Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Балашов, Об аналоге теоремы Крейна–Мильмана для сильно выпуклой оболочки в гильбертовом пространстве, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 1, 37–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm326>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 15:32:17

УДК 517.977.8

ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ КРЕЙНА–МИЛЬМАНА ДЛЯ СИЛЬНО ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. В. Балашов

Доказана теорема: в гильбертовом пространстве замкнутое ограниченное множество содержится в сильно выпуклой R -оболочке своих R -сильно крайних точек. R -сильно крайние точки являются подмножеством крайних точек (и эти два множества могут не совпадать), сильно выпуклая R -оболочка множества содержит замыкание выпуклой оболочки множества.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над вещественным полем скаляров. Через $[x, y]$ будем обозначать отрезок с концами в точках x и y . Через $B_r(a)$ обозначим шар радиуса r с центром в точке a , т.е. $B_r(a) = \{x \in \mathcal{H} \mid \|x - a\| \leq r\}$, $\partial B_r(a) = \{x \in \mathcal{H} \mid \|x - a\| = r\}$. Через $\langle a, b \rangle$ обозначим скалярное произведение векторов $a, b \in \mathcal{H}$. Для множества $A \subset \mathcal{H}$ и точки x введем $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$. Через P_A обозначим проектор на выпуклое замкнутое множество A . Расстояние в метрике Хаусдорфа между множествами A и B определяется по формуле

$$h(A, B) = \inf\{r > 0 \mid A \subset B + B_r(0), \quad B \subset A + B_r(0)\}.$$

Введем также полезные обозначения: для $q \in \partial B_1(0)$, $a \in \mathcal{H}$

$$l(a, q) = \{a + \lambda q \mid \lambda \geq 0\}$$

и

$$\partial B_r(a, q) = \{x \in \mathcal{H} \mid \|x - a\| = r, \quad \langle q, x - a \rangle \geq 0\},$$

т.е. это “верхняя” (в смысле направления q) полусфера сферы $\partial B_r(a)$.

Сформулируем теперь определения и известные результаты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [1], [2]. Для множества $A \subset \mathcal{H}$ *сильно выпуклой R -оболочкой* называется множество, образованное пересечением всех шаров радиуса R , содержащих A . Обозначим это множество через $\text{strco}_R A$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00645, и Конкурсного центра фундаментального естествознания, грант № 97-0-1.9-26.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 [1], [2]. Для множества $A \subset \mathcal{H}$ точка $x \in A$ называется *R -сильно крайней*, если для любых двух точек $y, z \in A$: $y \neq x, z \neq x$, выполнено $x \notin \text{strco}_R\{y, z\}$. Будем обозначать множество R -сильно крайних точек A через $\text{extr}_R A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 [2]. Для множества $A \subset \mathcal{H}$ точка $x \in A$ называется *R -выступающей*, если существует шар радиуса R с центром в точке z такой, что $A \subset B_R(z)$ и $A \cap \partial B_R(z) = \{x\}$. Будем обозначать множество R -выступающих точек A через $\text{exr}_R A$.

Подмножество крайних точек множества A обозначим через $\text{extr} A$. Отметим, что если $\text{strco}_R A \cap \text{extr}_R A \neq \emptyset$, то $\text{extr}_R A \subset \text{extr} A$ и $\overline{\text{co}} A \subset \text{strco}_R A$.

В работе [2] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $A \subset \mathcal{H}$ – компакт в сильной топологии, A содержится в шаре $B_r(a)$ и $r < R$. Тогда $A \subset \text{strco}_R \text{extr}_R A$.

Целью настоящей работы является обобщение теоремы 1.1 на случай, когда множество A – произвольное замкнутое множество, лежащее в шаре радиуса r .

Отличие приведенных в статье теорем 2.1 и 2.2 от известных обобщений теоремы Крейна–Мильмана для пространств с выпуклостью (см., например, теорему 4.7 из [3, с. 48]) заключается в том, что от множества мы не требуем ни компактности, ни выпуклости (которая, по сути, обеспечивает компактность множества в какой-либо более слабой топологии).

Отметим, что обобщение классической теоремы Крейна–Мильмана на случай замкнутых ограниченных множеств в банаховых пространствах, имеющих гладкое сопряженное (см. определение 1 из [4, гл. 5, § 6]), содержится в предложениях 3 и 4 из [4, гл. 5, § 7].

2. Аналог теоремы Крейна–Мильмана.

