Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Г. Авхадиев, Д. В. Маклаков, Новые уравнения типа свертки, получаемые заменой интеграла на максимум, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 1, 18–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm324>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 02:51:57

УДК 517.9

НОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ, ПОЛУЧАЕМЫЕ ЗАМЕНОЙ ИНТЕГРАЛА НА МАКСИМУМ

Ф. Г. Авхадиев, Д. В. Маклаков

Для неотрицательных, непрерывных, π -периодических функций $g(\gamma)$ исследуется нелинейное уравнение

$$\max_{\gamma \in \mathbb{R}} g(\gamma) |\cos(\gamma - \alpha)| = f(\alpha),$$

где $f(\alpha)$ – заданная, $g(\gamma)$ – искомая функции. Это уравнение возникло при решении прикладной задачи о построении гидропрофиля по заданной кавитационной диаграмме. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости, явное описание множества всех решений и теорема сравнения при изменениях правой части. Указаны возможные пути обобщения.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. В статьях [1]–[3] нами дано решение прикладной задачи о построении гидропрофиля по заданной кавитационной диаграмме. В этой задаче возникло новое уравнение типа свертки

$$\max_{\gamma \in \mathbb{R}} g(\gamma) |\cos(\gamma - \alpha)| = f(\alpha), \quad (1)$$

где $f(\alpha)$ – заданная, $g(\gamma)$ – искомая функции.

Уравнение (1) является нелинейным и отличается от обычных уравнений типа свертки заменой интеграла на максимум по переменной интегрирования. Отметим, что для неотрицательных $g(\gamma)$ уравнение (1) можно рассматривать как предельный случай при $p \rightarrow +\infty$ уравнения вида

$$\left(\int |g(\gamma) \cos(\gamma - \alpha)|^p d\gamma \right)^{1/p} = f(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

В настоящей работе мы исследуем разрешимость уравнения (1) в классе π -периодических, непрерывных функций при наиболее широких предположениях относительно правой части, получаем явную формулу обращения и описание множества всех решений, а также доказываем теорему о сравнении решений при изменениях правой части. В заключительной части статьи мы указываем на возможность обобщения уравнения (1) на случай ядра, отличного от $|\cos(\gamma - \alpha)|$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-00366, № 99-01-00169, № 99-01-00173.

2. Основные результаты. Пусть $f(\alpha)$ определена на всей действительной оси $\mathbb{R}$. Решение уравнения (1) будем искать в следующем классе:

$$G = \{g \in C(\mathbb{R}) : g(\gamma) \geq 0, g(\gamma + \pi) = g(\gamma), \gamma \in \mathbb{R}\} \setminus \{0\},$$

т.е. G – множество непрерывных, неотрицательных, π -периодических функций, не обращающихся тождественно в нуль.

Обозначим

$$T = \{f \in G : f(\alpha) > 0, f(\alpha) \text{ тригонометрически выпукла}\},$$

т.е. T – подмножество G , состоящее из строго положительных, тригонометрически выпуклых функций.

Напомним (см. [4], [5]), что функция $f(\alpha)$ называется *тригонометрически выпуклой* (порядка 1), если для любых α_1 и α_2 , $0 < \alpha_2 - \alpha_1 < \pi$, выполняется неравенство

$$f(\alpha) \leq H(\alpha), \quad \alpha_1 < \alpha < \alpha_2, \quad (3)$$

где

$$H(\alpha) = \frac{f(\alpha_1) \sin(\alpha_2 - \alpha) + f(\alpha_2) \sin(\alpha - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (4)$$

Геометрически неравенство (3) означает, что график функции $y = f(\alpha)$ над отрезком $[\alpha_1, \alpha_2]$ лежит не выше “тригонометрической хорды”, определяемой уравнением вида $y = H(\alpha) = a \cos \alpha + b \sin \alpha$ и условиями $H(\alpha_1) = f(\alpha_1)$, $H(\alpha_2) = f(\alpha_2)$.

Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. *Для разрешимости уравнения (1) в классе G необходимо и достаточно, чтобы $f \in T$. Если $f \in T$, то функция*

$$g_m(\gamma; f) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{f(\alpha)}{|\cos(\gamma - \alpha)|} \quad (5)$$

принадлежит классу G и является решением уравнения (1).

Напомним, что если $f \in T$, то всюду существуют левая и правая производные $f'(\alpha \pm 0)$, причем $f'(\alpha - 0) \leq f'(\alpha + 0)$, а точки разрыва самой производной $f'(\alpha)$ составляют не более чем счетное множество (см., например, [4]). Обозначим

$$q(\alpha) = \alpha + \arctg \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}. \quad (6)$$

Условие единственности решения (5) и множество всех решений описывает следующая теорема 2.

ТЕОРЕМА 2. *Формула обращения (5) дает единственное решение уравнения (1) в классе G тогда и только тогда, когда $f(\alpha)$ имеет непрерывную всюду производную. Если $f'(\alpha)$ имеет точки разрыва, то любая функция $g \in G$ будет решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям*

$$\begin{aligned} g(\gamma) &= g_m(\gamma; f), & \gamma \in \mathbb{R} \setminus X_f, \\ g(\gamma) &\leq g_m(\gamma; f), & \gamma \in X_f, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$X_f = \bigcup_{\alpha \in I} (q(\alpha - 0), q(\alpha + 0)),$$

причем объединение берется по множеству I точек разрыва $f'(\alpha)$.

Таким образом, решение $g_m(\gamma; f)$ является максимальным среди всех решений уравнения (1).

Из формулы (5) непосредственно следует, что $g_m(\gamma; f) \geq g_m(\gamma; f^*)$, если $f(\alpha) \geq f^*(\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$. Если же $f(\alpha) \geq f^*(\alpha)$ лишь на некотором отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$ и $0 < \alpha_2 - \alpha_1 < \pi$, то сравнение максимальных решений становится нетривиальной задачей. Тем не менее, сравнение оказывается возможным и в этом случае.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть f и $f^* \in T$, $q(\alpha) = \alpha + \arctg[f'(\alpha)/f(\alpha)]$. Если $f(\alpha) \geq f^*(\alpha)$ при $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, то*

$$g_m(\gamma; f) \geq g_m(\gamma; f^*) \quad (8)$$

для всех $\gamma \in [q(\alpha_1 - 0), q(\alpha_2 + 0)]$.

3. Доказательство теорем 1–3. Нам потребуется ряд свойств функции $q(\alpha)$, определяемой соотношением (6). Из известных свойств тригонометрически выпуклых функций непосредственно получаем: если $f \in T$, то

- а) $q(\alpha)$ определена и непрерывна всюду в $\mathbb{R}$, за исключением разве лишь счетного множества точек I ;
- б) в любой точке $\alpha \in I$ существуют конечные пределы справа $q(\alpha + 0)$ и слева $q(\alpha - 0)$, причем $q(\alpha - 0) \leq q(\alpha + 0)$, функция $q(\alpha + 0)$ непрерывна справа, а функция $q(\alpha - 0)$ непрерывна слева.

Докажем следующее свойство положительных тригонометрически выпуклых функций.

ЛЕММА 1. *Пусть $f \in T$. Тогда функция $q(\alpha)$ является неубывающей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам достаточно показать, что для любых α_1 и $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha_2 - \alpha_1 = \Delta < \pi/2$, выполняется неравенство

$$q(\alpha_2 - 0) \geq q(\alpha_1 + 0). \quad (9)$$

Через точки $(\alpha_1, f(\alpha_1))$ и $(\alpha_2, f(\alpha_2))$ проведем тригонометрическую хорду $H(\alpha)$, задаваемую уравнением (4). Так как производные $f'(\alpha_1 + 0)$ и $f'(\alpha_2 - 0)$ существуют, то в силу (3) имеем

$$H'(\alpha_1) \geq f'(\alpha_1 + 0), \quad H'(\alpha_2) \leq f'(\alpha_2 - 0).$$

