Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ведерников, М. М. Сорокина, ω -веерные формации и классы Фиттинга конечных групп, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 1, 43–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm327>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:51:20

УДК 512.542

ω -ВЕЕРНЫЕ ФОРМАЦИИ И КЛАССЫ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В. А. Ведерников, М. М. Сорокина

Предлагаемый в настоящей работе новый функциональный подход к изучению классов групп позволяет описать на языке функций все формации и классы Фиттинга конечных групп. Вводятся понятия ω -веерной формации и ω -веерного класса Фиттинга с направлением φ . Направление φ определяется как отображение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел во множество всех непустых формаций Фиттинга. Существование бесконечного множества таких отображений приводит к возможности построения для фиксированного непустого множества ω новых видов формаций и классов Фиттинга. В частности, ω -локальная формация представляет собой ω -веерную формацию с таким направлением φ , что $\varphi(p) = \mathfrak{G}_p \mathfrak{N}_p$ для любого простого числа p . В работе изучены некоторые основные свойства ω -веерных формаций и ω -веерных классов Фиттинга с направлением φ , при фиксированном φ получено строение их минимальных спутников.

Библиография: 14 названий.

В работе [1] Гашюц впервые применил функциональные методы для построения локальных формаций, играющих ключевую роль в теории формаций конечных групп. Следуя Гашюцу, в работе [2] Хартли ввел понятие локального класса Фиттинга. Дальнейшее развитие функциональный подход к изучению формаций нашел в работе [3] Л. А. Шеметкова, в которой были определены ступенчатые, примарно постоянные, однородные и композиционные формации. Введенная в 1984 году Шеметковым концепция частичной локальности [4] позволила раскрыть новые возможности использования функций при изучении классов конечных групп. Примером этому служат работы [5]–[8]. Идеи построения новых видов формаций и классов Фиттинга, естественно обобщающих ω -локальные формации и классы Фиттинга, привели к необходимости рассмотрения ω -спутников различных направлений. Отметим, что направление ω -спутника f определяется как отображение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел во множество всех непустых формаций Фиттинга. Ясно, что таких направлений будет бесконечное множество, а направление ω -локального спутника является одним из них. Поэтому для фиксированного непустого множества простых чисел ω можно построить целый ряд новых видов формаций (ω -веерных формаций). Понятие веерной формации перекликается с понятием веерной подгруппы, введенным З. И. Боровичем в работе [9].

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Обозначения и определения, не приведенные в работе, можно найти в [10], [11]. В дальнейшем, $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел; ω – непустое подмножество множества $\mathbb{P}$; $\mathfrak{G}_\omega$ – класс всех ω -групп; $O_\omega(G) = G_{\mathfrak{G}_\omega}$, $O^\omega(G) = G^{\mathfrak{G}_\omega}$, $F_p(G) = G_{\mathfrak{N}_p}$, $F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p}$. Через $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ будем обозначать гашюцово произведение классов групп $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, т.е. класс всех таких групп G , что $K \in \mathfrak{F}$ для некоторой $\mathfrak{H}$ -корадикальной нормальной подгруппы K группы G [12].

1. ω -всеерные формации групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функцию $f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ назовем ω -формационной функцией простого натурального аргумента или, коротко, ωF -функцией. Функцию $g: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ назовем формационной функцией простого натурального аргумента или, коротко, $\mathbb{P}F$ -функцией. Функцию $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$ назовем формационно-радикальной функцией или, коротко, $\mathbb{P}FR$ -функцией.

ЛЕММА 1. Пусть f – ωF -функция, φ – $\mathbb{P}FR$ -функция и

$$\mathfrak{F} = \omega F(f, \varphi) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \cdot G/G_{\varphi(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap K(G)\}.$$

Тогда $\mathfrak{F}$ является формацией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$. Так как

$$(NO_\omega(G))/N \cong O_\omega(G)/(N \cap O_\omega(G)) \in \mathfrak{G}_\omega,$$

то $(NO_\omega(G))/N \subseteq O_\omega(G/N) = R/N$. Поэтому

$$(G/N)/O_\omega(G/N) \cong G/R \cong (G/O_\omega(G))/(R/O_\omega(G)) \in f(\omega').$$

Поскольку для любого $p \in \omega \cap \pi(G/N)$ справедливо

$$(NG_{\varphi(p)})/N \cong G_{\varphi(p)}/(N \cap G_{\varphi(p)}) \in \varphi(p),$$

то $(NG_{\varphi(p)})/N \subseteq (G/N)_{\varphi(p)} = T/N$ и

$$(G/N)/(G/N)_{\varphi(p)} \cong G/T \cong (G/G_{\varphi(p)})/(T/G_{\varphi(p)}) \in f(p)$$

для всех $p \in \omega \cap \pi(G/N)$. Следовательно, $G/N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $G/N_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$. Покажем, что $G/D \in \mathfrak{F}$, где $D = N_1 \cap N_2$. Ясно, что G/D изоморфна подпрямому произведению групп G/N_1 и G/N_2 . Поэтому существует группа T такая, что $T = K \times L$, H – подпрямое произведение групп K и L , причем $K \cong G/N_1$, $L \cong G/N_2$ и $H \cong G/D$. Так как $\mathfrak{G}_\omega$ является формацией Фиттинга, то по лемме 8 из [6] $O_\omega(H) = H \cap O_\omega(T)$. Далее, $O_\omega(T) = O_\omega(K) \times O_\omega(L)$ и $O_\omega(T)H$ является подпрямым произведением групп K и L . Тогда по лемме 2 из [13] $HO_\omega(T)/O_\omega(T)$ является подпрямым произведением групп $KO_\omega(T)/O_\omega(T) \cong K/O_\omega(K)$ и $LO_\omega(T)/O_\omega(T) \cong L/O_\omega(L)$. Так как $K/O_\omega(K) \cong (G/N_1)/O_\omega(G/N_1) \in f(\omega')$ и $L/O_\omega(L) \in f(\omega')$, то

$$HO_\omega(T)/O_\omega(T) \cong H/O_\omega(H) \in f(\omega')$$

и, значит, $(G/D)/O_\omega(G/D) \in f(\omega')$. Поскольку $\varphi(p)$ – формация Фиттинга, то аналогично получим, что $(G/D)/(G/D)_{\varphi(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G/D)$. Следовательно, $G/D \in \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{F}$ является формацией. Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующая

ЛЕММА 2. Пусть f – $\mathbb{P}F$ -функция, φ – $\mathbb{P}FR$ -функция и

$$\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(f, \varphi) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\varphi(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)\}.$$

Тогда $\mathfrak{F}$ является формацией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Формацию $\mathfrak{F}$ назовем ω -верной, если $\mathfrak{F} = \omega F(f, \varphi)$, где f и φ – некоторые ωF -функция и $\mathbb{P}FR$ -функция соответственно. Функцию f будем называть ωF -спутником, а функцию φ – направлением ω -верной формации $\mathfrak{F}$. Пусть f – $\mathbb{P}F$ -функция. Формацию $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(f, \varphi)$ назовем верной формацией с направлением φ , а f будем называть $\mathbb{P}F$ -спутником формации $\mathfrak{F}$.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathfrak{M}$ – формация, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \omega = \emptyset$. Тогда $\mathfrak{M} = \omega F(t, \varphi)$, где t – ωF -функция такая, что $t(\omega') = \mathfrak{M}$, $t(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega$, и φ – произвольная $\mathbb{P}FR$ -функция. В частности, пустая формация $\emptyset$ и единичная формация $\{1\}$ являются ω -верными формациями для любого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{B} = \omega F(t, \varphi)$, где t и φ – из заключения леммы. Если $G \in \mathfrak{M}$, то $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{M} = t(\omega')$ и из $p \in \omega \cap \pi(G) = \emptyset$ следует, что $G/G_{\varphi(p)} \in t(p)$. Поэтому $G \in \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}$.