ЛЕММА 2.1. Пусть $A \subset \mathcal{H}$ – замкнутое в сильной топологии ограниченное множество. Тогда для всюду плотного множества $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ (более того, $\mathcal{A}$ есть G_δ -множество, т.е. пересечение не более чем счетного множества открытых всюду плотных множеств) задача $\sup_{y \in \mathcal{A}} \|x - y\|$, $x \in \mathcal{A}$, имеет единственное решение.

Доказательство этого важного для нас утверждения содержится в приложении II § 2 раздела 2.1 из [5].

Докажем с помощью леммы 2.1 следующую лемму.

ЛЕММА 2.2. Пусть $A \subset \mathcal{H}$ – замкнутое множество, $A \subset B_r(z_0)$, $r < R$. Тогда $\text{exr}_R A \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $q \in \partial B_1(0)$. Пусть

$$\lambda_q = \sup\{\lambda \geq 0 \mid A \subset B_r(z_0 - \lambda q)\},$$

и пусть $z_q = z_0 - \lambda_q q$. Легко видеть, что $A \subset B_r(z_q)$.

Далее для простоты положим $z_q = 0$.

Фиксируем $\varepsilon \in (0, \min\{1, r/2\})$ такое, что выполнены следующие ограничения:

$$B_{\varepsilon^4}(-\varepsilon q) \subset B_r(0), \quad (O1)$$

$$2\varepsilon^2\sqrt{r^2 + \varepsilon^2} + \varepsilon^3 - \varepsilon^6 \leq 1, \quad (O2)$$

$$r + \varepsilon + \varepsilon^4 < R. \quad (O3)$$

По лемме 2.1 существует точка $z_\varepsilon \in B_{\varepsilon^4}(-\varepsilon q)$ такая, что существует единственная точка $a \in A$, для которой

$$\|z_\varepsilon - a\| = \sup_{x \in A} \|z_\varepsilon - x\| = r_\varepsilon.$$

Таким образом, $\partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon) \cap A = \{a\}$. Отметим, что

$$\|z_\varepsilon\| \leq \varepsilon + \varepsilon^4. \quad (2.1)$$

Покажем, что $a \in \exp_R A \cap \partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon, q)$. Это завершит доказательство.

Фиксируем произвольную точку $\xi \in B_{\varepsilon^4}(-\varepsilon q)$. Легко видеть, что в силу построения шара $B_r(z_q)$ ($z_q = 0$) найдется последовательность $a_k \in A$ и точки $x_k \in \partial B_r(0, q)$ такие, что $\|a_k\| \rightarrow r$, $\alpha_k = \|x_k - a_k\| \rightarrow 0$. Отсюда

$$\sup_{x \in A} \|\xi - x\| \geq \|\xi - a_k\| \geq \|\xi - x_k\| - \alpha_k \geq \rho(\xi, \partial B_r(0, q)) - \alpha_k,$$

т.е.

$$\begin{aligned} \sup_{x \in A} \|\xi - x\| &\geq \rho(\xi, \partial B_r(0, q)) \\ &\geq \rho(-\varepsilon q, \partial B_r(0, q)) - \varepsilon^4 = \sqrt{r^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon^4. \end{aligned} \quad (2.2)$$

С другой стороны,

$$\sup_{x \in A} \|\xi - x\| \leq \sup_{x \in B_r(0)} \|\xi - x\| \leq r + \varepsilon + \varepsilon^4. \quad (2.3)$$

Из формул (2.2) и (2.3) получаем

$$\sqrt{r^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon^4 \leq r_\varepsilon \leq r + \varepsilon + \varepsilon^4. \quad (2.4)$$

Для векторов $-q$ и $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$, введем угол $\varphi = \varphi(x)$ между ними; при этом $\cos \varphi = \langle -q, x \rangle / \|x\|$. Пусть

$$\begin{aligned} g(r, \varepsilon) &= \frac{2\varepsilon^3\sqrt{r^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon^7}{r}, \quad \varphi_0 = \arccos g(r, \varepsilon), \\ K &= \left\{ x \in \mathcal{H} \mid \left\langle -q, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \geq \cos \varphi_0 \text{ или } x = 0 \right\}, \end{aligned}$$

где K есть острый конус, симметричный относительно прямой $\text{lin}[q]$.