Отсюда вытекает, что

$$f'(\alpha_1 + 0) \leq -f(\alpha_1) \operatorname{ctg} \Delta + \frac{f(\alpha_2)}{\sin \Delta}, \quad (10)$$

$$f'(\alpha_2 - 0) \geq -\frac{f(\alpha_1)}{\sin \Delta} + f(\alpha_2) \operatorname{ctg} \Delta. \quad (11)$$

Доказываемое неравенство (9) эквивалентно соотношению

$$\alpha_2 - \alpha_1 \geq \arctg \frac{f'(\alpha_1 + 0)}{f(\alpha_1)} - \arctg \frac{f'(\alpha_2 - 0)}{f(\alpha_2)}. \quad (12)$$

Если правая часть неравенства (12) меньше или равна нулю, то доказывать нечего. Поэтому предположим, что

$$\frac{f'(\alpha_1 + 0)}{f(\alpha_1)} > \frac{f'(\alpha_2 - 0)}{f(\alpha_2)}. \quad (13)$$

Тогда правая часть (12) лежит в интервале $(0, \pi)$, и мы можем взять котангенсы от обеих частей. С учетом (13) доказываемое неравенство примет вид

$$\operatorname{ctg}(\alpha_2 - \alpha_1) \left[\frac{f'(\alpha_1 + 0)}{f(\alpha_1)} - \frac{f'(\alpha_2 - 0)}{f(\alpha_2)} \right] \leq 1 + \frac{f'(\alpha_1 + 0)f'(\alpha_2 - 0)}{f(\alpha_1)f(\alpha_2)}. \quad (14)$$

В силу строгой положительности $f(\alpha)$ из (10) и (11) получаем

$$\frac{f'(\alpha_1 + 0)}{f(\alpha_1)} + \operatorname{ctg} \Delta \leq \frac{f(\alpha_2)}{f(\alpha_1)} \cdot \frac{1}{\sin \Delta}, \quad (15)$$

$$-\frac{f'(\alpha_2 - 0)}{f(\alpha_2)} + \operatorname{ctg} \Delta \leq \frac{f(\alpha_1)}{f(\alpha_2)} \cdot \frac{1}{\sin \Delta}. \quad (16)$$

Перемножая (15) и (16), получаем требуемое неравенство (14). Отметим, что перемножение корректно, так как левые части неравенств (15) и (16) не могут быть одновременно меньше нуля в силу (13). Лемма 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если $q(\alpha_2 - 0) = q(\alpha_1 + 0) = \gamma$ для некоторых чисел α_1 и $\alpha_2 > \alpha_1$, то для всех $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ имеем

$$|\gamma - \alpha| < \frac{\pi}{2}, \quad f(\alpha) = A \cos(\gamma - \alpha),$$

где A — некоторая положительная постоянная.

Действительно, в силу монотонности $q(\alpha)$ получаем

$$q(\alpha) \equiv \gamma, \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2.$$

Следовательно, $|\gamma - \alpha| < \pi/2$ и $f'(\alpha) = f(\alpha) \operatorname{tg}(\gamma - \alpha)$ для $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, т.е. $f(\alpha)$ имеет вид $A \cos(\gamma - \alpha)$, где $A > 0$, что и требовалось.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in T$. Тогда

1) для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ существует число $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ такое, что

$$q(\alpha_0 - 0) \leq \gamma \leq q(\alpha_0 + 0); \quad (17)$$

2) если $\gamma \in [q(\alpha_1 - 0), q(\alpha_1 + 0)]$ для некоторого $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, то

$$g_m(\gamma; f) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{f(\alpha)}{|\cos(\gamma - \alpha)|} = \frac{f(\alpha_1)}{\cos(\gamma - \alpha_1)}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть γ – фиксированное число, и пусть α_0 – точка, в которой функция $f(\alpha)/|\cos(\gamma - \alpha)|$ достигает своего минимума по α . Тогда $\cos(\gamma - \alpha_0) \neq 0$ и в силу π -периодичности $f(\alpha)$ можно считать, что $|\gamma - \alpha_0| < \pi/2$.

