленов $\{P_\nu\}$, $\{Q_\nu\}$ таких, что

$$P_\nu \mathcal{F} - Q_\nu \mathcal{G} \rightarrow 0 \text{ в } P[\rho, H] \text{ и } P_\nu(z_0) = Q_\nu(z_0) = 1, \quad \nu \geq \nu'. \quad (10)$$

Пусть $N_0 = \{n_\nu\}$, $\{\varepsilon_\nu\}$ – последовательности из леммы 2, $H_0(\theta)$ – ограниченная ρ -тригонометрически выпуклая 2π -периодическая функция, удовлетворяющая соотношениям $h(\theta) + \delta_0 + \delta < H_0(\theta) < H(\theta)$. Каждая из функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ порождает в $P[\rho, H]$ обильный подмодуль. Поэтому существуют последовательности многочленов $\{p_m\}$, $\{q_m\}$ такие, что

$$p_m \mathcal{F} \rightarrow g \mathcal{F}, \quad q_m \mathcal{G} \rightarrow f \mathcal{G} \text{ в } P[\rho, H],$$

и даже по норме

$$\|\Phi\| = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\Phi(z)|}{\exp((H_0(\theta) - \delta_0 - \delta)|z|^\rho)}.$$

Положим

$$e_k(z) = \sum_{i=0}^k \frac{z^i}{i!}, \quad f'_n(z) = \prod_{i \leq n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_i}\right), \quad g'_n(z) = \prod_{i \leq n} \left(1 - \frac{z}{\gamma_i}\right)$$

(т.е. $f'_n = f_n$, $g'_n = g_n$ при $p \leq 1$),

$$P'_\nu(z) = \exp(B_{n_\nu} z_0^p) g'_{n_\nu}(z) e_{l_\nu} \left(\sum_{i=1}^{n_\nu} \sum_{j=1}^{p-1} \frac{z^j}{j \gamma_i^j} \right) p_{m_\nu}(z),$$

если $p \geq 1$,

$$Q'_\nu(z) = \exp(B_{n_\nu} z_0^p) f'_{n_\nu}(z) e_{k_\nu}((A_{n_\nu} - B_{n_\nu}) z^p) e_{l_\nu} \left(\sum_{i=1}^{n_\nu} \sum_{j=1}^{p-1} \frac{z^j}{j \lambda_i^j} \right) q_{m_\nu}(z),$$

$$P'_\nu(z) = g'_{n_\nu}(z) p_{m_\nu}(z), \quad Q'_\nu(z) = f'_{n_\nu}(z) q_{m_\nu}(z), \quad \text{если } p = 0;$$

множители

$$e_{l_\nu} \left(\sum_{i=1}^{n_\nu} \sum_{j=1}^{p-1} \frac{z^j}{j \gamma_i^j} \right) \quad \text{и} \quad e_{l_\nu} \left(\sum_{i=1}^{n_\nu} \sum_{j=1}^{p-1} \frac{z^j}{j \lambda_i^j} \right)$$

участвуют в определении P'_ν и Q'_ν соответственно, если $p \geq 2$, $\{k_\nu\}$, $\{l_\nu\}$, $\{m_\nu\}$ – возрастающие последовательности натуральных чисел.

Покажем, как выбрать эти последовательности, чтобы выполнялись следующие два условия:

- а) $L'_\nu(z) = P'_\nu(z) \mathcal{F}(z) - Q'_\nu(z) \mathcal{G}(z) \rightarrow 0$ в топологии $P[\rho, H]$;
- б) существуют число $A > 0$ и значение индекса ν_0 , для которых

$$|P'_\nu(z_0)| \geq A, \quad \nu \geq \nu_0.$$

Функция $L'_\nu(z)$ отличается от функции

$$L_{n_\nu}(z) = g_{n_\nu}(z)g(z)\mathcal{F}(z) - f_{n_\nu}(z)\exp((A_{n_\nu} - B_{n_\nu})z^p)f(z)\mathcal{G}(z), \quad n = 1, 2, \dots,$$

введенной в п. 2, числовым множителем $\exp(B_{n_\nu}z_0^p)$ и тем, что

$$g(z), \quad f(z), \quad g_{n_\nu}(z), \quad f_{n_\nu}(z), \quad \exp((A_{n_\nu} - B_{n_\nu})z^p)$$

заменены на многочлены

$$p_{m_\nu}, \quad q_{m_\nu}, \quad g'_{n_\nu}e_{l_\nu}\left(\sum_{i=1}^{n_\nu}\sum_{j=1}^{p-1}\frac{z^j}{j\gamma_i^j}\right), \quad f'_{n_\nu}e_{l_\nu}\left(\sum_{i=1}^{n_\nu}\sum_{j=1}^{p-1}\frac{z^j}{j\lambda_i^j}\right), \quad e_{k_\nu}((A_{n_\nu} - B_{n_\nu})z^p)$$

соответственно; а для $L_{n_\nu}(z)$ в лемме 2 получены оценки, из которых следует, что $L_{n_\nu}(z) \rightarrow 0$ в $P[\rho, H)$.

