Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Граев, Относительно замкнутые операторы, связанные с парой грассманианов, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 1, 61–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm328>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:20:43

УДК 517.43

ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАМКНУТЫЕ ОПЕРАТОРЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПАРОЙ ГРАССМАНИАНОВ

М. И. Граев

Понятие относительно замкнутых операторов естественно возникает в задачах интегральной геометрии при построении локальных формул обращения. В статье построены семейства относительно замкнутых операторов для интегральных преобразований, связанных с парами вещественных грассманианов. Как следствие получено описание всех локальных формул обращения для этих преобразований.

Библиография: 7 названий.

Введение. Изложим, не приводя точных формулировок, определение относительной замкнутости в интегральной геометрии.

Пусть X, Y – многообразия, между которыми задано отношение инцидентности $A \subset X \times Y$; $X^y \subset X$ – подмногообразие точек $x \in X$, инцидентных одной точке $y \in Y$; аналогично определяются подмногообразия Y^x в Y . Предполагается, что отношение инцидентности удовлетворяет набору естественных требований (см. [1]), а на подмногообразиях X^y заданы меры. Обозначим через $\mathcal{J}f(y)$ интеграл функции f на X по подмногообразию X^y . Таким образом, отображение $\mathcal{J}$ преобразует функции на X в функции на Y . (На самом деле, вместо функций на X и Y часто рассматриваются сечения подходящих расслоений над X и Y .)

Пусть κ – линейный дифференциальный оператор, переводящий функции на Y во внешние формы степени $p < \dim Y^x$ на Y . Скажем, что κ *относительно замкнут*, если

$$d\kappa(\mathcal{J}f)|_{Y^x} = 0$$

для любой функции f на X и любой точки $x \in X$ (см. примеры в [1], [2]).

Если κ относительно замкнут, то для любой точки $x \in X$ и любого цикла $\gamma^x \subset Y^x$ размерности p имеем

$$\int_{\gamma^x} \kappa(\mathcal{J}f) = c(\gamma^x) (Lf)(x), \quad (1)$$

где постоянная $c(\gamma^x)$ зависит только от класса гомологий γ^x , а L – линейный дифференциальный оператор, зависящий только от κ ; например, L – оператор умножения на

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00798.

функцию от x . Оператор κ называется *тривиальным*, если правая часть (1) тождественно равна 0. Таким образом, для каждого нетривиального относительно замкнутого оператора κ равенство (1) восстанавливает Lf по образу $\mathcal{J}f$ функции f .

Эта статья посвящена описанию относительно замкнутых операторов κ для пары $X = G_{l,n}$, $Y = G_{k,n}$, где $G_{l,n}, G_{k,n}$ – многообразия (грассманианы) соответственно l -мерных и k -мерных ориентированных подпространств в $\mathbb{R}^n$, $l < k < n - l$, и $A \subset X \times Y$ – многообразие флагов. Явно построены все, с точностью до тривиальных, относительно замкнутые операторы κ , для которых L является умножением на функцию. Пространство этих операторов наделено естественной структурой $GL(n)$ -модуля, и как $GL(n)$ -модуль оно изоморфно пространству $S^k \wedge^l \mathbb{C}^n$, где S^k и $\wedge^l$ – соответственно симметрическая и внешняя тензорные степени. Случай $l = 1$ был ранее исследован в [3].

Одновременно построен класс операторов κ , удовлетворяющих условию относительной замкнутости более общего вида

$$d\kappa(\mathcal{J}f) |_{G_{k,n}^h} = 0 \quad \text{для любого } h \in G_{r,n},$$

где $l \leq r < k$, $G_{k,n}^h \subset G_{k,n}$ – подмногообразие k -подпространств, содержащих h . Этим операторам отвечают формулы обращения, восстанавливающие по функции $\mathcal{J}f$ интегралы исходной функции f по подмногообразиям l -мерных подпространств, принадлежащих произвольному фиксированному r -мерному подпространству (см. [4], [5]). Подробному исследованию таких операторов и связанных с ними формул обращения будет посвящена другая статья.

1. Интегральные преобразования, связанные с парами грассманианов.