Неотрицательная функция

$$S(\alpha) = \ln f(\alpha) - \ln |\cos(\gamma - \alpha)| - \ln g_m(\gamma; f)$$

достигает при $\alpha = \alpha_0$ своего минимума. Поэтому $S'(\alpha_0 + 0) \geq 0$ и $S'(\alpha_0 - 0) \leq 0$, т.е.

$$\frac{f'(\alpha_0 + 0)}{f(\alpha_0)} \geq \operatorname{tg}(\gamma - \alpha_0), \quad \frac{f'(\alpha_0 - 0)}{f(\alpha_0)} \leq \operatorname{tg}(\gamma - \alpha_0),$$

что равносильно (17).

2) Если $\alpha_1 = \alpha_0$, то утверждение 2) следует из доказательства части 1). Пусть $\alpha_0 > \alpha_1$. Тогда в силу леммы 1 и условия 2) леммы 2

$$\gamma \leq q(\alpha_1 + 0) \leq q(\alpha_0 - 0).$$

Но в силу (17) $\gamma \geq q(\alpha_0 - 0)$; следовательно,

$$q(\alpha_0 - 0) = q(\alpha_1 + 0) = \gamma.$$

Тогда $f(\alpha) = A \cos(\gamma - \alpha)$ при $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_0]$ согласно следствию к лемме 1. Таким образом,

$$g_m(\gamma; f) = \frac{f(\alpha_0)}{\cos(\gamma - \alpha_0)} = \frac{f(\alpha_1)}{\cos(\gamma - \alpha_1)} = A,$$

т.е. (18) доказано. Случай $\alpha_0 < \alpha_1$ исследуется аналогично. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Если $f \in T$, то функция $g_m(\gamma; f)$ принадлежит классу G и является решением уравнения (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность и π -периодичность функции $g_m(\gamma; f)$, а также свойства $g_m(\gamma; f) \geq 0$, $g_m(\gamma; f) \neq 0$ очевидны. Остается показать, что

$$f(\alpha) = \max_{\gamma} |\cos(\gamma - \alpha)| g_m(\gamma; f). \quad (19)$$

Из определения (5) функции $g_m(\gamma; f)$ непосредственно следует, что для любых γ и $\alpha \in \mathbb{R}$

$$|\cos(\gamma - \alpha)| g_m(\gamma; f) \leq f(\alpha). \quad (20)$$

Пусть теперь $\alpha = \alpha_1$ фиксировано, а $\gamma = q(\alpha_1 + 0)$. Согласно лемме 2

$$|\cos(\gamma - \alpha_1)| g_m(\gamma; f) = f(\alpha_1). \quad (21)$$

Очевидно, из (20) и (21) следует (19). Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть решение $g(\gamma)$ уравнения (1) в классе G существует, т.е. $g \in G$ и

$$f(\alpha) = \max_{\gamma} V(\gamma, \alpha), \quad V(\gamma, \alpha) = g(\gamma) |\cos(\gamma - \alpha)|.$$

Из π -периодичности $|\cos x|$ сразу следует π -периодичность функции $f(\alpha)$.

Далее, функция $f(\alpha)$ должна быть строго положительной. Действительно, если $f(\alpha) = 0$ для некоторой точки α , то $g(\gamma) = 0$ всюду за исключением точек $\gamma = \alpha + \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $g(\gamma) \equiv 0$ в силу непрерывности, что противоречит условию $g \in G$.

Функция $|\cos(\gamma - \alpha)|$ является тригонометрически выпуклой по α . Поэтому для любых α_1 и α_2 , $0 < \alpha_2 - \alpha_1 < \pi$, и любом фиксированном γ

$$V(\gamma, \alpha) \leq \frac{V(\gamma; \alpha_1) \sin(\alpha_2 - \alpha) + V(\gamma; \alpha_2) \sin(\alpha - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2.$$

Беря от обеих частей максимум по γ , приходим к нужному неравенству (6) для функции $f(\alpha)$. Таким образом, необходимость условия $f \in T$ для разрешимости уравнения (1) в классе G доказана.