Отметим, что в силу выбора φ_0 для всех $\varphi \in [0, \varphi_0]$ $\cos \varphi \geq g(r, \varepsilon)$, т.е.

$$\sqrt{r^2 + \varepsilon^2 - 2r\varepsilon \cos \varphi} + \varepsilon^4 < \sqrt{r^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon^4.$$

Допустим, что $a \in B_r(0) \cap K$. Тогда для $\xi = z_\varepsilon$ по формуле (2.2) имеем

$$\|z_\varepsilon - a\| \geq \rho(z_\varepsilon, \partial B_r(0, q)).$$

С другой стороны, $\varphi(a) \in [0, \varphi_0]$ и в силу ограничений на ε (O1)–(O3) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|z_\varepsilon - a\| &\leq \|a + \varepsilon q\| + \varepsilon^4 = \sqrt{\|a\|^2 + \varepsilon^2 - 2\|a\|\varepsilon \cos \varphi(a)} + \varepsilon^4 \\ &\leq \sqrt{r^2 + \varepsilon^2 - 2r\varepsilon \cos \varphi(a)} + \varepsilon^4 < \sqrt{r^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon^4 \leq \rho(z_\varepsilon, \partial B_r(0, q)) \end{aligned}$$

(заключительное неравенство из (2.2) с $\xi = z_\varepsilon$). Последние две формулы противоречат друг другу, поэтому $a \in B_r(0) \setminus K$.

Покажем, что

$$B_r(0) \setminus K \subset \{x \in \mathcal{H} \mid \langle q, x + (\varepsilon - \varepsilon^4)q \rangle \geq 0\} = \Pi_q.$$

Пусть $x \in B_r(0) \setminus K$, $x \neq 0$. Тогда $rx/\|x\| \in B_r(0) \setminus K$; поэтому без ограничения общности $\|x\| = r$.

Соотношение $x \notin K$ влечет два случая.

- а) $x \in \partial B_r(0, q)$ и тогда включение $x \in \Pi_q$ очевидно.
- б) $x \in \partial B_r(0, -q)$ и угол между векторами x и $-q$ больше φ_0 .

Тогда $(1/r)\langle x, -q \rangle \leq \cos \varphi_0 = g(r, \varepsilon)$,

$$\langle x, -q \rangle \leq rg(r, \varepsilon) \leq (\varepsilon - \varepsilon^4)\langle q, q \rangle$$

(последнее неравенство верно в силу (O2)). Отсюда

$$\langle q, x + q(\varepsilon - \varepsilon^4) \rangle \geq 0,$$

т.е. $x \in \Pi_q$.

Включение $a \in \partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon)$ вместе с включением

$$\Pi_q \subset \{x \in \mathcal{H} \mid \langle q, x - z_\varepsilon \rangle \geq 0\}$$

влечет включение $a \in \partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon, q)$. В силу (O3) и (2.4) $r_\varepsilon < R$. Пусть $p = (a - z_\varepsilon)/\|a - z_\varepsilon\|$. Тогда

$$A \subset B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon) \subset B_R(a - Rp), \quad \partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon) \cap \partial B_R(a - Rp) = \{a\},$$

т.е. по определению $a \in \exp_R A \cap \partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon, q)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $A \subset \mathcal{H}$ замкнутое в сильной топологии множество, $A \subset B_\rho(z_0)$, $\rho < R$. Тогда

$$A \subset \text{strco}_R \exp_R A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = \text{strco}_R \exp_R A$. Допустим, что существует $x \in A \setminus B$. В силу определения 1.1 найдется такой шар $B_R(z)$, что $B \subset B_R(z)$ и $x \notin B_R(z)$. Пусть $y = P_{B_R(z)}x$, $\varepsilon = \|x - y\| > 0$.

Определим шар $B_r(z_0)$, где $r > 0$ удовлетворяет условию

$$r = \max \left\{ \rho, \frac{R + \varepsilon + \sqrt{(R - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2}}{2} \right\} \quad \text{при } R \geq 2\varepsilon, r = \rho \text{ при } R < 2\varepsilon.$$

Отметим, что $\rho \leq r < R$ и $z \neq z_0$.