Поэтому для дальнейших рассуждений представим $L'_\nu(z)$ в виде, содержащем $L_{n_\nu}(z)$ в качестве одного из слагаемых (считаем, что $p \geq 2$, при $p < 2$ приводимые ниже выкладки имеют более простой вид):

$$\begin{aligned} L'_\nu(z) = & \left[\exp(B_{n_\nu}z_0^p)g'_{n_\nu}(z)e_{l_\nu}\left(\sum_{i=1}^{n_\nu}\sum_{j=1}^{p-1}\frac{z^j}{j\gamma_i^j}\right)p_{m_\nu}(z)\mathcal{F}(z) \right. \\ & \left. - \exp(B_{n_\nu}z_0^p)g'_{n_\nu}(z)\exp\left(\sum_{i=1}^{n_\nu}\sum_{j=1}^{p-1}\frac{z^j}{j\gamma_i^j}\right)p_{m_\nu}(z)\mathcal{F}(z) \right] \\ & + [\exp(B_{n_\nu}z_0^p)g_{n_\nu}(z)p_{m_\nu}(z)\mathcal{F}(z) - \exp(B_{n_\nu}z_0^p)g_{n_\nu}(z)g(z)\mathcal{F}(z)] \\ & + [\exp(B_{n_\nu}z_0^p)g_{n_\nu}(z)g(z)\mathcal{F}(z) \\ & \quad - \exp(B_{n_\nu}z_0^p)f_{n_\nu}(z)\exp((A_{n_\nu} - B_{n_\nu})z^p)f(z)\mathcal{G}(z)] \\ & + [\exp(B_{n_\nu}z_0^p)f_{n_\nu}(z)\exp((A_{n_\nu} - B_{n_\nu})z^p)f(z)\mathcal{G}(z) \\ & \quad - \exp(B_{n_\nu}z_0^p)f_{n_\nu}(z)\exp((A_{n_\nu} - B_{n_\nu})z^p)q_{m_\nu}(z)\mathcal{G}(z)] \\ & + [\exp(B_{n_\nu}z_0^p)f_{n_\nu}(z)\exp((A_{n_\nu} - B_{n_\nu})z^p)q_{m_\nu}(z)\mathcal{G}(z) \\ & \quad - \exp(B_{n_\nu}z_0^p)f_{n_\nu}(z)e_{k_\nu}((A_{n_\nu} - B_{n_\nu})z^p)q_{m_\nu}(z)\mathcal{G}(z)] \\ & + \left[\exp(B_{n_\nu}z_0^p)f'_{n_\nu}(z)\exp\left(\sum_{i=1}^{n_\nu}\sum_{j=1}^{p-1}\frac{z^j}{j\lambda_i^j}\right)e_{k_\nu}((A_{n_\nu} - B_{n_\nu})z^p)q_{m_\nu}(z)\mathcal{G}(z) \right. \\ & \quad \left. - \exp(B_{n_\nu}z_0^p)f'_{n_\nu}(z)e_{l_\nu}\left(\sum_{i=1}^{n_\nu}\sum_{j=1}^{p-1}\frac{z^j}{j\lambda_i^j}\right)e_{k_\nu}((A_{n_\nu} - B_{n_\nu})z^p)q_{m_\nu}(z)\mathcal{G}(z) \right] \\ = & L_\nu^{(1)}(z) + L_\nu^{(2)}(z) + L_\nu^{(3)}(z) + L_\nu^{(4)}(z) + L_\nu^{(5)}(z) + L_\nu^{(6)}(z). \end{aligned}$$

Через $L_\nu^{(k)}$, $k = 1, \dots, 6$, обозначены по порядку выражения, стоящие в квадратных скобках.