Достаточность условия $f \in T$ для разрешимости и вторая часть теоремы 1 доказаны в лемме 3. Итак, теорема 1 доказана полностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В силу леммы 1 для различных $\alpha \in I$ множества $(q(\alpha - 0), q(\alpha + 0))$ представляют собой непересекающиеся между собой интервалы. Таким образом, для $f \in T$ множество

$$X_f = \bigcup_{\alpha \in I} (q(\alpha - 0), q(\alpha + 0))$$

является открытым, а множество $D_f = \mathbb{R} \setminus X_f$ является замкнутым. Отметим, что D_f представляет собой область значений функций $q(\alpha \pm 0)$.

Если $f \in T$ и $f'(\alpha)$ не имеет точек разрыва, то $D_f = \mathbb{R}$ и утверждение о единственности решения вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 4. Если g и g^* принадлежат классу G и являются решениями уравнения (1) с одной и той же правой частью $f \in T$, то $g(\gamma) = g^*(\gamma)$ для всех $\gamma \in D_f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma_0 \in D_f$. Тогда либо $\gamma_0 = q(\alpha_0 + 0)$, либо $\gamma_0 = q(\alpha_0 - 0)$ для некоторого $\alpha_0 \in \mathbb{R}$.

Предположим сначала, что $\alpha_0 \notin I$. Множество I не более чем счетно, поэтому в силу леммы 2 такие точки $\gamma_0 \in D_f$ существуют. Пусть $|\cos(\gamma - \alpha_0)|g(\gamma)$ достигнет своего максимума в точке γ_1 , а $|\cos(\gamma - \alpha_0)|g^*(\gamma)$ — в точке γ_2 . Можно считать, что $|\gamma_1 - \alpha_0| < \pi/2$ и $|\gamma_2 - \alpha_0| < \pi/2$. Функции двух переменных

$$\begin{aligned} S(\gamma, \alpha) &= \ln f(\alpha) - \ln |\cos(\gamma - \alpha)| - \ln g(\gamma), \\ S^*(\gamma, \alpha) &= \ln f(\alpha) - \ln |\cos(\gamma - \alpha)| - \ln g^*(\gamma) \end{aligned}$$

достигают тогда своих минимумов соответственно в точках (γ_1, α_0) и (γ_2, α_0) . Следовательно,

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}(\gamma_1, \alpha_0) = 0, \quad \frac{\partial S^*}{\partial \alpha}(\gamma_2, \alpha_0) = 0,$$

что означает соответственно

$$\frac{f'(\alpha_0)}{f(\alpha_0)} = \operatorname{tg}(\gamma_1 - \alpha_0), \quad \frac{f'(\alpha_0)}{f(\alpha_0)} = \operatorname{tg}(\gamma_2 - \alpha_0).$$

Отсюда получаем

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_0 = q(\alpha_0)$$

и с учетом леммы 2

$$g(\gamma_0) = \frac{f(\alpha_0)}{\cos(\gamma_0 - \alpha_0)} = g^*(\gamma_0).$$

Случай $\alpha_0 \in I$ получается предельным переходом. Действительно, пусть, например, $\gamma_0 = q(\alpha_0 + 0)$. Так как I не более чем счетно и $q(\alpha + 0)$ непрерывна справа, то можно указать последовательность $\{\alpha_n\}$ такую, что $\alpha_n \notin I$, $\alpha_n > \alpha$, $\lim \alpha_n = \alpha$, $\gamma_n = q(\alpha_n)$, $\lim q(\alpha_n) = q(\alpha + 0) = \gamma_0$. По доказанному выше

$$g(\gamma_n) = \frac{f(\alpha_n)}{\cos(\gamma_n - \alpha_n)} = g^*(\gamma_n).$$

Отсюда и следует требуемое равенство в силу непрерывности функций $g(\gamma)$, $g^*(\gamma)$ и $f(\alpha)$. Лемма 4 доказана.