Изложим определение из [6] и основные свойства интегрального преобразования $\mathcal{J}_{kl}$, связанного с многообразиями (грассманианами) $G_{l,n}$ и $G_{k,n}$ l -мерных и k -мерных ориентированных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$, где $l < k$.

Пусть $\mathcal{E}_{k,n}$, $k < n$, – многообразие вещественных невырожденных $(k \times n)$ -матриц. На $\mathcal{E}_{k,n}$ транзитивно действует группа $GL(k) \times GL(n)$ согласно формуле $x \in \mathcal{E}_{k,n} \mapsto g_1^{-1} x g_2$ для каждой пары $(g_1, g_2) \in GL(k) \times GL(n)$. Многообразие $\mathcal{E}_{k,n}$ является главным расслоенным пространством группы $GL_+(k)$ над грассманианом $G_{k,n}$: проекция $\mathcal{E}_{k,n} \rightarrow G_{k,n} = GL_+(k) \backslash \mathcal{E}_{k,n}$ относит каждой матрице $x \in \mathcal{E}_{k,n}$ ориентированное подпространство, натянутое на ее векторы-строки. Очевидно, отображение $\mathcal{E}_{k,n} \rightarrow G_{k,n}$ перестановочно с действием группы $GL(n)$ на $\mathcal{E}_{k,n}$ и $G_{k,n}$.

Обозначим для любой пары натуральных чисел $l, k \leq n$ через H_l^k подпространство C^∞ -функций на $\mathcal{E}_{l,n}$, удовлетворяющих условию

$$f(gx) = |\det g|^{-k} f(x) \quad \text{для любого } g \in GL(l). \quad (1.1)$$

Заметим, что элементы из H_l^k можно интерпретировать как сечения одномерного расслоения над грассманианом $G_{l,n}$.

Свяжем с каждой функцией $f \in H_l^k$ и каждой точкой $x \in E_{l,n}$ следующую дифференциальную форму степени $l(k-l)$ на многообразии $\mathcal{E}_{l,k}$:

$$f(tx) \sigma_{lk}(t) = f(tx) \sigma_{lk}^1(t) \wedge \cdots \wedge \sigma_{lk}^l(t),$$

где $\sigma_{lk}^j(t) = \sum \text{sign}(i_1, \dots, i_k) t_1^{i_1} \dots t_l^{i_l} dt_j^{i_{l+1}} \wedge \dots \wedge dt_j^{i_k}$ (сумма по всем перестановкам $(i_1, \dots, i_k)$ индексов $1, \dots, k$). Эта форма опускается с многообразия $\mathcal{E}_{l,k}$ на грассманиан $G_{l,k}$, а потому ее интеграл по любому сечению расслоения $\mathcal{E}_{l,k} \rightarrow G_{l,k}$ не зависит от выбора этого сечения.

По определению интегральное преобразование, связанное с грассманианами $G_{l,n}$ и $G_{k,n}$, где $l < k \leq n - l$, есть оператор $\mathcal{J}_{kl}: H_l^k \rightarrow H_k^l$, заданный следующей формулой:

$$(\mathcal{J}_{kl}f)(x) = \int_{G_{l,k}} f(tx) \sigma_{lk}(t). \quad (1.2)$$

Оператор $\mathcal{J}_{kl}$ перестановочен с представлениями группы $GL(n)$, естественно действующими на пространствах H_l^k и H_k^l , и можно доказать, что этим свойством он определяется однозначно с точностью до множителя.

В [6] доказано, что функция $\varphi \in H_k^l$ принадлежит образу оператора $\mathcal{J}_{kl}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений степени $l + 1$:

$$\det \|\partial_{s_j}^{\nu_i}\|_{i,j=1,\dots,l+1} \varphi = 0 \quad \text{для любых } \nu_s = 1, \dots, k, \quad j_t = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

где $\partial_j^\nu = \partial/\partial x_\nu^j$, x_ν^j , $j = 1, \dots, n$, $\nu = 1, \dots, k$, — элементы матриц $x \in \mathcal{E}_{k,l}$.