Допустим, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}$ и H – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{M}$. Тогда H – монолитическая группа с монолитом $M = H^{\mathfrak{M}}$. Так как $H/O_\omega(H) \in t(\omega') = \mathfrak{M}$, то $M \subseteq O_\omega(H)$ и для $p \in \pi(M) \cap \omega$ получаем $H/H_{\varphi(p)} \in t(p) = \emptyset$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Формацию $\mathfrak{F} = \omega F(f, \varphi)$ назовем ω -полной или, коротко, ωA -формацией (от англ. “absolute”), если $\varphi(p) = \mathfrak{G}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и будем обозначать

$$\mathfrak{F} = \omega AF(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/O_{p'}(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\},$$

а f будем называть ωA -спутником формации $\mathfrak{F}$. Пусть f – $\mathbb{P}F$ -функция. Формацию $\mathfrak{F} = AF(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{p'}(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)\}$ назовем полной формацией с A -спутником f .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая неединичная формация и $\omega = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является ω -полной формацией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f такая ωF -функция, что

$$f(\omega') = \mathfrak{F}, \quad f(p) = \text{form}(G/O_{p'}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$$

для всех $p \in \omega$ и $\mathfrak{F}_1 = \omega AF(f)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $H \in \mathfrak{F}$. Тогда $H/O_\omega(H) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Кроме того, $H/O_{p'}(H) \in (G/O_{p'}(G) \mid G \in \mathfrak{F}) \subseteq f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и T – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T – монолитическая группа с монолитом $M = T^{\mathfrak{F}}$. Так как $T/O_\omega(T) \in f(\omega') = \mathfrak{F}$, то $M \subseteq O_\omega(T)$. Пусть $p \in \pi(M)$. Тогда $p \in \omega \cap \pi(T)$ и из $T/O_{p'}(T) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ получаем $M \subseteq O_{p'}(T)$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из теоремы 1 и леммы 3 следует, что каждая формация является ω -полной для некоторого непустого множества простых чисел ω . Обозначим направление полной формации через φ_0 .

ЛЕММА 4. Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(f, \varphi)$, где φ – произвольная $\mathbb{P}FR$ -функция. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\mathfrak{F} = \omega F(g, \varphi)$, где $g(p) = f(p) \cap \mathfrak{F}$ для любого $p \in \omega \cup \{\omega'\}$;
- 2) $\mathfrak{F} = \omega F(h, \varphi)$, где $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\mathfrak{F}_1 = \omega F(g, \varphi)$, где g – ωF -функция, описанная в пункте 1) леммы. Так как $g(p) \subseteq f(p)$ для любого $p \in \omega \cup \{\omega'\}$, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\varphi(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Поскольку $\mathfrak{F}$ – формация, то $\{G/O_\omega(G), G/G_{\varphi(p)}\} \subseteq \mathfrak{F}$ и, значит, $G/O_\omega(G) \in f(\omega') \cap \mathfrak{F} = g(\omega')$ и $G/G_{\varphi(p)} \in f(p) \cap \mathfrak{F} = g(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

2) Пусть h – ωF -функция из пункта 2) леммы и $\mathfrak{H} = \omega F(h, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ имеем $G/G_{\varphi(p)} \in f(p) = h(p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H монолитична с монолитом $M = H^\mathfrak{F}$. Из $H/O_\omega(H) \in h(\omega') = \mathfrak{F}$ следует, что $M \subseteq O_\omega(H)$ и $H/O_\omega(H) \cong (H/M)/(O_\omega(H)/M) = (H/M)/O_\omega(H/M) \in f(\omega')$. Кроме того, для любого $p \in \omega \cap \pi(H)$ выполняется $H/H_{\varphi(p)} \in h(p) = f(p)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Формацию $\mathfrak{F} = \omega F(f, \varphi)$ назовем ω -локальной или, коротко, ωL -формацией, если $\varphi(p) = \mathfrak{P}_p \mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и будем обозначать

$$\mathfrak{F} = \omega LF(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\},$$

а f назовем ωL -спутником формации $\mathfrak{F}$. В случае, когда f является $\mathbb{P}F$ -функцией, получаем определение локальной формации $\mathfrak{F} = LF(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)\}$ с L -спутником f .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что рассматриваемое нами понятие ω -локальной формации имеет более простое определение, чем в работе [5]. Установим равносильность этих определений. Для удобства ω -локальную формацию $LF_\omega(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\}$, где $G_{\omega d} = G_{\mathfrak{G}_{\omega d}}$, из [5] временно назовем ωd -локальной.

ТЕОРЕМА 2. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) формация $\mathfrak{F}$ является ωd -локальной;
- 2) формация $\mathfrak{F}$ является ω -локальной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть формация $\mathfrak{F}$ является ωd -локальной. Тогда по [5]

$$\mathfrak{F} = LF_\omega(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\},$$

причем в силу теоремы 1 из [5] можем считать, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Рассмотрим формацию $\omega LF(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\}$. Если

$G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ имеем $G/F_p(G) \in f(p)$. Следовательно, $G \in \omega LF(f)$ и $\mathfrak{F} \subseteq \omega LF(f)$.

Пусть $H \in \omega LF(f)$. Тогда $H/O_\omega(H) \in f(\omega')$ и $H/F_p(H) \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Поскольку $O_\omega(H) \subseteq H_{\omega d}$, то $H/H_{\omega d} \in f(\omega')$, а значит, $H \in \mathfrak{F}$ и $\omega LF(f) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \omega LF(f)$.

Пусть теперь формация $\mathfrak{F}$ является ω -локальной, т.е. $\mathfrak{F} = \omega LF(f)$. Согласно лемме 4 можем считать, что $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega \cup \{\omega'\}$, причем $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Рассмотрим формацию $LF_\omega(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/G_{\omega d} \in \mathfrak{F} = f(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ имеем $G/F_p(G) \in f(p)$. Следовательно, $G \in LF_\omega(f)$ и $\mathfrak{F} \subseteq LF_\omega(f)$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset LF_\omega(f)$ и H – группа наименьшего порядка из $LF_\omega(f) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H монолитична с монолитом $M = H^\mathfrak{F}$. Из $H/H_{\omega d} \in f(\omega') = \mathfrak{F}$ следует, что $M \subseteq H_{\omega d}$. Пусть M – неабелева группа. Так как M – ωd -группа, то существует $p \in \omega \cap \pi(M)$. Тогда $F_p(H) = 1$. Поскольку $H \in LF_\omega(f)$, то $H \cong H/F_p(H) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, M – элементарная абелева p -группа, причем $p \in \omega$. Так как $H/M \in \mathfrak{F}$, то $H/O_\omega(H) \cong (H/M)/(O_\omega(H)/M) = (H/M)/O_\omega(H/M) \in f(\omega')$. Кроме того, для любого $p \in \omega \cap \pi(H)$ выполняется $H/F_p(H) \in f(p)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая неединичная формация и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$. Формация $\mathfrak{F}$ является ω -верной с направлением φ и ωF -спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – верная формация с направлением φ и $\mathbb{P}F$ -спутником f_1 таким, что $f_1(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$ и $f_1(p) = \emptyset$ для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \omega$. Такие ωF -спутник f и $\mathbb{P}F$ -спутник f_1 формации $\mathfrak{F}$ будем называть ω -равными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть формация $\mathfrak{F}$ является ω -верной с направлением φ . Тогда $\mathfrak{F} = \omega F(f, \varphi) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/G_{\varphi(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\}$. Рассмотрим $\mathbb{P}F$ -функцию f_1 такую, что $f_1(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$ и $f_1(p) = \emptyset$ для любого $p \in \mathbb{P} \setminus \omega$. Пусть