Докажем теперь вторую часть теоремы 2. Пусть $g \in G$ и $g(\gamma)$ является решением уравнения (1). Тогда для любых γ и $\alpha \in \mathbb{R}$

$$g(\gamma) \leq \frac{f(\alpha)}{|\cos(\gamma - \alpha)|};$$

в частности,

$$g(\gamma) \leq \min_{\alpha} \frac{f(\alpha)}{|\cos(\gamma - \alpha)|} = g_m(\gamma; f).$$

Кроме того, в силу лемм 3 и 4 $g(\gamma) = g_m(\gamma; f)$, если $\gamma \in \mathbb{R} \setminus X_f$. Тем самым, доказана необходимость условий (7).

Докажем достаточность. Пусть $g(\gamma) \in G$ и выполняются условия (7). Тогда для любого γ и $\alpha \in \mathbb{R}$

$$g(\gamma)|\cos(\gamma - \alpha)| \leq g_m(\gamma; f)|\cos(\gamma - \alpha)| \leq f(\alpha).$$

С другой стороны, для любого $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ положим $\gamma_1 = q(\alpha_1 + 0)$. Тогда $\gamma_1 \in D_f = \mathbb{R} \setminus X_f$, т.е. $g(\gamma_1) = g_m(\gamma_1; f)$. По лемме 2

$$g(\gamma_1)|\cos(\gamma_1 - \alpha_1)| = g_m(\gamma_1; f)|\cos(\gamma_1 - \alpha_1)| = f(\alpha_1),$$

т.е. $g(\gamma)$ является решением уравнения (1). Таким образом, теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Докажем сначала, что для всех $\gamma \in [q(\alpha_1 - 0), q(\alpha_2 + 0)]$ имеет место равенство

$$\min_{\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2} \frac{f(\alpha)}{|\cos(\gamma - \alpha)|} = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{f(\alpha)}{|\cos(\gamma - \alpha)|} = g_m(\gamma; f). \quad (22)$$

По лемме 2 для фиксированного

$$\gamma \in [q(\alpha_1 - 0), q(\alpha_2 + 0)] \quad (23)$$

существует α_0 такое, что

$$q(\alpha_0 - 0) \leq \gamma \leq q(\alpha_0 + 0). \quad (24)$$

Если $\alpha_0 \in [\alpha_1, \alpha_2]$, то (22) непосредственно следует из (18).

Пусть $\alpha_0 < \alpha_1$. Тогда, с одной стороны, в силу (23) и монотонности $q(\alpha)$ имеем

$$q(\alpha_0 + 0) \leq q(\alpha_1 - 0) \leq \gamma,$$

а, с другой стороны, в силу (24) имеем $q(\alpha_0 + 0) \geq \gamma$. Следовательно, $q(\alpha_1 - 0) = \gamma$ и на основании (18) минимум функции $f(\alpha)/|\cos(\alpha - \gamma)|$ по $\alpha \in \mathbb{R}$ достигается при $\alpha = \alpha_1$, т.е. снова (22) вытекает из (18). Аналогично исследуется случай $\alpha_0 > \alpha_2$.

Итак, равенство (22) для $\gamma \in [q(\alpha_1 - 0), q(\alpha_2 + 0)]$ обосновано. Доказательство теоремы 3 завершается теперь следующим образом.

Пусть $f(\alpha) \geq f^*(\alpha)$ при $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, причем f и $f^* \in T$. Тогда имеет место неравенство

$$\min_{\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2} \frac{f(\alpha)}{|\cos(\gamma - \alpha)|} \geq \min_{\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2} \frac{f^*(\alpha)}{|\cos(\gamma - \alpha)|}, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \quad (25)$$

Из (22), (25) и очевидного неравенства

$$\min_{\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2} \frac{f^*(\alpha)}{|\cos(\gamma - \alpha)|} \geq \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{f^*(\alpha)}{|\cos(\gamma - \alpha)|} = g_m(\gamma; f^*), \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

следует доказываемое неравенство $g_m(\gamma; f) \geq g_m(\gamma; f^*)$ для всех $\gamma \in [q(\alpha_1 - 0), q(\alpha_2 + 0)]$. Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из (5) следует, что для $f(\alpha) > 0$

$$\frac{1}{g_m(\gamma; f)} = \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{|\cos(\gamma - \alpha)|}{f(\alpha)}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

В силу тригонометрической выпуклости $|\cos x|$ получаем, что

$$\frac{1}{g_m(\gamma; f)} \in T.$$

Следовательно, максимальное решение $g_m(\gamma; f) > 0$ для всех $\gamma \in \mathbb{R}$ и $g_m(\gamma; f)$ имеет непрерывную почти всюду производную.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Класс функций G может быть расширен посредством исключения условий $g(\gamma) \geq 0$ и $g(\gamma) \neq 0$. При этом к классу правых частей T добавляется всего одна функция $f(\alpha) \equiv 0$.

