Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Арутюнов, Положительность квадратичных форм на пересечении квадратик, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 1, 27–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm325>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 09:56:54

УДК 517.9

ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ НА ПЕРЕСЕЧЕНИИ КВАДРИК

А. В. Арутюнов

Исследуется проблема положительной определенности квадратичной формы на конусе, определяемом как множество тех точек, в которых заданные квадратичные формы обращаются в нуль или неотрицательны. Получены необходимые и достаточные условия положительности квадратичной формы на этом конусе. Эти результаты применены к исследованию достаточных условий экстремума второго порядка в аномальных задачах.

Библиография: 7 названий.

Пусть даны $(k+1)$ квадратных $n \times n$ симметричных матриц Q_i , $i = 0, \dots, k$, определяющих на $\mathbb{R}^n$ квадратичные формы $q_i: q_i(x) = \langle Q_i x, x \rangle$. Требуется получить условия, при которых

$$\begin{aligned} q_0(x) &> 0 \quad \forall x: q_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k_1, \\ q_i(x) &= 0, \quad i = k_1 + 1, \dots, k, \quad x \neq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

или, иными словами, когда форма q_0 положительно определена на конусе

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n: q_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k_1, \quad q_i(x) = 0, \quad i = k_1 + 1, \dots, k\}.$$

Здесь $n, k_1 \leq k$ – заданные натуральные числа, причем k_1 может быть нулем (что соответствует отсутствию ограничений типа неравенств в (1)). Эта задача представляет интерес как сама по себе [1], [2], так и ее применение к теории аномальных экстремальных задач [3] и к некоторым прикладным задачам (библиографию см. в [4]). В этой заметке содержится вывод соответствующих условий и их приложение к теории аномальных экстремальных задач.

1. Критерий положительности квадратичной формы. Очевидно, что условие (1) равносильно тому, что в задаче минимизации

$$q_0(x) \rightarrow \min, \quad q_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k_1, \quad q_i(x) = 0, \quad i = k_1 + 1, \dots, k,$$

точка $x_* = 0$ является строгим локальным минимумом. Эта точка является аномальной (см. [3]) в рассматриваемой задаче. Применим к ней необходимые условия второго порядка из [3], [5], справедливые для аномальных задач.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01135.

Для целого $r \geq 0$ через Λ_r обозначим множество $(k+1)$ -мерных векторов $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$, для которых

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, k_1, \quad |\lambda| = 1, \quad \text{ind}(\lambda q) \leq r.$$

Здесь $q = (q_0, \dots, q_k)$, $\lambda q = \sum_{i=0}^k \lambda_i q_i$, а ind это (отрицательный) индекс квадратичной формы (равный количеству отрицательных собственных значений определяющей ее симметричной матрицы). Тогда множество Λ_{k-1} непусто и

$$\max_{\lambda \in \Lambda_{k-1}} \langle \lambda, q(x) \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Если ограничения типа неравенств отсутствуют, т.е. $k_1 = 0$, то (2) – это просто теорема 2 из [5]. (В общем случае она доказывается с использованием схемы из [3, с. 30–35] аналогично.)

Однако среди векторов λ , принадлежащих Λ_{k-1} , могут оказаться и те, для которых $\lambda_0 = 0$. А это приводит к тому, что условия (2) перестают зависеть от формы q_0 , что может сделать их неинформативными. Так обязательно произойдет, если $\text{conv } \Lambda_{k-1}$ – выпуклая оболочка множества Λ_{k-1} – содержит нуль, так как в этом случае, очевидно, (2) выполняется автоматически. Вот соответствующий пример: $k = 2$, $k_1 = 0$, $q_1(x) = x_1 x_2$, а формы q_0 и q_2 произвольны. Очевидно, Λ_1 содержит отрезок $(0, \lambda_1, 0)$, $|\lambda_1| \leq 1$, и значит (2) выполняется для любых q_0, q_2 и, в частности, для которых (1) нарушается (например для $q_0(x) = -|x|^2$, $q_2 = 0$).