Условиям (1.3) можно придать другую эквивалентную форму, введя следующие операторы на $\mathcal{E}_{k,n}$:

$$d_j^i = \sum_{s=1}^n \partial_s^i dx_j^s, \quad i, j = 1, \dots, k. \quad (1.4)$$

Именно,

$$\sum_j (d_{j_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge d_{j_{l+1}}^{i_{l+1}}) \varphi = 0, \quad (1.5)$$

где сумма берется по всем перестановкам индексов $j_1, \dots, j_{l+1}$.

В частности,

$$(d_j^{i_1} \wedge \dots \wedge d_j^{i_{l+1}}) \varphi = 0 \quad \text{для любых } i_1, \dots, i_{l+1}, j = 1, \dots, k. \quad (1.6)$$

При $k + l < n$ и четном $k - l$ в [6] получена формула обращения, восстанавливающая функцию $f \in H_l^k$ по ее образу $\mathcal{J}_{kl}f$. Приведем ее в удобной для дальнейшего форме. Введем оператор на H_k^l :

$$\kappa_l = \bigwedge_{j=1}^{k-l} \bigwedge_{i=1}^l d_{r+j}^i. \quad (1.7)$$

Отождествим $\mathcal{E}_{k,n}$ с открытым подмножеством в $\mathcal{E}_{l,n} \times \mathcal{E}_{k-l,n}$, полагая $x = (x', x'')$, где $x' \in \mathcal{E}_{l,n}$ и $x'' \in \mathcal{E}_{k-l,n}$ состоят соответственно из первых l и последних $k - l$ строк матрицы $x \in \mathcal{E}_{k,n}$. Обозначим через $\mathcal{E}_{k,n}^{x'}$, $x' \in \mathcal{E}_{l,n}$, подмногообразие матриц $x = (x', x'') \in \mathcal{E}_{k,n}$ с фиксированным x' .

Доказано, что для любой функции $\varphi \in H_k^l$ и любого $x' \in \mathcal{E}_{l,n}$ дифференциальная форма $\kappa_l \varphi|_{\mathcal{E}_{k,n}^{x'}}$ опускается на грассманиан $G_{k-l,n}$ при естественном отображении $\mathcal{E}_{k,n}^{x'} \rightarrow G_{k-l,n}$.

ТЕОРЕМА. Если $\varphi = \mathcal{J}_{kl}f$, $f \in H_l^k$, то для любого $x' \in \mathcal{E}_{l,n}$ дифференциальная форма $\kappa_l \varphi$ замкнута на $\mathcal{E}_{k,n}^{x'}$ и

$$\int_{\gamma} \kappa_l \varphi = c(\gamma) f(x') \quad (1.8)$$

для любого цикла γ размерности $l(k-l)$ в проекции $\mathcal{E}_{k,n}^{x'}$ на $G_{k-l,n}$. Здесь $c(\gamma)$ зависит только от класса гомологий γ и $c(\gamma) \neq 0$; например, $c(\gamma) \neq 0$, если γ – подмногообразие $(k-l)$ -мерных подпространств, принадлежащих фиксированному k -мерному подпространству.

2. Условие относительной замкнутости. Пусть κ – линейный дифференциальный оператор из пространства функций на $\mathcal{E}_{k,n}$ в пространство дифференциальных форм произвольной фиксированной степени на грассманиане $G_{k,n}$. Скажем, что κ удовлетворяет условию относительной замкнутости типа r , где $l \leq r < k$ (короче, относительно замкнут типа r), если для любой функции $\varphi \in H_k^l$ из образа интегрального преобразования $\mathcal{J}_{kl}$ и любого $h \in G_{r,n}$ дифференциальная форма $\kappa \varphi$ замкнута на подмногообразии $G_{k,n}^h \subset G_{k,n}$ k -подпространств, содержащих h .

Таким образом, с каждым относительно замкнутым оператором κ типа r связано пространство замкнутых дифференциальных форм $d\kappa(\mathcal{J}_{kl}f)$, $f \in H_l^k$, на $G_{k,n}$, равных нулю на подмногообразиях $G_{k,n}^h$, $h \in G_{r,n}$.