Слагаемое $L_\nu^{(3)}(z)$ совпадает с $L_{n_\nu}(z)$ с точностью до числового множителя; для того чтобы оценить его, применим лемму 2. В силу ограниченности по ν величины $|\exp(B_{n_\nu}z_0^p)|$ найдется постоянная $C_1 > 0$ такая, что

$$|L_\nu^{(3)}(z)| \leq C_1\varepsilon_\nu \exp((h(\theta) + \delta_0 + \delta)|z|^\rho), \quad z \in \mathbb{C}.$$

В силу условия 3) имеем

$$|A_{n_\nu} - B_{n_\nu}| \leq \delta_0 + \delta', \quad \nu \geq \nu_1,$$

где $\delta' < \delta$.

Учитывая то, как выбраны p_m, q_m , условие 1) и непрерывность в $P[\rho, H)$ операции умножения на функцию минимального при порядке ρ типа, при фиксированном n_ν подберем $m_\nu = m(n_\nu)$, $\nu \geq \nu_1$, так, чтобы $|L_\nu^{(2)}(z)|$ и $|L_\nu^{(4)}(z)|$ не превосходили

$$C_2 \varepsilon_\nu \exp(H_0(\theta)|z|^\rho)$$

при всех z . Снова принимая во внимание условие 1) и увеличив, если требуется, m_ν , выберем $k_\nu = k(n_\nu, m_\nu)$ так, что

$$|L_\nu^{(5)}(z)| \leq C_3 \varepsilon_\nu \exp(H_0(\theta)|z|^\rho), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Еще раз увеличив m_ν (так, чтобы $|p_{m_\nu}(z)\mathcal{F}(z)| \leq c' \exp(h(\theta)|z|^\rho)$) и учитывая непрерывность в $P[\rho, H)$ операции умножения на многочлен, выберем при фиксированных n_ν, m_ν, k_ν значение индекса $l_\nu = l(n_\nu, m_\nu, k_\nu)$ так, чтобы

$$|L_\nu^{(1)}| \leq C_4 \varepsilon'_\nu \exp(H_0(\theta)|z|^\rho), \quad |L_\nu^{(6)}| \leq C_4 \varepsilon'_\nu \exp(H_0(\theta)|z|^\rho), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из вышеизложенного следует, что для всех $\nu \geq \nu_1$ верна оценка

$$|L'_\nu(z)| \leq \varepsilon'_\nu \exp(H_0(\theta)|z|^\rho), \quad z \in \mathbb{C},$$

$\varepsilon'_\nu = (C_1 + 2C_2 + C_3 + 2C_4)\varepsilon_\nu$; и, значит, при указанном выборе k_ν, m_ν, l_ν

$$L'_\nu \rightarrow 0 \quad \text{в } P[\rho, H).$$

Далее,

$$P'_\nu(z_0) = \exp(B_{n_\nu} z_0^p) \prod_{i \leq n_\nu} \left(1 - \frac{z_0}{\gamma_i}\right) e_{l_\nu} \left(\sum_{i=1}^{n_\nu} \sum_{j=1}^{p-1} \frac{z_0^j}{\gamma_i^j} \right) p_{m_\nu}(z_0) \rightarrow g(z_0) \mathcal{G}(z_0)$$

при $\nu \rightarrow \infty$, а $g(z_0)\mathcal{G}(z_0) \neq 0$. Поэтому при некоторых $A > 0$ и $\nu_0 \geq 1$ выполнено

$$|P'_\nu(z_0)| \geq A, \quad \nu \geq \nu_0.$$

Чтобы закончить доказательство теоремы 1, построим по P'_ν и Q'_ν многочлены P_ν и Q_ν такие, что выполнены соотношения (10).

Это можно сделать следующим образом. Положим

$$P_\nu(z) = (z - a_\nu)P'_\nu(z), \quad Q_\nu(z) = (z - a_\nu)Q'_\nu(z) - \frac{Q'_\nu(z_0)}{P'_\nu(z_0)} + 1,$$

где $a_\nu = z_0 - 1/P'_\nu(z_0)$, $\nu \geq \nu_0$.

В том, что $P_\nu(z_0) = Q_\nu(z_0) = 1$, нетрудно убедиться при помощи вычислений.

Предельное соотношение $P_\nu \mathcal{F} - Q_\nu \mathcal{G} \rightarrow 0$ в $P[\rho, H)$ выводится из тождества

$$P_\nu(z) \mathcal{F}(z) - Q_\nu(z) \mathcal{G}(z) = (z - a_\nu)(P'_\nu(z) \mathcal{F}(z) - Q'_\nu(z) \mathcal{G}(z)) - \left(1 - \frac{Q'_\nu(z_0)}{P'_\nu(z_0)}\right) \mathcal{G}(z).$$

Теорема 1 доказана.