Наша цель – доказать, что если форма q_0 положительна на конусе K , то в (2) можно ограничиться лишь теми $\lambda \in \Lambda_{k-1}$, для которых $\lambda_0 > 0$. Это позволяет усилить необходимые условия (2) до достаточных.

Положим

$$\Lambda_r^+ = \{\lambda \in \Lambda_r : \lambda_0 > 0\}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы форма q_0 была положительно определена на конусе K , необходимо и достаточно, чтобы множество Λ_{k-1}^+ было непусто и выполнялось*

$$\forall x \neq 0 \quad \exists \lambda = \lambda(x) \in \Lambda_{k-1}^+ : \langle \lambda, q(x) \rangle > 0. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность* очевидна. Докажем *необходимость*. В силу (1) существует такое $\varepsilon > 0$, что для квадратичной формы q_0^ε , определенной по формуле $q_0^\varepsilon(x) = q_0(x) - \varepsilon|x|^2$, имеет место

$$q_0^\varepsilon(x) \geq \varepsilon|x|^2 \quad \forall x \in K. \quad (4)$$

Зафиксируем произвольное $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$. Рассмотрим задачу минимизации

$$\begin{cases} q_0^\varepsilon(x) - \chi q_0^\varepsilon(h) \rightarrow \min, \\ q_i(x) - \chi q_i(h) \leq 0, & i = 1, \dots, k_1, \\ q_i(x) - \chi q_i(h) = 0, & i = k_1 + 1, \dots, k, \quad 0 \leq \chi \leq 1. \end{cases}$$

Минимум в этой задаче ищется по переменным $(x, \chi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$. Из (4) легко вытекает, что инфимум в ней конечен и достигается. Среди точек минимума $(\bar{x}, \bar{\chi})$ найдется такая,

что $\bar{\chi} > 0$. (Действительно, если в точке минимума $\bar{\chi} = 0$, то в силу (4) $\bar{x} = 0$ и, следовательно, точка $x = h$, $\chi = 1$ также реализует минимум.)

Итак, возьмем точку минимума $(\bar{x}, \bar{\chi})$, в которой $\bar{\chi} > 0$. Рассмотрим семейство задач минимизации, зависящее от натурального параметра j :

$$f_j(x, \chi) \rightarrow \min, \quad 0 \leq \chi \leq 1,$$

где

$$f_j(x, \chi) = q_0^\varepsilon(x) - \chi q_0^\varepsilon(h) + j \left(\sum_{i=1}^{k_1} \max(q_i(x) - \chi q_i(h), 0)^4 + \sum_{i=k_1+1}^k (q_i(x) - \chi q_i(h))^4 \right) + (\chi - \bar{\chi})^2.$$

Задачи этого семейства назовем *j-задачами*.

При каждом j минимум в j -задаче достигается. Докажем это. Действительно, предположим противное. Тогда для j -задачи существует такая минимизирующая последовательность $\{x_l, \chi_l\}$, что

$$f_j(x_l, \chi_l) < 0 \quad \forall l, \quad |x_l| \rightarrow \infty, \quad |x_l|^{-1} x_l \rightarrow z, \quad l \rightarrow \infty,$$

для некоторого единичного вектора z . Деля выражение для f_j на $|x_l|^4$, используя ограниченность последовательности $\{\chi_l\}$ и переходя к пределу при $l \rightarrow \infty$, получаем

$$j \left(\sum_{i=1}^{k_1} \max(q_i(z), 0)^4 + \sum_{i=k_1+1}^k q_i(z)^4 \right) \leq 0 \implies z \in K.$$

Поэтому в силу (4) $\exists \delta > 0$: $q_0^\varepsilon(|x_l|^{-1} x_l) \geq \delta$ при больших l . Деля выражение для f_j на $|x_l|$, получаем, что $f_j(x_l, \chi_l) > 0$ при больших l . Это противоречие доказывает нужное утверждение.

Таким образом, минимум в j -задаче достигается в некоторой точке (x_j, χ_j) . Более того, аналогично доказывается (это стандартное рассуждение метода возмущений (см. [3, с. 31])), что $x_j \rightarrow 0$, $\chi_j \rightarrow \bar{\chi}$, $j \rightarrow \infty$.