$$\mathfrak{F}_1 = \mathbb{P}F(f_1, \varphi) = \{H \in \mathfrak{G} \mid H/H_{\varphi(p)} \in f_1(p) \text{ для любого } p \in \pi(H)\}.$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Так как $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, то $f(\omega') \neq \emptyset$. Поскольку $\mathfrak{F} \neq (1)$, то $\pi(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$ и, значит, $\omega \neq \emptyset$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда G является ω -группой и, значит, $G/G_{\varphi(p)} \in f(p) = f_1(p)$ для любого $p \in \pi(G) \cap \omega$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и T – группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T – монолитическая группа с монолитом $M = T^\mathfrak{F}$. В силу леммы 4 можем считать, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Пусть $p \in \pi(M)$. Поскольку $T \in \mathfrak{F}_1$, то $T/T_{\varphi(p)} \in f_1(p)$ и, значит, $f_1(p) \neq \emptyset$. Тогда из определения f_1 следует, что $p \in \omega$ и $M \subseteq O_\omega(T)$. Поэтому $T/O_\omega(T) \cong (T/M)/(O_\omega(T)/M) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Кроме того, $T/T_{\varphi(q)} \in f_1(q) = f(q)$ для любого $q \in \pi(T) = \omega \cap \pi(T)$. Теперь из определения ω -верной формации $\mathfrak{F}$ получаем $T \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Достаточность. Пусть теперь $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(g, \varphi)$ – верная формация с направлением φ . Рассмотрим ωF -функцию h такую, что $h(\omega') = \mathfrak{F}$, $h(p) = g(p)$ для любого $p \in \omega$. Пусть $\mathfrak{H} = \omega F(h, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ справедливо $G/G_{\varphi(p)} \in g(p) = h(p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда H – монолитическая группа с монолитом $M = H^{\mathfrak{F}}$. Так как $H/O_{\omega}(H) \in h(\omega') = \mathfrak{F}$, то $M \subseteq O_{\omega}(H)$. Поскольку $H/M \in \mathfrak{F}$ и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, то H/M является ω -группой и, значит, H – ω -группа. По определению H имеем $H/H_{\varphi(p)} \in h(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(H) = \pi(H)$. Из определения функции h получим $H/H_{\varphi(p)} \in h(p) = g(p)$ для любого $p \in \pi(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая неединичная формация и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$. Формация $\mathfrak{F}$ является ω -полной с ωA -спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – полная формация с A -спутником f_1 , ω -равным f .

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая неединичная формация и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$. Формация $\mathfrak{F}$ является ω -локальной с ωL -спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – локальная формация с L -спутником f_1 , ω -равным f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Направление φ веерной формации назовем *главным* или, коротко, *p -направлением* (от англ. "principal"), если $\varphi(p) = \mathfrak{G}_{p'}\varphi(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$.

ТЕОРЕМА 4. Если $\mathfrak{F}$ – веерная формация с p -направлением φ , то $\mathfrak{F}$ является ω -веерной формацией с p -направлением φ для любого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(f, \varphi)$ – веерная формация с p -направлением φ , h – такая ωF -функция, что $h(\omega') = \mathfrak{F}$, $h(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$ и $\mathfrak{H} = \omega F(h, \varphi)$. Как и при доказательстве теоремы 3, легко проверить, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $H \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$ и H – группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда H – монолитическая группа с монолитом $M = H^{\mathfrak{F}}$. Как и при доказательстве теоремы 3, $M \subseteq O_{\omega}(H)$. Поэтому $\pi(M) \subseteq \omega$ и $H/H_{\varphi(p)} \in h(p) = f(p)$ для любого $p \in \pi(M)$. Пусть $q \in \pi(H) \setminus \pi(M)$. Обозначим $(H/M)_{\varphi(q)} = T/M$. Поскольку $T/M \in \varphi(q)$ и $M \in \mathfrak{G}_{q'}$, то $T \in \mathfrak{G}_{q'}\varphi(q) = \varphi(q)$. Отсюда получаем

$$H/H_{\varphi(q)} \cong (H/M)/(H_{\varphi(q)}/M) = (H/M)/(H/M)_{\varphi(q)} \in f(q).$$

Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Теорема доказана.

Поскольку направления ω -полной и ω -локальной формаций являются главными, то из теоремы 4 непосредственно вытекают следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Если $\mathfrak{F}$ – полная формация, то $\mathfrak{F}$ является ω -полной формацией для любого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Если $\mathfrak{F}$ – локальная формация, то $\mathfrak{F}$ является ω -локальной формацией для любого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – произвольный набор ωF -функций ($\mathbb{P}F$ -функций). Обозначим через $\bigcap_{i \in I} f_i$ такую ωF -функцию ($\mathbb{P}F$ -функцию) f , что $f(p) = \bigcap_{i \in I} f_i(p)$ для всех $p \in \omega \cup \{\omega'\}$ (для всех $p \in \mathbb{P}$).

ЛЕММА 5. Пусть φ – произвольная $\mathbb{P}FR$ -функция, $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = \omega F(f_i, \varphi)$, $i \in I$. Тогда $\mathfrak{F} = \omega F(f, \varphi)$, где $f = \bigcap_{i \in I} f_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{H} = \omega F(f, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}_i$ и, значит, $G/O_\omega(G) \in f_i(\omega')$, $i \in I$. Поэтому $G/O_\omega(G) \in \bigcap_{i \in I} f_i(\omega') = f(\omega')$. Так как для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ имеем $G/G_{\varphi(p)} \in f_i(p)$, $i \in I$, то $G/G_{\varphi(p)} \in \bigcap_{i \in I} f_i(p) = f(p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть $B \in \mathfrak{H}$. Тогда $B/O_\omega(B) \in f(\omega') = \bigcap_{i \in I} f_i(\omega')$ и $B/B_{\varphi(p)} \in f(p) = \bigcap_{i \in I} f_i(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(B)$. Отсюда следует, что $B/O_\omega(B) \in f_i(\omega')$ и $B/B_{\varphi(p)} \in f_i(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(B)$, $i \in I$. Поэтому $B \in \mathfrak{F}_i$, $i \in I$, и, значит, $B \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$. Таким образом, $H \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Нетрудно проверить, что и для веерных формаций справедливо утверждение, аналогичное лемме 5.

Пусть ψ_1 и ψ_2 – произвольные ωF -функции ($\mathbb{P}F$ -функции, $\mathbb{P}FR$ -функции). Будем говорить, что $\psi_1 \leq \psi_2$, если $\psi_1(p) \subseteq \psi_2(p)$ для всех $p \in \omega \cup \{\omega'\}$ (для всех $p \in \mathbb{P}$). В соответствии с этим можем считать, что всякое множество ωF -функций ($\mathbb{P}F$ -функций) является частично упорядоченным: ωF -функцию ($\mathbb{P}F$ -функцию) f назовем *минимальным ωF -спутником* (*$\mathbb{P}F$ -спутником*) ω -веерной (веерной) формации $\mathfrak{F}$ с направлением φ , если f является минимальным элементом множества всех ωF -спутников ($\mathbb{P}F$ -спутников) формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустое множество групп. Обозначим через $\omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ пересечение всех ω -веерных формаций с направлением φ , которые содержат $\mathfrak{X}$; $\mathbb{P}F(\mathfrak{X}, \varphi)$ – пересечение всех веерных формаций с направлением φ , содержащих $\mathfrak{X}$. При фиксированном φ формации $\omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ и $\mathbb{P}F(\mathfrak{X}, \varphi)$ будем также коротко обозначать $\omega F(\mathfrak{X})$ и $\mathbb{P}F(\mathfrak{X})$ соответственно. Далее, $\omega AF(\mathfrak{X})$ и $AF(\mathfrak{X})$, $\omega LF(\mathfrak{X})$ и $LF(\mathfrak{X})$ – соответственно ω -полная и полная, ω -локальная и локальная формации, порожденные $\mathfrak{X}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда ω -веерная формация $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ с направлением φ , где $\varphi_0 \leq \varphi$, обладает единственным минимальным ωF -спутником f таким, что

$$f(\omega') = \text{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \quad f(p) = \text{form}(G/G_{\varphi(p)} \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп и φ – такая $\mathbb{P}FR$ -функция, что $\varphi_0 \leq \varphi$. Поскольку класс $\mathfrak{G}$ является ω -веерной формацией с направлением φ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{G}$, то формация $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ существует и, значит, множество L всех ωF -спутников формации $\mathfrak{F}$ непусто. Обозначим через f_1 пересечение всех элементов из L . Согласно лемме 5 $\mathfrak{F} = \omega F(f_1, \varphi)$ и поэтому $f_1 \in L$. Тем самым установлено, что f_1 – единственный минимальный ωF -спутник формации $\mathfrak{F}$.

Пусть f – ωF -функция, описанная в заключении теоремы. Покажем, что $f = f_1$. Пусть $M \in \mathfrak{X}$. Тогда $M/O_\omega(M) \in f(\omega')$ и из $\pi(M) \subseteq \pi(\mathfrak{X})$ следует, что $M/M_{\varphi(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(M)$. Это означает, что $M \in \omega F(f, \varphi)$ и $\mathfrak{X} \subseteq \omega F(f, \varphi)$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \omega F(f, \varphi)$.