В самом деле, если $f(\alpha) = 0$ при некотором α , то в силу непрерывности $g(\gamma)$ получаем $g(\gamma) \leq 0$. Следовательно, $f(\alpha) \equiv 0$, так как $\cos(\gamma - \alpha) = 0$ при любом $\gamma = \alpha + \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. По той же причине не может быть $f(\alpha) < 0$ при каком-либо α .

Таким образом, если допустить, что $f(\alpha) \equiv 0$, то решением уравнения (1) будет любая неположительная функция $g(\gamma)$. Если же $f(\alpha) > 0$ и допускается, что $g(\gamma) < 0$, то множество непрерывных, π -периодических решений полностью описывается условиями (7), что следует из способа доказательства теоремы 2.

4. Заключение. Мы уже отметили, что уравнение (1) возникло в прикладной задаче. Отвлекаясь от физического смысла задачи, можно попытаться рассмотреть уравнения более общего вида

$$\max_{\gamma \in \mathbb{R}} g(\gamma) K(\gamma - \alpha) = f(\alpha). \quad (26)$$

Пусть $K(\alpha)$ и $f(\alpha)$ – периодические, непрерывные функции с одним и тем же периодом. Предположим, что $K(\alpha) \geq 0$ и $K(\alpha) = 0$ лишь в конечном числе точек на периоде. Рассмотрим функцию

$$g_m(\gamma; f) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{f(\alpha)}{K(\gamma - \alpha)}.$$

Обозначим через $L(\gamma)$ множество точек, в которых функция $f(\alpha)/K(\gamma - \alpha)$ достигает своего минимума по α при фиксированном γ , и пусть

$$M = \bigcup_{\gamma \in \mathbb{R}} L(\gamma).$$

Ясно, что если $g(\gamma)$ есть решение уравнения (26), то $g(\gamma) \leq g_m(\gamma; f)$ (см. доказательство необходимости условий (7)). Кроме того, при любых γ и α

$$g_m(\gamma; f) K(\gamma - \alpha) \leq f(\alpha). \quad (27)$$

Равенство в (27) возможно тогда и только тогда, когда $\alpha \in M$. Отсюда следует, что функция $g_m(\gamma; f)$ будет решением уравнения (26), только если $M = \mathbb{R}$.

В данной статье мы доказали, что если $K(\alpha) = |\cos(\alpha)|$, то $M = \mathbb{R}$. Очевидно, что свойства косинуса не уникальны и что существует класс ядер, для которых выполняется указанное условие. Вопрос об описании этого класса, а также класса соответствующих правых частей $f(\alpha)$ может быть предметом дальнейших исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Авхадиев Ф. Г., Маклаков Д. В. Критерий разрешимости задачи построения профилей по заданной кавитационной диаграмме // Изв. вузов. Матем. 1994. № 7. С. 3–12.
- [2] Авхадиев Ф. Г., Маклаков Д. В. Аналитический метод построения гидропрофилей по заданной кавитационной диаграмме // Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 2. С. 195–197.
- [3] Avhadiev F. G., Maklakov D. V. A theory of pressure envelope for hydrofoils // J. Ship Technology Research. 1995. V. 42. № 2. P. 81–102.
- [4] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [5] Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.

(Ф. Г. Авхадиев) НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева
при Казанском государственном университете

Поступило
03.04.2000

(Д. В. Маклаков) Казанская государственная архитектурно-строительная академия
E-mail: Farit.Avhadiev@ksu.ru, Dmitri.Maklakov@ksu.ru