Выберем такое достаточно большое $\bar{j}$, что

$$\chi_{\bar{j}} > 0, \quad 2|\chi_{\bar{j}} - \bar{\chi}| < \varepsilon|h|^2. \quad (5)$$

При $j = \bar{j}$ выпишем в рассматриваемой задаче необходимые условия минимума первого и второго порядка в точке (x_j, χ_j) . Положим $f = f_{\bar{j}}$. Учитывая, что $\chi_j > 0$, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \chi}(x_j, \chi_j) = -q_0^\varepsilon(h) - \sum_{i=1}^k \lambda_i q_i(h) + 2(\chi_j - \bar{\chi}) \leq 0,$$

откуда

$$q_0^\varepsilon(h) + \sum_{i=1}^k \lambda_i q_i(h) \geq -2|\chi_j - \bar{\chi}|, \quad (6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_j, \chi_j) = 2 \left(Q_0^\varepsilon + \sum_{i=1}^k \lambda_i Q_i \right) x_j = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_j, \chi_j)[\xi, \xi] &= 2 \left(Q_0^\varepsilon + \sum_{i=1}^k \lambda_i Q_i \right) [\xi, \xi] \\ &+ 12j \left(\sum_{i=1}^{k_1} \max(q_i(x_j) - \chi_j q_i(h), 0)^2 \langle Q_i x_j, \xi \rangle^2 \right. \\ &\left. + \sum_{i=k_1+1}^k (q_i(x_j) - \chi_j q_i(h))^2 \langle Q_i x_j, \xi \rangle^2 \right) \geq 0 \quad \forall \xi, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_i &= 4 \max(q_i(x_j) - \chi_j q_i(h), 0)^3 \geq 0, \quad i = 1, \dots, k_1, \\ \lambda_i &= 4(q_i(x_j) - \chi_j q_i(h))^3, \quad i = k_1 + 1, \dots, k, \quad Q_0^\varepsilon = Q_0 - \varepsilon E, \end{aligned}$$

а E – единичная матрица.

Введем в рассмотрение подпространство

$$\tilde{\Pi} = \{ \xi : \langle Q_i x_j, \xi \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, k \}$$

и рассмотрим два случая.

Пусть вначале $x_j \in \tilde{\Pi}$. Тогда

$$\langle Q_i x_j, x_j \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, k \implies x_j \in K.$$

Умножая скалярно равенство (7) на вектор x_j , получаем $q_0^\varepsilon(x_j) = 0$, откуда в силу (4)

$$x_j = 0 \implies Q_i x_j = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

и, следовательно, в силу (8) квадратичная форма q_0^ε неотрицательно определена. Поэтому (3) выполняется при $\lambda = (1, 0, \dots, 0)$.

Рассмотрим второй случай: $x_j \notin \tilde{\Pi}$. Возьмем вектор

$$\lambda = |\hat{\lambda}|^{-1} \hat{\lambda}, \quad \text{где } \hat{\lambda} = (1, \lambda_1, \dots, \lambda_k).$$

Из неравенств (5), (6) и определения формы q_0^ε вытекает, что $\langle \lambda, q(h) \rangle > 0$. Для доказательства (3) нам осталось показать, что $\lambda \in \Lambda_{k-1}$ (ведь $\lambda_0 > 0$ по построению). Сделаем это.

Снова рассмотрим подпространство $\tilde{\Pi}$. Его коразмерность, очевидно, не превышает k и в силу (8) квадратичная форма

$$\bar{q} = q_0^\varepsilon + \sum_{i=1}^k \lambda_i q_i$$

неотрицательно определена на этом подпространстве. Обозначим через Π алгебраическую сумму подпространства $\tilde{\Pi}$ и линейной оболочки вектора x_j . Тогда коразмерность подпространства Π не превышает $k-1$, так как по сделанному предположению $x_j \notin \tilde{\Pi}$. В то же время форма $\bar{q}$ неотрицательна на этом же подпространстве Π , так как она неотрицательна на $\tilde{\Pi}$, и в силу (7) матрица этой формы аннулирует вектор x_j . Следовательно, $\lambda \in \Lambda_{k-1}$. Теорема доказана.