Покажем, что $f \leq f_1$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$. Тогда найдется такая группа $H \in \mathfrak{F}$, что $p \in \omega \cap \pi(H)$. Из равенства $\mathfrak{F} = \omega F(f_1, \varphi)$ следует, что $H/H_{\varphi(p)} \in f_1(p)$. Поэтому $f_1(p) \neq \emptyset$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если $p \in \omega \cap \pi(G)$, то из $G \in \mathfrak{F} = \omega F(f_1, \varphi)$ получаем $G/G_{\varphi(p)} \in f_1(p)$. Пусть теперь $p \in (\omega \cap \pi(\mathfrak{X})) \setminus (\omega \cap \pi(G))$. Тогда $G \in \mathfrak{G}_{p'} = \varphi_0(p) \subseteq \varphi(p)$

и поэтому $G/G_{\varphi(p)} \cong 1 \in f_1(p)$. Таким образом, $f(p) = \text{form}(G/G_{\varphi(p)} \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$. Кроме того, из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ имеем

$$f(\omega') = \text{form}(G/O_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\omega').$$

Если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$, то $f(p) = \emptyset \subseteq f_1(p)$. Следовательно, $f \leq f_1$ и $\omega F(f, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \omega F(f, \varphi)$ и $f \in L$. Поскольку f_1 – единственный минимальный ωF -спутник формации $\mathfrak{F}$, то $f \leq f_1$ влечет $f = f_1$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть f_i – минимальный ωF -спутник ω -верной формации $\mathfrak{F}_i$ с направлением φ , где $\varphi_0 \leq \varphi$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда ω -полная формация $\mathfrak{F} = \omega AF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ωA -спутником f таким, что $f(\omega') = \text{form}(G/O_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, $f(p) = \text{form}(G/O_{p'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathfrak{F}$ является ω -полной формацией с направлением φ_0 , то по теореме 5 формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным ωA -спутником f , причем $f(p) = \text{form}(G/O_{p'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда полная формация $\mathfrak{F} = AF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным A -спутником f таким, что $f(p) = \text{form}(G/O_{p'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \pi(\mathfrak{X})$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega = \mathbb{P}$. Согласно следствию 4.1 формация $\mathfrak{F}$ является ω -полной и, значит, по следствию 5.2 $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным ωA -спутником f_1 . Пусть f – $\mathbb{P}F$ -функция, описанная в заключении следствия. Тогда $f(p) = f_1(p)$ для всех $p \in \mathbb{P} = \omega$. Покажем, что $\mathfrak{F} = AF(f)$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то для любого $p \in \pi(G) = \omega \cap \pi(G)$ справедливо $G/O_{p'}(G) \in f_1(p) = f(p)$ и поэтому $G \in AF(f)$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq AF(f)$. Пусть теперь $H \in AF(f)$ и $p \in \omega \cap \pi(H) = \pi(H)$. Тогда

$$H/O_{p'}(H) \in f(p) = f_1(p).$$

Кроме того, из $H \in \mathfrak{G}_{\omega}$ получаем $H/O_{\omega}(H) \cong 1 \in f_1(\omega')$. Таким образом, $H \in \mathfrak{F}$ и $AF(f) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = AF(f)$, т.е. f – A -спутник формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что найдется такой A -спутник h формации $\mathfrak{F}$, что $f(q) \not\subseteq h(q)$ для некоторого $q \in \mathbb{P}$. Пусть h_1 – такая ωF -функция, что $h_1(p) = h(p)$ для всех $p \in \omega$ и $h_1(\omega') = f_1(\omega')$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \omega AF(h_1)$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_{\omega}(G) \in f_1(\omega') = h_1(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(G) = \pi(G)$ справедливо $G/O_{p'}(G) \in h(p) = h_1(p)$. Это означает, что $G \in \omega AF(h_1)$. Пусть $L \in \omega AF(h_1)$ и $p \in \pi(L)$. Тогда из $\pi(L) = \omega \cap \pi(L)$ следует, что $L/O_{p'}(L) \in h_1(p) = h(p)$. Поэтому $L \in AF(h) = \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \omega AF(h_1)$. Поскольку f_1 – единственный минимальный ωA -спутник формации $\mathfrak{F}$, то $f_1(p) \subseteq h_1(p)$ для всех $p \in \omega \cup \{\omega'\}$. Однако $f_1(q) = f(q) \not\subseteq h(q) = h_1(q)$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что f – единственный минимальный A -спутник формации $\mathfrak{F}$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 5.4 [5]. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда ω -локальная формация $\mathfrak{F} = \omega LF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ωL -спутником f таким, что $f(\omega') = \text{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, $f(p) = \text{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

СЛЕДСТВИЕ 5.5 [11]. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда локальная формация $\mathfrak{F} = LF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным L -спутником f таким, что $f(p) = \text{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \pi(\mathfrak{X})$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

ЛЕММА 6. Пусть ω – непустое множество простых чисел. Если формация $\mathfrak{F}$ является ω -верной с r -направлением φ , то $\mathfrak{F}$ является $\{p\}$ -верной формацией с r -направлением φ для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(f, \varphi)$ – ω -верная формация с r -направлением φ и $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ является $\{p\}$ -верной формацией с r -направлением φ . Пусть f_p – такая $\{p\}F$ -функция, что $f_p(p) = f(p)$, $f_p(\{p\}') = \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_1 = \{p\}F(f_p, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_p(G) \in \mathfrak{F} = f_p(\{p\}')$. Если $p \in \pi(G)$, то $G/G_{\varphi(p)} \in f(p) = f_p(p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subsetneq \mathfrak{F}_1$ и H – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H монолитична с монолитом $M = H^{\mathfrak{F}}$. Ввиду леммы 4 можем считать, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Тогда

$$H/O_\omega(H) \cong (H/O_p(H))/(O_\omega(H)/O_p(H)) \in f(\{p\}') = \mathfrak{F} = f(\omega').$$

Пусть $q \in \omega \cap \pi(H)$. Если $q = p$, то $H/H_{\varphi(q)} \in f_q(q) = f(q)$. Пусть $q \neq p$. Из $H/O_p(H) \in \mathfrak{F}$ следует, что $M \subseteq O_p(H)$ и $M \in \mathfrak{G}_{q'}$. Пусть $(H/M)_{\varphi(q)} = T/M$. Тогда $T \in \mathfrak{G}_{q'} \varphi(q) = \varphi(q)$ и поэтому $T = H_{\varphi(q)}$. Отсюда получаем

$$H/H_{\varphi(q)} \cong (H/M)/(H_{\varphi(q)}/M) = (H/M)/(H/M)_{\varphi(q)} \in f(q).$$

Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Главное направление φ верной формации назовем rp -направлением, если $\varphi(p)$ не содержит простых неабелевых pd -групп для любого $p \in \mathbb{P}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что направления ω -полной и ω -локальной формаций являются rp -направлениями.

ТЕОРЕМА 6. Пусть ω – непустое множество простых чисел. Формация $\mathfrak{F}$ является ω -верной с rp -направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является $\{p\}$ -верной формацией с rp -направлением φ для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из леммы 6.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \{p\}F(b_p, \varphi)$ – $\{p\}$ -верная формация с rp -направлением φ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$. В силу леммы 4 и теоремы 5 можем считать, что $b_p(\{p\}') = \mathfrak{F}$ и $b_p(p) = \text{form}(G/G_{\varphi(p)} \mid G \in \mathfrak{F})$ для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$. Пусть b – такая ωF -функция, что $b(\omega') = \mathfrak{F}$, $b(p) = b_p(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$, $b(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{B} = \omega F(b, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = b(\omega')$ и $G/G_{\varphi(p)} \in b_p(p) = b(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$.