1. Пусть $q = (z_0 - z)/\|z_0 - z\|$. Введем

$$a = z_0 + \|z_0 - x\|q \in B_r(z_0), \quad (2.5)$$

$$\|a - z\| = \|z - z_0\| + \|x - z_0\| \geq \|x - z\| > R, \quad (2.6)$$

откуда $a \notin B_R(z)$. По свойству проекции $P_{B_R(z)}a = z + Rq$; следовательно,

$$P_{B_R(z)}l(z + Rq, q) = \{z + Rq\}. \quad (2.7)$$

Так как $\|x - y\| = \|x - z\| - R$ и $\|a - (z + Rq)\| = \|a - z\| - R$, то с учетом (2.6)

$$\|a - (z + Rq)\| = \|a - z\| + \|x - y\| - \|x - z\| \geq \|x - y\| = \varepsilon. \quad (2.8)$$

Так как $B \subset B_R(z) \cap B_r(z_0)$ и $x \in B_r(z_0) \setminus B_R(z)$, то $\|z - z_0\| \in (R - r, R + r)$, откуда с учетом определения q $\|z - z_0 + Rq\| = |R - \|z - z_0\|| \leq r$,

$$z + Rq \in B_r(z_0). \quad (2.9)$$

Из формул (2.5), (2.7), (2.8) и (2.9) следует, что для любого шара $B_r(z_1)$ такого, что $A \subset B_r(z_1)$ и $z_1 \in l(z, q)$, отрезок $[z + Rq, z + (R + \varepsilon)q]$ лежит в $B_r(z_1)$.

2. По лемме 2.2 найдется максимальное $\lambda_q \geq 0$: $A \subset B_r(z_0 - \lambda_q q)$. Пусть без ограничения общности $z_0 - \lambda_q q = 0$.

В силу пункта 1 доказательства найдется $\delta \geq \varepsilon$, для которого $[z + Rq, z + (R + \delta)q] \subset B_r(0)$ и $z + (R + \delta)q \in \partial B_r(0)$. Так как $q \in \text{lin}[z_0 - z]$, то $z + (R + \delta)q = rq$ и $z = -(R - r + \delta)q$.

Фиксируем произвольное $u \in \partial B_r(0, q)$, т.е. $\|u\| = r$ и $\langle u, q \rangle \geq 0$. Тогда

$$\|u - z\|^2 - R^2 \geq 2r^2 - 2r(R + \varepsilon) + 2\varepsilon R + \varepsilon^2 > 0,$$

откуда

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall u \in \partial B_r(0, q) \quad \rho(u, B_R(z)) \geq \alpha. \quad (2.10)$$

По лемме 2.2 для любого $\varepsilon > 0$ найдется шар $B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon)$ (в обозначениях леммы 2.2) такой, что $A \subset B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon)$ и $\partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon) \cap A = \partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon, q) \cap A = \{a\}$. Выбирая малые $\varepsilon > 0$,

удовлетворяющие (O1)–(O3), можно удовлетворить условиям $r_\varepsilon \in [r - \alpha/4, r + \alpha/4]$, $\|z_\varepsilon\| \leq \alpha/4$ (см. (2.1), (2.4)). Фиксируем такое ε и соответствующие ему $z_\varepsilon, r_\varepsilon$. Имеем

$$\begin{aligned} h(\partial B_r(0, q), \partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon, q)) &\leq h(\partial B_r(0, q), \partial B_{r_\varepsilon}(0, q)) \\ &+ h(\partial B_{r_\varepsilon}(0, q), \partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon, q)) \leq |r - r_\varepsilon| + \|z_\varepsilon\| \leq \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом условия (2.10)

$$\partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon, q) \cap B_R(z) = \emptyset. \quad (2.11)$$

Из формулы (2.11) следует, что $a \notin B_R(z)$. Поскольку $r_\varepsilon < R$ (см. (O3) и (2.4)), то, повторяя рассуждения леммы 2.1, $a \in \text{exp}_R A$. Это противоречит включению $\text{exp}_R A \subset B \subset B_R(z)$.

В работе [2] показано, что для любого множества $A \subset \mathcal{H}$ $x \in \text{exp}_R A \Rightarrow x \in \text{extr}_R A$, отсюда и из теоремы 2.1 немедленно следует теорема.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $A \subset \mathcal{H}$ замкнутое в сильной топологии множество, $A \subset B_\rho(z_0)$, $\rho < R$. Тогда

$$A \subset \text{strco}_R \text{extr}_R A.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Половинкин Е. С. Сильно выпуклый анализ // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 2. С. 103–130.
- [2] Балашов М. В., Половинкин Е. С. M -сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 1. С. 26–64.
- [3] Солтан В. П. Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. Кишинев: Штиинца, 1984.
- [4] Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
- [5] Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.

Московский физико-технический институт
E-mail: balashov@math.mipt.ru

Поступило
15.05.2000