Сразу же отметим, что теорема 1 является весьма далеким развитием теоремы Финслера (см., например, [4]), которая соответствует случаю $k = 1$. Для $k \leq 2$ близкие вопросы изучены в [5] (там же имеется библиография).

Обсудим полученный результат.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для $\varepsilon > 0$ положим

$$\Lambda_r^\varepsilon = \{\lambda \in \Lambda_r : \lambda_0 \geq \varepsilon\}.$$

Если форма q_0 положительно определена на K , то существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\max_{\lambda \in \Lambda_{k-1}^\varepsilon} \langle \lambda, q(x) \rangle \geq \varepsilon |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Докажем это. Пусть S – единичная сфера из $\mathbb{R}^n$. Возьмем произвольный вектор $\bar{x} \in S$. По теореме 1 для него существует такое $\lambda(\bar{x}) \in \Lambda_{k-1}^+$, что $\langle \lambda(\bar{x}), q(\bar{x}) \rangle > 0$. Поэтому для всех $x \in S$ из некоторой окрестности $O(\bar{x})$ точки $\bar{x}$ имеет место

$$\langle \lambda(\bar{x}), q(x) \rangle > \frac{1}{2} \langle \lambda(\bar{x}), q(\bar{x}) \rangle.$$

Покроем компакт S такими окрестностями. Выбирая из них конечное подпокрытие, найдем такие $x_j \in S$, $j = 1, \dots, j_1$, что объединение $O(x_j)$ по всем j покрывает S . Остается взять

$$\varepsilon = \min \left\{ \lambda_0(h_j), j = 1, \dots, j_1, \frac{1}{2} \langle \lambda(x_j), q(x_j) \rangle \right\}.$$

Ясно, что построенное число $\varepsilon > 0$ является искомым.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Необходимость в теореме 1 нельзя обобщить на случай, когда форма q_0 всего лишь неотрицательно определена на конусе K , даже заменив в (3) строгое неравенство на нестрогое. Дело в том, что если q_0 неотрицательна на K , то множество Λ_{k-1}^+ тем не менее может оказаться пустым. Вот соответствующий простой пример:

$$k = 1, \quad k_1 = 0, \quad n = 2, \quad q_0(x) = x_1 x_2, \quad q_1(x) = x_1^2.$$

Очевидно, что $q_0(x) = 0 \quad \forall x: q_1(x) = 0$, однако $\Lambda_0^+ = \emptyset$.

В этом примере форма q_1 неотрицательна. Приведем менее тривиальный пример, в котором никакая нетривиальная линейная комбинация форм q_i не является знакоопределенной. Пусть

$$k = 3, \quad k_1 = 0, \quad n = 2m, \quad m > 4, \quad q_0(x) = \sum_{j=1}^m x_j x_{j+m},$$

$$q_1(x) = x_1 x_2, \quad q_2(x) = x_1^2 - x_2^2, \quad q_3(x) = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_m^2.$$

Здесь также $q_0(x) = 0 \quad \forall x \in K$, однако множество Λ_2^+ пусто.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. К сожалению, утверждение теоремы 1 существенно конечномерно. А именно, необходимость в ней нельзя обобщить на случай, когда формы q_i определены на бесконечномерном пространстве. Вот соответствующий простой пример. Пусть X – гильбертово пространство, $A: X \rightarrow X$ – заданный линейный, симметричный, компактный, положительно определенный оператор, $q_0(x) = -|x|^2$, $q_1(x) = \langle Ax, x \rangle$. Тогда конус $\{x: q_1(x) = 0\}$ нулевой и, значит, форма q_0 положительна на нем. В то же время множество Λ_0^+ пусто, так как индекс формы $q_0 + \lambda_1 q_1$ бесконечен для любого λ_1 .