Предположим, что $B \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{F}$ и B – группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда группа B монолитична с монолитом $R = B^{\mathfrak{F}}$. Пусть $p \in \pi(R)$. Поскольку

$B/O_\omega(B) \in b(\omega') = \mathfrak{F}$, то $R \subseteq O_\omega(B)$ и $p \in \omega$. Так как $B/B_{\varphi(p)} \in b(p)$, то $b(p) \neq \emptyset$ и, значит, $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $B/B_{\varphi(p)} \in b(p) = b_p(p)$. Покажем, что $B/O_p(B) \in b_p(\{p\}')$. Если $R \subseteq O_p(B)$, то R является неабелевой pd -группой. Поскольку φ — pn -направление, то $R \notin \varphi(p)$ и, значит, $B_{\varphi(p)} = 1$. Отсюда получаем $B \cong B/B_{\varphi(p)} \in b(p) = b_p(p) \subseteq \mathfrak{F}$, что невозможно. Поэтому $R \subseteq O_p(B)$ и $B/O_p(B) \cong (B/R)/(O_p(B)/R) \in \mathfrak{F} = b_p(\{p\}')$. Таким образом, $B \in \{p\}F(b_p, \varphi) = \mathfrak{F}$. Противоречие. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть ω — непустое множество простых чисел и $\omega_1 = \omega \cap \pi(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$. Формация $\mathfrak{F}$ является ω -верной с pn -направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является ω_1 -верной формацией с pn -направлением φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 6 $\mathfrak{F}$ является ω -верной формацией с pn -направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} - \{p\}$ -верная формация с pn -направлением φ для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F}) = \omega_1 \cap \pi(\mathfrak{F})$, но это по теореме 6 выполняется тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — ω_1 -верная формация с pn -направлением φ . Следствие доказано.

2. ω -верные классы Фиттинга групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Функцию $f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга групп}\}$ назовем ω -радикальной функцией простого натурального аргумента или, коротко, ωR -функцией. Функцию $g: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга групп}\}$ назовем радикальной функцией простого натурального аргумента или, коротко, $\mathbb{P}R$ -функцией.

ЛЕММА 7. Пусть f — ωR -функция, φ — $\mathbb{P}FR$ -функция и

$$\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi) = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G^{\varphi(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\}.$$

Тогда $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$. Поскольку

$$(NO^\omega(G))/O^\omega(G) \triangleleft G/O^\omega(G) \in \mathfrak{G}_\omega$$

и класс $\mathfrak{G}_\omega$ нормально наследственен, то

$$(NO^\omega(G))/O^\omega(G) \cong N/(N \cap O^\omega(G)) \in \mathfrak{G}_\omega$$

и поэтому $O^\omega(N) \subseteq O^\omega(G)$. Из $O^\omega(G) \in f(\omega')$ и нормальной наследственности класса $f(\omega')$ получаем $O^\omega(N) \in f(\omega')$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(N)$. Тогда $p \in \omega \cap \pi(G)$ и по условию $G^{\varphi(p)} \in f(p)$. Как и выше, $N/(N \cap G^{\varphi(p)}) \cong (NG^{\varphi(p)})/G^{\varphi(p)} \triangleleft G/G^{\varphi(p)}$. Отсюда следует, что $N^{\varphi(p)} \subseteq G^{\varphi(p)}$ и, значит, $N^{\varphi(p)} \in f(p)$. Таким образом, $N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $G = HK$, $H \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, H и K принадлежат $\mathfrak{F}$. Обозначим $O^\omega(G) = G_1$, $O^\omega(H) = H_1$, $O^\omega(K) = K_1$. Тогда $H_1K_1 \in f(\omega')$. Покажем, что $G_1 \subseteq H_1K_1$. Поскольку $G/(G_1K) \cong (G/G_1)/((G_1K)/G_1)$, то $G/(G_1K) \in \mathfrak{G}_\omega$. Согласно лемме 2.2 [14] $G_1K = H_1K$ и поэтому

$$G/(G_1K) = G/(H_1K) \cong (G/(H_1K_1))/((H_1K)/(H_1K_1)).$$

Так как

$$\begin{aligned}(H_1K)/(H_1K_1) &= (H_1K_1K)/(H_1K_1) \cong K/(K \cap H_1K_1) \\ &\cong (K/K_1)/((K \cap H_1K_1)/K_1) \in \mathfrak{G}_\omega,\end{aligned}$$

то $G/(H_1K_1)$ является расширением ω -группы $(H_1K)/(H_1K_1)$ посредством ω -группы $G/(G_1K)$ и, значит, $G/(H_1K_1) \in \mathfrak{G}_\omega$. Следовательно, $G_1 \subseteq H_1K_1$. Тем самым установлено, что $G_1 \in f(\omega')$.

Пусть $p \in \omega \cap \pi(G)$. Проводя рассуждения, как при доказательстве леммы 8 из [8], нетрудно получить, что $G^{\varphi(p)} \in f(p)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть f – $\mathbb{P}R$ -функция, φ – $\mathbb{P}FR$ -функция и

$$\mathfrak{F} = \mathbb{P}R(f, \varphi) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\varphi(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)\}.$$

Тогда $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем ω -верным, если $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi)$, где f и φ – некоторые ωR -функция и $\mathbb{P}FR$ -функция соответственно. Функцию f будем называть ωR -спутником, а функцию φ – направлением ω -верного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Пусть f – $\mathbb{P}R$ -функция. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \mathbb{P}R(f, \varphi)$ назовем верным, а f будем называть $\mathbb{P}R$ -спутником верного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Напомним, что группа G называется комонолитической, если в G имеется такая нормальная подгруппа M (комонолит группы G), что G/M – простая группа и $N \subseteq M$ для любой собственной нормальной подгруппы N группы G [5].

ЛЕММА 9. Пусть $\mathfrak{M}$ – класс Фиттинга и $\pi(\mathfrak{M}) \cap \omega = \emptyset$. Тогда $\mathfrak{M} = \omega R(m, \varphi)$, где m – ωR -функция такая, что $m(\omega') = \mathfrak{M}$, $m(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega$ и φ – произвольная $\mathbb{P}FR$ -функция. В частности, классы Фиттинга $\emptyset$ и (1) являются ω -верными для любого непустого множества $\omega \subseteq P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{M}_1 = \omega R(m, \varphi)$, где m и φ – из условия леммы. Покажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{M}$. Тогда $O^\omega(G) = G \in \mathfrak{M} = m(\omega')$ и из $p \in \omega \cap \pi(G) = \emptyset$ следует, что $G^{\varphi(p)} \in m(p)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{M}_1$ и, значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_1$.

Предположим, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$ и H – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{M}_1 \setminus \mathfrak{M}$. Тогда H является комонолитической группой с комонолитом $M = H_{\mathfrak{M}}$. Поскольку $O^\omega(H) \in m(\omega') = \mathfrak{M}$, то $O^\omega(H) \subseteq M$ и

$$H/M \cong (H/O^\omega(H))/(M/O^\omega(H)) \in \mathfrak{G}_\omega.$$

Пусть $p \in \pi(H/M)$. Тогда $p \in \omega \cap \pi(H)$ и $H^{\varphi(p)} \in m(p)$, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi)$ назовем ω -полным или, коротко, ωA -классом Фиттинга, если $\varphi(p) = \mathfrak{G}_{p'}$ для любого $p \in P$, и будем обозначать $\mathfrak{F} = \omega AR(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } O^{p'}(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\}$, а f будем называть ωA -спутником класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Пусть f – $\mathbb{P}R$ -функция. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = AR(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^{p'}(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)\}$ назовем полным классом Фиттинга с A -спутником f .

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой неединичный класс Фиттинга и $\omega = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является ω -полным классом Фиттинга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – такая ωR -функция, что

$$f(\omega') = \mathfrak{F}, \quad f(p) = \text{fit}(O^{p'}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$$

для всех $p \in \omega$ и $\mathfrak{F}_1 = \omega AR(f)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Если $H \in \mathfrak{F}$, то $O^\omega(H) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$ и $O^{p'}(H) \in \text{fit}(O^{p'}(G) \mid G \in \mathfrak{F}) = f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(H)$. Следовательно, $H \in \omega AR(f) = \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и T – группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа T комонолитична с комонолитом $L = T_{\mathfrak{F}}$, причем, как и в лемме 9, $O^\omega(T) \subseteq L$. Это означает, что $T/L \in \mathfrak{G}_\omega$. Пусть $p \in \pi(T/L)$. Предположим, что $O^{p'}(T) \subseteq L$. Тогда $T/L \cong (T/O^{p'}(T))/(L/O^{p'}(T)) \in \mathfrak{G}_{p'}$, что невозможно. Следовательно, $T = O^{p'}(T) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из теоремы 7 и леммы 9 следует, что каждый класс Фиттинга является ω -полным для некоторого непустого множества простых чисел ω . Обозначим направление ω -полного класса Фиттинга через φ_0 . Пусть f_1 и f_2 – произвольные ωR -функции (PR -функции). Будем говорить, что $f_1 \leq f_2$, если $f_1(p) \subseteq f_2(p)$ для всех $p \in \omega \cup \{\omega'\}$ ($p \in P$).