Для формулировки и доказательства утверждения, относящегося к подмодулям с произвольным конечным числом образующих, дополнительно введем следующие обозначения.

Пусть $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ — функции из $P[\rho, H)$. Положим $\pi = (i, j)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i < j$. Каждой паре $\pi = (i, j)$ поставим в соответствие вектор $\overline{\beta}^{(\pi)} = (\beta_1^{(\pi)}, \dots, \beta_n^{(\pi)}) \in \mathbb{C}^n$, где

$$\beta_k^{(\pi)} = \begin{cases} 1, & k = i, \\ -1, & k = j, \\ 0, & k \neq i, j. \end{cases}$$

Любая линейно независимая система векторов $\overline{\beta}^{(\pi_1)}, \dots, \overline{\beta}^{(\pi_{n-1})}$, соответствующих парам $\pi_1 = (i_1, j_1), \dots, \pi_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1})$, образует базис в пространстве

$$V = \{\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n : \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0\}.$$

Справедлива следующая теорема об условиях обильности подмодуля I , порожденного в $P[\rho, H)$ функциями $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что существует набор пар $\pi_1 = (i_1, j_1), \dots, \pi_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1})$ такой, что*

- 1) *векторы $\overline{\beta}^{(\pi_1)}, \dots, \overline{\beta}^{(\pi_{n-1})}$ линейно независимы;*
- 2) *для каждой $\pi_k = (i_k, j_k)$, $k = 1, \dots, n-1$, соответствующая пара функций $\mathcal{F}_{i_k}, \mathcal{F}_{j_k}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.*

Тогда подмодуль I обильный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что выполнены условия критерия обильности для подмодуля с n образующими, сформулированного в п. 1.

Выберем и зафиксируем точку z_0 такую, что $\mathcal{F}_l(z_0) \neq 0$, $l = 1, \dots, n$. Так же, как и при доказательстве теоремы 1, можем считать, что $\mathcal{F}_l(z_0) = 1$, $l = 1, \dots, n$.

Согласно доказательству теоремы 1 для пары $\pi_k = (i_k, j_k)$, $k = 1, \dots, n-1$, можно построить последовательности многочленов $\{p_{i_k, \nu}\}$, $\{p_{j_k, \nu}\}$, $\nu \in \mathbb{N}$, такие, что

$$p_{i_k, \nu} \mathcal{F}_{i_k} - p_{j_k, \nu} \mathcal{F}_{j_k} \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty,$$

в $P[\rho, H)$ и $p_{i_k, \nu}(z_0) = p_{j_k, \nu}(z_0) = 1$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Для каждого l определим последовательности многочленов $\{q_{1, \nu}^{(l)}\}, \dots, \{q_{n-1, \nu}^{(l)}\}$:

$$q_{k, \nu}^{(l)} = \begin{cases} p_{l, \nu}, & \text{если } i_k = l, \\ -p_{l, \nu}, & \text{если } j_k = l, \\ 0, & \text{если } i_k \neq l, j_k \neq l. \end{cases}$$

Покажем теперь, что условия критерия, упомянутого в начале доказательства, выполнены, т.е. для любого набора комплексных чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, удовлетворяющего условию $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$, тождественный нуль можно аппроксимировать в топологии $P[\rho, H]$ функциями вида $P_1 \mathcal{F}_1 + \dots + P_n \mathcal{F}_n$, где $P_1, \dots, P_n$ – многочлены и $P_l(z_0) = \alpha_l, l = 1, \dots, n$.

Пусть числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ таковы, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$; тогда вектор $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ принадлежит пространству V и, значит, в силу условия 1) найдутся числа $\lambda_k, k = 1, \dots, n-1$, для которых

$$\bar{\alpha} = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \bar{\beta}^{(\pi_k)}.$$

Положим

$$P_\nu^{(l)} = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k q_{k,\nu}^{(l)}, \quad l = 1, \dots, n.$$