Зададимся таким вопросом. Когда система квадратичных равенств и неравенств

$$q_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k_1, \quad q_i(x) = 0, \quad i = k_1 + 1, \dots, k, \quad (9)$$

имеет ненулевое решение? Ответ на него таков. Система (9) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда найдется такой ненулевой вектор $h \in \mathbb{R}^n$, что

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i q_i(h) \leq 0 \quad \forall \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k): \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k_1, \quad \text{ind} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i q_i \right) \leq k - 1.$$

Докажем это. Действительно, отсутствие ненулевых решений у (9) равносильно тому, что

$$q_0(x) = -|x|^2 > 0 \quad \forall x: q_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k_1,$$

$$q_i(x) = 0, \quad i = k_1 + 1, \dots, k, \quad x \neq 0.$$

Теперь осталось применить теорему 1.

2. Приложение к теории экстремальных задач. Теорема 1 гарантирует, что в задаче на строгий минимум квадратичного функционала при квадратичных ограничениях в условиях экстремума для аномальных задач (см. [3, гл. 1, п. 1.4]) λ_0 (множитель Лагранжа при минимизируемом функционале) всегда можно брать равным единице. Выясним на какие классы задач, не являющихся квадратичными, распространяется это утверждение.

Рассмотрим гладкую нелинейную задачу минимизации:

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad F(x) = 0.$$

Здесь заданное отображение $F = (f_1, \dots, f_k): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ и функция f_0 предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми в окрестности точки $x_* \in \mathbb{R}^n: F(x_*) = 0$. Сформулируем необходимые условия экстремума в точке x_* (см. [3, глава 1, п. 4.1]).

Рассмотрим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda_i f_i(x), \quad \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k).$$

Обозначим через $\Lambda(x_*)$ множество нормированных множителей Лагранжа λ , отвечающих ей в силу правила множителей Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_*, \lambda) = 0, \quad \lambda_0 \geq 0, \quad |\lambda| = 1.$$

Для натурального r введем в рассмотрение множество, состоящее из тех множителей Лагранжа $\lambda \in \Lambda(x_*)$, для которых существует такое (зависящее от λ) подпространство $X \subseteq \mathbb{R}^n$, что

$$\text{codim } X \leq r, \quad X \subseteq \text{Ker } \frac{\partial F}{\partial x}(x_*), \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_*, \lambda)[x, x] \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Это множество множителей Лагранжа будем обозначать через $\Lambda_r(x_*)$.

В [3, гл. 1, теорема 4.1] доказано, что если в рассматриваемой задаче точка x_* является локальным минимумом, то множество $\Lambda_k(x_*)$ непусто и, более того,

$$\max_{\lambda \in \Lambda_k(x_*)} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_*, \lambda)[x, x] \geq 0 \quad \forall x \in \text{Ker } F'(x_*).$$

Итак, спрашивается, если точка x_* является локальным минимумом, то когда можно гарантировать, что в сформулированных условиях экстремума можно обойтись лишь теми множителями Лагранжа λ , для которых $\lambda_0 > 0$? Если точка x_* нормальна, т.е. оператор $\text{Im } F'(x_*)$ сюръективен ($\text{Im } F'(x_*) = \mathbb{R}^k$), то, как известно, ответ утвердительный. Если же точка x_* аномальна (т.е. оператор $\text{Im } F'(x_*)$ сюръективным не является), то, вообще говоря, это уже не так. (Например, если f_0 ненулевая линейная функция и $F(x) = |x|^2$, то $\lambda_0 = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda(0)$.)

Однако теорема 1 позволяет выделить широкий класс задач, для которых ответ на поставленный вопрос также является утвердительным. Введем требуемое определение.

Для произвольного $h \in \mathbb{R}^n$ определим линейное отображение $G(h): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ формулой

$$G(h)x = F'(x_*)x + \pi F''(x_*)[h, x],$$

где π – оператор ортогонального проектирования $\mathbb{R}^k$ на подпространство $(\text{Im } F'(x_*))^\perp$. Введем в рассмотрение конус

$$\mathcal{K} = \{h \in \mathbb{R}^n : F'(x_*)h = 0, \quad \pi F''(x_*)[h, h] = 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (см. [6]). Отображение F назовем *2-регулярным в точке x_** : $F(x_*) = 0$ по направлению $h \in \mathcal{K}$, если оператор $G(h)$ сюръективен. Отображение F назовем *2-регулярным в точке x_** , если оно 2-регулярно в ней по любому ненулевому направлению $h \in \mathcal{K}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Предположим, что точка x_* аномальна (т.е. $\text{Im } F'(x_*) \neq \mathbb{R}^k$), отображение F 2-регулярно в ней,*

$$f'(x_*) \in \text{Im}(F'(x_*))^* \quad (10)$$

и существует такое $\delta > 0$, что $f_0(x) \geq f_0(x_) + \delta|x - x_*|^2$ для всех $x: F(x) = 0$, лежащих в некоторой окрестности точки x_* .*

Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\max_{\lambda \in \Lambda_{k-1}^\varepsilon(x_*)} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_*, \lambda)[x, x] \geq 0 \quad \forall x \in \text{Ker } F'(x_*),$$

где $\Lambda_r^\varepsilon(x_*) = \{\lambda \in \Lambda_r(x_*): \lambda_0 \geq \varepsilon\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (10) будем, не теряя общности, считать, что $f'(x_*) = 0$. По теореме 1 из [6] в силу 2-регулярности отображения F в точке x_* получаем, что в ее окрестности множество $\{x: F(x) = 0\}$ локально диффеоморфно конусу $\mathcal{K}$ в окрестности нуля. Отсюда, используя последнее предположение леммы, получаем, что

$$f_0''(x_*)[x, x] > 0 \quad \forall x \in \mathcal{K}: x \neq 0.$$

Теперь остается применить теорему 1 и замечание 1 к ней. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. В формулировке предложения предположение о 2-регулярности отображения F в точке x_* опустить нельзя. Это показывает следующий простой пример: $-|x|^2 \rightarrow \min, |x|^3 = 0$. В нем минимум достигается в нуле, однако $\lambda_0 = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_{k-1}(0)$.

Перейдем к достаточным условиям экстремума второго порядка. Для конечномерного случая, который мы только и рассматриваем, они имеют следующий вид (см. [7, § 8], [3, § 1.7]). Если

$$\max_{\lambda \in \Lambda(x_*)} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_*, \lambda)[x, x] > 0 \quad \forall x \in \text{Ker } F'(x_*): x \neq 0, \quad (11)$$

то x_* является точкой строго локального минимума в рассматриваемой задаче.

Сравнивая достаточные условия с выписанными выше необходимыми, видим, что в них фигурируют разные множества множителей Лагранжа: $\Lambda(x_*)$ и $\Lambda_k(x_*)$. Это несоответствие представляется неестественным. В то же время менять в необходимых условиях множество $\Lambda_k(x_*)$ на большее – $\Lambda(x_*)$ – нецелесообразно, так как в этом случае ослабление необходимых условий приводит к тому, что они становятся тривиальными (т.е. выполняются автоматически) для любых аномальных задач (см. [3, с. 27], [7, с. 105]).

В связи с этим зададимся вопросом: следует ли заменить в достаточных условиях множество $\Lambda(x_*)$ на меньшее – $\Lambda_k(x_*)$? Формально достаточные условия при этом ослабляются, но, как показывает следующая теорема, дающая на поставленный вопрос утвердительный ответ, на самом деле это не так.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что точка x_* аномальна и выполняется условие (11). Тогда имеет место*

$$\max_{\lambda \in \Lambda_{k-1}(x_*)} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_*, \lambda)[x, x] > 0 \quad \forall x \in \text{Ker } F'(x_*): x \neq 0. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем существование такого $\bar{\lambda} \in \Lambda(x_*)$, что $\bar{\lambda}_0 > 0$ и квадратичная форма

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_*, \bar{\lambda})$$

положительно определена на конусе $\mathcal{K}$. При этом будем предполагать, что конус $\mathcal{K}$ ненулевой (в противном случае искомое утверждение выполняется автоматически).