ЛЕММА 10. Пусть $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi)$, где φ – произвольная $\mathbb{P}FR$ -функция. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\mathfrak{F} = \omega R(g, \varphi)$, где $g(p) = f(p) \cap \mathfrak{F}$ для любого $p \in \omega \cup \{\omega'\}$;
- 2) $\mathfrak{F} = \omega R(h, \varphi)$, где $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = f(p)$ для всех $p \in \omega$;
- 3) если $\varphi_0 \leq \varphi$ и $\omega \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G^{\varphi(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Поскольку $g \leq f$, то $\omega R(g, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $O^\omega(G) \in f(\omega') \cap \mathfrak{F} = g(\omega')$ и $G^{\varphi(p)} \in f(p) \cap \mathfrak{F} = g(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, $G \in \omega R(g, \varphi)$ и $\mathfrak{F} \subseteq \omega R(g, \varphi)$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \omega R(g, \varphi)$.

2) Пусть h – ωR -функция, описанная в пункте 2) леммы, и $\mathfrak{H} = \omega R(h, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $O^\omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\omega')$ и для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$ имеем $G^{\varphi(p)} \in f(p) = h(p)$. Это означает, что $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Предположим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и B – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа B комонолитична с комонолитом $M = B_{\mathfrak{F}}$ и $O^\omega(B) \subseteq M$. Отсюда получаем, что $B/M \in \mathfrak{G}_\omega$, и ввиду $B/M \cong (B/O^\omega(M))/(M/O^\omega(M))$, имеем $B/O^\omega(M) \in \mathfrak{G}_\omega$. Поэтому $O^\omega(B) \subseteq O^\omega(M)$ и $O^\omega(B) \in f(\omega')$. Далее, $B \in \mathfrak{H}$ влечет $B^{\varphi(p)} \in h(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(B)$. Таким образом, $B \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

3) Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Так как $\omega \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то найдется такая группа $L \in \mathfrak{F}$, что $p \in \pi(L)$. Поэтому $L^{\varphi(p)} \in f(p)$ и, значит, $f(p) \neq \emptyset$. Из $G \in \mathfrak{G}_{p'} = \varphi_0(p) \subseteq \varphi(p)$ получаем $G^{\varphi(p)} = 1 \in f(p)$. Таким образом, $G^{\varphi(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi)$ назовем ω -локальным или, коротко, ωL -классом Фиттинга, если $\varphi(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{G}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и обозначаем

$\mathfrak{F} = \omega LR(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } F^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\}$, а f назовем ωL -спутником класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. В случае, когда f является $\mathbb{P}R$ -функцией, получаем определение локального класса Фиттинга $\mathfrak{F} = LR(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid F^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)\}$ с L -спутником f .

Как и для формаций, покажем, что определение 10 равносильно определению ω -локального класса Фиттинга из [5]. Для удобства ω -локальный класс Фиттинга

$$\mathfrak{F} = LR_\omega(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } F^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\}$$

из [5] временно назовем ωd -локальным классом Фиттинга.

ТЕОРЕМА 8. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является ωd -локальным;
- 2) класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является ω -локальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является ωd -локальным. Тогда по [5] $\mathfrak{F} = LR_\omega(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } F^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\}$, причем в силу [5, теорема 9] можем считать, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Рассмотрим класс Фиттинга $\omega LR(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } F^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $O^\omega(G) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ имеем $F^p(G) \in f(p)$. Следовательно, $G \in \omega LR(f)$ и $\mathfrak{F} \subseteq \omega LR(f)$.

Пусть $H \in \omega LR(f)$. Тогда $O^\omega(H) \in f(\omega')$ и $F^p(H) \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Поскольку $H^{\omega d} \subseteq O^\omega(H)$, то $H^{\omega d} \in f(\omega')$, а значит, $H \in \mathfrak{F}$ и $\omega LR(f) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \omega LR(f)$.

Пусть теперь класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является ω -локальным, т.е. $\mathfrak{F} = \omega LR(f)$. Согласно лемме 10 можем считать, что $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega \cup \{\omega'\}$, причем $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Рассмотрим класс Фиттинга $LR_\omega(f) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } F^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G^{\omega d} \in \mathfrak{F} = f(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ имеем $F^p(G) \in f(p)$. Следовательно, $G \in LR_\omega(f)$ и $\mathfrak{F} \subseteq LR_\omega(f)$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subsetneq LR_\omega(f)$ и H – группа наименьшего порядка из $LR_\omega(f) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H комонолитична с комонолитом $M = H_{\mathfrak{F}}$. Из $H^{\omega d} \in f(\omega') = \mathfrak{F}$ следует, что $H^{\omega d} \subseteq M$ и $H/M \cong (H/H^{\omega d})/(M/H^{\omega d}) \in \mathfrak{G}_{\omega d}$. Это означает, что $\omega \cap \pi(H/M) \neq \emptyset$. Если H/M – абелева группа, то $\pi(H/M) \subseteq \omega$ и $O^\omega(H) \subseteq M$. Отсюда получаем $O^\omega(H) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Кроме того, для любого $p \in \omega \cap \pi(H)$ выполняется $F^p(H) \in f(p)$.

Поэтому $H \in \omega LR(f) = \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, H/M – неабелева группа. Пусть $p \in \omega \cap \pi(H/M)$. Если $F^p(H) \subseteq M$, то

$$H/M \cong (H/F^p(H))/(M/F^p(H)) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{G}_{p'}.$$

Это в силу $H/M \notin \mathfrak{N}_p$ и $H/M \notin \mathfrak{G}_{p'}$ означает, что группа H/M p -замкнута. Однако H/M – простая группа. Получили противоречие. Следовательно, $F^p(H) \not\subseteq M$ и поэтому $H = F^p(H) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$, что невозможно. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой неединичный класс Фиттинга и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является ω -всерным с направлением φ и ωA -спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – всерный класс Фиттинга с направлением φ и $\mathbb{P}R$ -спутником f_1 таким, что $f_1(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$ и $f_1(p) = \emptyset$ для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \omega$. Такие ωR -спутник f и $\mathbb{P}R$ -спутник f_1 класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ будем называть ω -равными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi) = \{G \in \mathfrak{G} \mid O^\omega(G) \in f(\omega')\}$ и $G^{\varphi(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Рассмотрим $\mathbb{P}R$ -функцию f_1 такую, что $f_1(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$ и $f_1(p) = \emptyset$ для любого $p \in \mathbb{P} \setminus \omega$. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \mathbb{P}R(f_1, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Так как $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, то $f(\omega') \neq \emptyset$. Поскольку $\mathfrak{F} \neq (1)$, то $\omega \neq \emptyset$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда G является ω -группой и, значит, $G^{\varphi(p)} \in f(p) = f_1(p)$ для любого $p \in \pi(G) \subseteq \omega$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и T – группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T – комонолитическая группа с комонолитом $M = T_{\mathfrak{F}}$. Поскольку для любого $p \in \pi(T/M)$ в силу $T \in \mathfrak{F}_1$ выполняется $T^{\varphi(p)} \in f_1(p)$, то $f_1(p) \neq \emptyset$ и $\pi(T/M) \subseteq \omega$. Тогда $\pi(T) \subseteq \omega$ и $T^{\varphi(p)} \in f_1(p) = f(p)$ для всех $p \in \pi(T) \cap \omega$. Далее, ввиду леммы 10 можем считать, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Из $T/M \in \mathfrak{G}_\omega$ получаем, что $O^\omega(T) \subseteq M \in \mathfrak{F}$ и $O^\omega(T) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Таким образом, $T \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Достаточность. Пусть теперь $\mathfrak{F} = \mathbb{P}R(g, \varphi)$ – всерный класс Фиттинга с направлением φ . Рассмотрим ωR -функцию h такую, что $h(\omega') = \mathfrak{F}$, $h(p) = g(p)$ для любого $p \in \omega$. Пусть $\mathfrak{H} = \omega R(h, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $O^\omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ справедливо $G^{\varphi(p)} \in g(p) = h(p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда H – комонолитическая группа с комонолитом $M = H_{\mathfrak{F}}$. Так как $O^\omega(H) \in h(\omega') = \mathfrak{F}$, то $O_\omega(H) \subseteq M$. Из $H/M \cong (H/O^\omega(H))/(M/O^\omega(H)) \in \mathfrak{G}_\omega$ следует, что $\pi(H) \subseteq \omega$, и поэтому $H^{\varphi(p)} \in h(p) = g(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(H) = \pi(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 9.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой неединичный класс Фиттинга и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является ω -полным с ωA -спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – полный класс Фиттинга с A -спутником f_1 , ω -равным f .