Тогда, учитывая определение $q_{k,\nu}^{(l)}$, будем иметь

$$\begin{aligned} P_\nu^{(1)} \mathcal{F}_1 + \dots + P_\nu^{(n)} \mathcal{F}_n &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k q_{k,\nu}^{(l)} \mathcal{F}_l = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \sum_{l=1}^n q_{k,\nu}^{(l)} \mathcal{F}_l \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (q_{k,\nu}^{(i_k)} \mathcal{F}_{i_k} + q_{k,\nu}^{(j_k)} \mathcal{F}_{j_k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (p_{i_k,\nu} \mathcal{F}_{i_k} - p_{j_k,\nu} \mathcal{F}_{j_k}) \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

в $P[\rho, H]$; при этом так как

$$q_{k,\nu}^{(l)}(z_0) = \beta_l^{(\pi_k)} = \begin{cases} 1, & l = i_k, \\ -1, & l = j_k, \\ 0, & l \neq i_k, j_k, \end{cases}$$

то

$$P_\nu^{(l)}(z_0) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k q_{k,\nu}^{(l)}(z_0) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \beta_l^{(\pi_k)} = \alpha_l, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Все условия критерия выполнены; следовательно, I – обильный подмодуль.

Теорема 2 доказана.

Пусть I – обильный подмодуль в $P[\rho, H]$, не являющийся главным, Λ – множество его нулей. Используя теорему 1, а также результаты работы [17], можно найти в I две функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ с множествами нулей $\Lambda_{\mathcal{F}}, \Lambda_{\mathcal{G}}$ соответственно такие, что $\Lambda_{\mathcal{F}} \cap \Lambda_{\mathcal{G}} = \Lambda$, а подмодуль I' , порожденный в $P[\rho, H]$ функциями $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, обилён (см. доказательство теоремы 2 в [15]). Тогда $I = I'$, т.е. I порождается функциями $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Каждый обильный подмодуль $I \subset P[\rho, H]$ обладает двумя (быть может, совпадающими) образующими.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Если длина каждого максимального интервала, на котором функция $H(\theta)$, определяющая $P[\rho, H)$, принимает конечные значения, не превосходит π/ρ , то сформулированное утверждение имеет место для любого замкнутого подмодуля в $P[\rho, H)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Красичков-Терновский И. Ф. Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I, II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 1, 2. С. 44–66, 309–341.
- [2] Красичков-Терновский И. Ф. Абстрактные приемы локального описания замкнутых подмодулей аналитических функций // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 12. С. 1640–1658.
- [3] Красичков-Терновский И. Ф. О замкнутых идеалах в локально-выпуклых алгебрах целых функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. С. 37–60.
- [4] Красичков-Терновский И. Ф. О замкнутых идеалах в локально-выпуклых алгебрах целых функций. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. С. 1024–1032.
- [5] Красичков-Терновский И. Ф. О замкнутых идеалах в локально-выпуклых алгебрах целых функций. Алгебры минимального типа // Сиб. матем. ж. 1968. Т. 9. № 1. С. 77–96.
- [6] Никольский Н. К. Критерий слабой обратимости в пространствах аналитических функций, выделяемых ограничениями на рост // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1972. Т. 30. С. 106–129.
- [7] Никольский Н. К. Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа. Тр. МИАН. Т. 120. М.: Наука, 1974.
- [8] Dickson D. G. Analytic mean periodic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1964. V. 110. № 2. P. 361–374.
- [9] Ehrenpreis L. Mean periodic functions // Amer. J. Math. 1955. V. 77. № 2. P. 293–326.
- [10] Ehrenpreis L. Fourier Analysis in Several Complex Variables. New-York: Wiley Publ., 1970.
- [11] Ткаченко В. А. Об операторах, коммутирующих с обобщенным дифференцированием // Матем. сб. 1977. Т. 102(144). № 3. С. 435–456.
- [12] Себастьян-и-Сильва. О некоторых классах локально-выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика. 1957. Т. 1. № 1. С. 60–77.
- [13] Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 88(130). № 1. С. 3–30.
- [14] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
- [15] Абузярова Н. Ф. Об одном свойстве подпространств, допускающих спектральный синтез // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 4. С. 3–22.
- [16] Ткаченко В. А. Спектральная теория в пространствах аналитических функционалов для операторов, порождаемых умножением на независимую переменную // Матем. сб. 1980. Т. 112(154). № 3(7). С. 421–466.
- [17] Красичков И. Ф. Сравнение целых функций конечного порядка по распределению их корней // Матем. сб. 1966. Т. 70(112). № 2. С. 198–230.

Башкирский государственный университет, г. Уфа

Поступило
27.01.2000
Исправленный вариант
15.02.2001