Предположим вначале, что $f'_0(x_*) = 0$. Покажем, что тогда вектор $\bar{\lambda} = (1, 0, \dots, 0)$ является искомым. Действительно, возьмем произвольный $x \in \mathcal{K}$, $x \neq 0$. В силу (11)

$$\exists \lambda \in \Lambda(x_*): \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_*, \lambda)[x, x] > 0.$$

Положим $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Тогда из равенств

$$f'_0(x_*) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_*, \lambda) = 0$$

имеем $\mu\pi = \mu$, откуда

$$\langle \mu, F''(x_*)[x, x] \rangle = \langle \mu\pi, F''(x_*)[x, x] \rangle = 0,$$

так как $x \in \mathcal{K}$. Теперь из равенства

$$\langle \mu, F''(x_*)[x, x] \rangle = 0$$

в силу (11) получаем $f''(x_*)[x, x] > 0$, что и требовалось доказать.

Сведем теперь случай произвольного $f'_0(x_*)$ к рассмотренному. Выберем какой-нибудь вектор $h \in \mathcal{K}$, $h \neq 0$. В силу (11)

$$\exists \bar{\lambda} \in \Lambda(x_*): \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_*, \bar{\lambda})[h, h] > 0.$$

Покажем, что $\bar{\lambda}_0 > 0$. Действительно, предположим противное. Тогда, обозначив $\mu = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k)$, имеем

$$\mu \neq 0, \quad \mu F'(x_*)^* = 0 \implies \mu\pi = \mu,$$

откуда в силу (11)

$$0 < \langle \mu, F''(x_*)[h, h] \rangle = \langle \mu\pi, F''(x_*)[h, h] \rangle = 0,$$

так как $h \in \mathcal{K}$. Полученное противоречие доказывает, что $\bar{\lambda}_0 > 0$.

Теперь рассмотрим задачу минимизации

$$\mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) \rightarrow \min, \quad F(x) = 0.$$

Для нее также выполнены достаточные условия второго порядка (11). Поэтому, заменяя функцию $f_0(\cdot)$ на $\mathcal{L}(\cdot, \bar{\lambda})$ и учитывая, что $\partial \mathcal{L} / \partial x(x_*, \bar{\lambda}) = 0$, приходим к случаю, рассмотренному выше.

Таким образом, доказано, что квадратичная форма

$$q_0 = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_*, \bar{\lambda})$$

положительно определена на конусе $\mathcal{K}$, который задан на подпространстве $\text{Ker } F'(x_*)$ системой квадратичных равенств: $q_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, \bar{k}$, для некоторого $\bar{k} \leq k$. Здесь q_i – некоторые линейные комбинации квадратичных форм $f_i''(x_*)$. Применяя теперь теорему 1 и учитывая, что $\bar{\lambda}_0 > 0$, получаем (12). Теорема доказана.

Теорема 2 показывает, что достаточные условия второго порядка естественно брать в виде

$$\max_{\lambda \in \Lambda_k(x_*)} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_*, \lambda)[x, x] > 0 \quad \forall x \in \text{Ker } F'(x_*): x \neq 0,$$

не ослабляя их и не нарушая их гармоническую связь с необходимыми условиями. В заключение отметим, что полученные результаты справедливы также и для экстремальных задач, содержащих ограничения типа неравенств.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Аграчев А. А. Топология квадратичных отображений и гессианы гладких отображений // Итоги науки и техники. Алгебра. Геометрия. Топология. Т. 26. М.: ВИНТИ, 1988. С. 85–124.
- [2] Dines L. L. On the mapping of quadratic forms // Bull. Amer. Math. Soc. 1941. V. 47. P. 494–498.
- [3] Арутюнов А. В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
- [4] Polyak B. T. Convexity of Quadratic Transformations and Its Use in Control and Optimization // J. Optimiz. Theory Appl. 1998. V. 99. № 3.
- [5] Арутюнов А. В., Ячимович В. К теории экстремума для анормальных задач // Вестн. МГУ. Сер. 15. Выч. матем., киберн. 1999. № 4. С. 34–40.
- [6] Аваков Е. Р., Аграчев А. А., Арутюнов А. В. Множество уровня гладкого отображения в окрестности особой точки и нули квадратичного отображения // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 8. С. 1091–1104.
- [7] Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П. Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями // УМН. 1978. Т. 33. № 6. С. 85–148.

Российский университет дружбы народов, г. Москва

Поступило
30.08.2000