СЛЕДСТВИЕ 9.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой неединичный класс Фиттинга и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является ω -локальным с ωL -спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга с L -спутником f_1 , ω -равным f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Направление φ всерного класса Фиттинга назовем *главным* или, коротко, *p -направлением*, если $\varphi(p) = \varphi(p)\mathfrak{G}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$.

ТЕОРЕМА 10. Если $\mathfrak{F}$ – всерный класс Фиттинга с p -направлением φ , то $\mathfrak{F}$ является ω -всерным классом Фиттинга с p -направлением φ для любого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω – непустое подмножество множества $\mathbb{P}$, $\mathfrak{F} = \mathbb{P}R(f, \varphi)$ – всерный класс Фиттинга с p -направлением φ . Рассмотрим ωR -функцию h такую, что $h(\omega') = \mathfrak{F}$, $h(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$. Пусть $\mathfrak{H} = \omega R(h, \varphi)$. Как и при доказательстве теоремы 9, легко проверить, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $H \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$ и H – группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда H – комонолитическая группа с комонолитом $M = H_{\mathfrak{F}}$, причем, как и при доказательстве теоремы 9, $O^\omega(H) \subset M$ и $\pi(H/M) \subseteq \omega$. Поэтому $H^{\varphi(p)} \in h(p) = f(p)$ для всех $p \in \pi(H/M)$. Пусть $q \in \pi(H) \setminus \pi(H/M)$. Это означает, что $H/M \in \mathfrak{G}_{q'}$. Поскольку $H/M \cong (H/M^{\varphi(q)})/(M/M^{\varphi(q)})$, то $H/M^{\varphi(q)} \in \varphi(q)\mathfrak{G}_{q'} = \varphi(q)$ и $H^{\varphi(q)} \subseteq M^{\varphi(q)}$. Из $M \in \mathfrak{F}$ следует, что $H^{\varphi(q)} \in f(q)$. Таким образом, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 10.1. Если $\mathfrak{F}$ – полный класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ является ω -полным классом Фиттинга для любого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$.

СЛЕДСТВИЕ 10.2. Если $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ является ω -локальным классом Фиттинга для любого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – произвольный набор ωR -функций (PR -функций). Обозначим через $\bigcap_{i \in I} f_i$ такую ωR -функцию (PR -функцию) f , что $f(p) = \bigcap_{i \in I} f_i(p)$ для всех $p \in \omega \cup \{\omega'\}$ ($p \in \mathbb{P}$).

ЛЕММА 11. Пусть φ – произвольная $\mathbb{P}FR$ -функция, $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = \omega R(f_i, \varphi)$ ($\mathfrak{F}_i = \mathbb{P}R(f_i, \varphi)$), $i \in I$. Тогда $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi)$ ($\mathfrak{F} = \mathbb{P}R(f, \varphi)$), где $f = \bigcap_{i \in I} f_i$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 5.

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустое множество групп. Обозначим через $\omega R(\mathfrak{X}, \varphi)$ пересечение всех ω -верных классов Фиттинга с направлением φ , которые содержат $\mathfrak{X}$; $\mathbb{P}R(\mathfrak{X}, \varphi)$ – пересечение всех верных классов Фиттинга с направлением φ , содержащих $\mathfrak{X}$. При фиксированном φ классы Фиттинга $\omega R(\mathfrak{X}, \varphi)$ и $\mathbb{P}R(\mathfrak{X}, \varphi)$ будем также коротко обозначать $\omega R(\mathfrak{X})$ и $\mathbb{P}R(\mathfrak{X})$ соответственно. Далее, $\omega AR(\mathfrak{X})$ и $AR(\mathfrak{X})$, $\omega LR(\mathfrak{X})$ и $LR(\mathfrak{X})$ – соответственно ω -полный и полный, ω -локальный и локальный классы Фиттинга, порожденные $\mathfrak{X}$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – совокупность всех ωR -спутников ω -верного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ с фиксированным направлением φ . Назовем ωR -функцию f минимальным ωR -спутником класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, если f является минимальным элементом множества $\{f_i \mid i \in I\}$. Аналогично определяется минимальный $\mathbb{P}R$ -спутник верного класса Фиттинга.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда ω -верный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega R(\mathfrak{X}, \varphi)$ с направлением φ , где $\varphi_0 \leq \varphi$, обладает единственным минимальным ωR -спутником f таким, что

$$f(\omega') = \text{fit}(O^\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \quad f(p) = \text{fit}(G^{\varphi(p)} \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathfrak{G}$ является ω -верным классом Фиттинга с направлением φ , где $\varphi_0 \leq \varphi$, и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{G}$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega R(\mathfrak{X}, \varphi)$ существует и, значит, множество L всех ωR -спутников класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ непусто. Обозначим через f_1 пересечение всех элементов из L . По лемме 11 $\mathfrak{F} = \omega R(f_1, \varphi)$ и f_1 – единственный минимальный ωR -спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Пусть f – ωR -функция, описанная в заключении теоремы. Покажем, что $f = f_1$. Пусть $M \in \mathfrak{X}$. Тогда $O^\omega(M) \in f(\omega')$ и из $\pi(M) \subseteq \pi(\mathfrak{X})$ следует, что $M^{\varphi(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(M)$. Это означает, что $M \in \omega R(f, \varphi)$ и $\mathfrak{X} \subseteq \omega R(f, \varphi)$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \omega R(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \omega R(f, \varphi)$.

Покажем, что $\omega R(f, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$. Тогда найдется такая группа $H \in \mathfrak{F}$, что $p \in \omega \cap \pi(H)$. Из равенства $\mathfrak{F} = \omega R(f_1, \varphi)$ следует, что $H^{\varphi(p)} \in f_1(p)$. Поэтому $f_1(p) \neq \emptyset$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если $p \in \omega \cap \pi(G)$, то из $G \in \mathfrak{F} = \omega R(f_1, \varphi)$ получаем $G^{\varphi(p)} \in f_1(p)$. Пусть теперь $p \in (\omega \cap \pi(\mathfrak{X})) \setminus (\omega \cap \pi(G))$. Тогда $G \in \mathfrak{G}_{p'} = \varphi_0(p) \subseteq \varphi(p)$ и поэтому $G^{\varphi(p)} = 1 \in f_1(p)$. Таким образом, $f(p) = \text{fit}(G^{\varphi(p)} \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(p)$. Кроме того, из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ имеем $f(\omega') = \text{fit}(O^\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\omega')$. Если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$, то $f(p) = \emptyset \subseteq f_1(p)$. Следовательно, $f \leq f_1$ и $\omega R(f, \varphi) \subseteq \omega R(f_1, \varphi)$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi)$ и, значит, $f \in L$. Поскольку f_1 – единственный минимальный ωR -спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то $f \leq f_1$ влечет $f = f_1$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 11.1. Пусть f_i – минимальный ωR -спутник ω -вещного класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ с направлением φ , где $\varphi_0 \leq \varphi$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.

СЛЕДСТВИЕ 11.2. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда ω -полный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega AR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ωA -спутником f таким, что $f(\omega') = \text{fit}(O^\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, $f(p) = \text{fit}(O^{p'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

СЛЕДСТВИЕ 11.3. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда полный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = AR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным A -спутником f таким, что $f(p) = \text{fit}(O^{p'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \pi(\mathfrak{X})$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega = \mathbb{P}$. Согласно следствию 10.1 класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является ω -полным и, значит, по следствию 11.2 $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным ωA -спутником f_1 . Пусть f – $\mathbb{P}R$ -функция, описанная в заключении следствия. Тогда $f(p) = f_1(p)$ для всех $p \in \mathbb{P} = \omega$. Покажем, что $\mathfrak{F} = AR(f)$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то для любого $p \in \pi(G) = \omega \cap \pi(G)$ справедливо $O^{p'}(G) \in f_1(p) = f(p)$ и поэтому $G \in AR(f)$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq AR(f)$. Пусть теперь $H \in AR(f)$ и $p \in \omega \cap \pi(H) = \pi(H)$. Тогда $O^{p'}(H) \in f(p) = f_1(p)$. Кроме того, из $H \in \mathfrak{G}_\omega$ получаем $O^\omega(H) \cong 1 \in f_1(\omega')$. Таким образом, $H \in \mathfrak{F}$ и $AR(f) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = AR(f)$, т.е. f – A -спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Предположим, что найдется такой A -спутник h класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, что $f(q) \not\subseteq h(q)$ для некоторого $q \in \mathbb{P}$. Пусть h_1 – такая ωR -функция, что $h_1(p) = h(p)$ для всех $p \in \omega$ и $h_1(\omega') = f_1(\omega')$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \omega AR(h_1)$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^\omega(G) \in f_1(\omega') = h_1(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(G) = \pi(G)$ справедливо $O^{p'}(G) \in h(p) = h_1(p)$. Это означает, что $G \in \omega AR(h_1)$. Пусть $L \in \omega AR(h_1)$ и $p \in \pi(L)$. Тогда из $\pi(L) = \omega \cap \pi(L)$ следует, что $O^{p'}(L) \in h_1(p) = h(p)$. Поэтому $L \in AR(h) = \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \omega AR(h_1)$. Поскольку f_1 – единственный минимальный ωA -спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то $f_1(p) \subseteq h_1(p)$ для всех $p \in \omega \cup \{\omega'\}$. Однако $f_1(q) = f(q) \not\subseteq h(q) = h_1(q)$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что f – единственный минимальный A -спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 11.4 [5]. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда ω -локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega LR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ωL -спутником f таким, что $f(\omega') = \text{fit}(O^\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, $f(p) = \text{fit}(F^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

СЛЕДСТВИЕ 11.5. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = LR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным L -спутником f таким, что $f(p) = \text{fit}(F^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \pi(\mathfrak{X})$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

ЛЕММА 12. Пусть ω – непустое множество простых чисел. Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является ω -верным с p -направлением φ , то $\mathfrak{F}$ является $\{p\}$ -верным с p -направлением φ для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi)$ – ω -верный класс Фиттинга с p -направлением φ и $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ является $\{p\}$ -верным классом Фиттинга с направлением φ . Пусть f_p – такая $\{p\}R$ -функция, что $f_p(p) = f(p)$, $f_p(\{p\}') = \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_1 = \{p\}R(f_p, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^p(G) \in \mathfrak{F} = f_p(\{p\}')$. Если $p \in \pi(G)$, то $G^{\varphi(p)} \in f(p) = f_p(p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и H – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H комонолитична с комонолитом $M = H_{\mathfrak{F}}$. Ввиду леммы 10 можем считать, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Тогда из $p \in \omega$ следует $O^\omega(H) \subseteq O^p(H)$ и, значит, $O^\omega(H) \in f(\{p\}') = \mathfrak{F} = f(\omega')$. Пусть $q \in \omega \cap \pi(H)$. Если $q = p$, то $H^{\varphi(q)} \in f_q(q) = f(q)$. Пусть $q \neq p$. Из $O^p(H) \in \mathfrak{F}$ следует, что $O^p(H) \subseteq M$. Тогда $H/M \cong (H/O^p(H))/(M/O^p(H)) \in \mathfrak{G}_{q'}$. Так как $H/M \cong (H/M^{\varphi(q)})/(M/M^{\varphi(q)})$, то

$$(H/M^{\varphi(q)}) \in \varphi(q)\mathfrak{G}_{q'} = \varphi(q)$$

и $H^{\varphi(q)} \subseteq M^{\varphi(q)} \in f(q)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Главное направление φ верного класса Фиттинга назовем pn -направлением, если $\varphi(p)$ не содержит простых неабелевых pd -групп для любого $p \in \mathbb{P}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Как и для формаций, направления ω -полного и ω -локального классов Фиттинга являются pn -направлениями.

ТЕОРЕМА 12. Пусть ω – непустое множество простых чисел. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является ω -верным с pn -направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является $\{p\}$ -верным классом Фиттинга с pn -направлением φ для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из леммы 12.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \{p\}R(b_p, \varphi)$ – $\{p\}$ -верный класс Фиттинга с pn -направлением φ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$. В силу леммы 10 и теоремы 11 можем считать, что $b_p(\{p\}') = \mathfrak{F}$ и $b_p(p) = \text{fit}(G^{\varphi(p)} \mid G \in \mathfrak{F})$ для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$. Пусть b – такая ωR -функция, что $b(\omega') = \mathfrak{F}$, $b(p) = b_p(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$, $b(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{B} = \omega R(b, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $O^\omega(G) \in \mathfrak{F} = b(\omega')$ и $G^{\varphi(p)} \in b_p(p) = b(p)$ для каждого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $G \in \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$.

Предположим, что $B \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{F}$ и B – группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда группа B комонолитична с комонолитом $M = B_{\mathfrak{F}}$, причем $O^\omega(B) \subseteq M$. Пусть $p \in \pi(B/M)$. Поскольку $B/M \cong (B/O^\omega(B))/(M/O^\omega(B)) \in \mathfrak{G}_\omega$, то $p \in \omega$. Если $p \notin \pi(\mathfrak{F})$, то $b(p) = \emptyset$, что в силу $B^{\varphi(p)} \in b(p)$ невозможно. Следовательно, $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $B^{\varphi(p)} \in b(p) = b_p(p)$. Покажем, что $O^p(B) \in b_p(\{p\}')$. Допустим, что B/M – неабелева группа. Если $B^{\varphi(p)} \subset B$, то $B^{\varphi(p)} \subseteq M$ и $B/M \cong (B/B^{\varphi(p)})/(M/B^{\varphi(p)}) \in \varphi(p)$. С другой стороны, поскольку φ – pn -направление, то $B/M \notin \varphi(p)$. Противоречие. Следовательно, B/M – абелева p -группа и $O^p(B) \subseteq M$. Тогда $O^p(B) \in \mathfrak{F} = b_p(\{p\}')$. Таким образом, $B \in \{p\}R(b_p, \varphi) = \mathfrak{F}$. Противоречие. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 12.1. Пусть ω – непустое множество простых чисел и $\omega_1 = \omega \cap \pi(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является ω -верным с pn -направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является ω_1 -верным классом Фиттинга с pn -направлением φ .

Доказательство проводится аналогично доказательству следствия 6.1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1963. V. 80. № 4. P. 300–305.
- [2] Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. V. 3. № 9. P. 193–207.
- [3] Шеметков Л. А. Ступенчатые формации групп // Матем. сб. 1974. Т. 94. № 4. С. 628–648.
- [4] Шеметков Л. А. О произведении формаций // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 2. С. 101–103.
- [5] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды. 1999. Т. 2. № 2. С. 114–147.
- [6] Ведерников В. А., Коптюх Д. Г. Частично композиционные формации групп. Препринт № 2. Брянск: БГПУ, 1999.
- [7] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Частично композиционные формации конечных групп // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43. № 4. С. 5–8.
- [8] Ведерников В. А., Сорокина М. М. Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. Препринт № 5. Брянск: БГПУ, 1999.
- [9] Борович З. И. О расположении подгрупп // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1979. Т. 94. С. 5–12.
- [10] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
- [11] Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
- [12] Шеметков Л. А. Гашюковы произведения классов групп // Докл. НАН Беларуси. 1998. Т. 42. № 3. С. 22–26.
- [13] Ведерников В. А. Подпрямые произведения и формации конечных групп // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 5. С. 523–548.
- [14] Ведерников В. А. Элементы теории классов групп. Смоленск: СГПИ, 1988.

(В. А. Ведерников) Московский городской педагогический университет
 (М. М. Сорокина) Брянский государственный педагогический университет
E-mail: vavedernikov@mail.ru

Поступило
 20.07.2000