Если κ – относительно замкнутый оператор типа r и $\deg(\kappa\varphi) < \dim G_{k,n}^h$, то для каждого $h \in G_{r,n}$ линейный функционал на H_l^k

$$f \mapsto \int_{\gamma^h} \varphi(\mathcal{J}_{kl}f),$$

где γ^h – цикл в $G_{k,n}^h$ размерности $\deg(\kappa\varphi)$, зависит только от класса гомологий γ^h и сосредоточен на подмногообразии l -подпространств, содержащихся в h . В частности, при $r = l$ он сосредоточен в точке h . Назовем κ тривиальным, если для каждого γ^h этот линейный функционал равен тождественно нулю.

Здесь для каждого r из интервала $l \leq r < k$ будут явно построены семейства относительно замкнутых операторов κ типа r .

Сначала введем алгебру A_k линейных операторов из пространства функций на $\mathcal{E}_{k,n}$ в пространство дифференциальных форм на $\mathcal{E}_{k,n}$:

$$A_k = \mathcal{D} \otimes \Omega,$$

где $\mathcal{D}$ – алгебра линейных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами на $\mathcal{E}_{k,n}$, а Ω – внешняя алгебра дифференциальных форм на $\mathcal{E}_{k,n}$ с постоянными коэффициентами. По определению оператор $\kappa = \partial \otimes \omega$, где $\partial \in \mathcal{D}$, $\omega \in \Omega$, действует на функции φ по формуле $\kappa\varphi = (\partial\varphi)\omega$. Степень дифференциальной формы $\kappa\varphi$ назовем *рангом оператора κ* .

Алгебра A_k снабжена естественной градуировкой:

$$A_k = \bigoplus_{p,q} (\mathcal{D}_p \times \Omega_q),$$

где $\mathcal{D}_p$ – пространство однородных линейных дифференциальных операторов степени p на $\mathcal{E}_{k,n}$ с полиномиальными коэффициентами и Ω_q – пространство дифференциальных форм степени q на $\mathcal{E}_{k,n}$ с постоянными коэффициентами. В пространствах $\mathcal{D}_p, \Omega_q$ и на всем пространстве A_k определены представления группы $GL(k) \times GL(n)$, порожденные действием этой группы на многообразии матриц $\mathcal{E}_{k,n}$. Очевидно, что пространство A_k разлагается в прямую сумму инвариантных конечномерных неприводимых подпространств.

Обозначим через A_k^l подпространство операторов $\kappa \in A_k$ таких, что для любой функции $\varphi \in H_k^l$ дифференциальная форма $\kappa\varphi$ опускается с $\mathcal{E}_{k,n}$ на $G_{k,n}$, а потому может рассматриваться как форма на грассманиане $G_{k,n}$. Обозначим далее через $B_k^{l,r} \subset A_k^l$ подпространство относительно замкнутых операторов типа r , где $l \leq r < k$. Очевидно, что подпространства A_k^l и $B_k^{l,r}$ инвариантны относительно группы $GL(k) \times GL(n)$ и подобно всему пространству A_k они разлагаются в прямую сумму инвариантных конечномерных неприводимых подпространств.

Каждому оператору $\kappa \in B_k^{l,r}$ типа r и каждому $h \in G_{r,n}$ соответствует линейный функционал на H_l^k :

$$f \mapsto \int_{\gamma^h} \kappa(\mathcal{J}_{kl} f),$$

где γ^h – цикл подходящей размерности в подмногообразии $G_{k,n}^h \subset G_{k,n}$ k -подпространств, содержащих h . Он зависит только от класса гомологий γ^h и сосредоточен на подмногообразии l -подпространств, принадлежащих h . В частности, при $r = l$ он сосредоточен в точке $l \in \mathcal{E}_{l,n}$. Назовем κ тривиальным, если для любого цикла γ этот функционал равен тождественно нулю.

3. Операторы $\sigma(a, \alpha; p, q)$. Этот и следующий пункты посвящены построению операторов $\kappa \in A_k^l$. Воспользуемся следующими обозначениями (см. [7]). Пусть заданы наборы $f^i = (f_1^i, \dots, f_k^i)$, $i = 1, \dots, k-p$, и $\omega^i = (\omega_1^i, \dots, \omega_k^i)$, $i = k-p+1, \dots, k$, где f_j^i – функции, а ω_j^i – дифференциальные 1-формы с операторными коэффициентами. Положим по определению

$$[f^1, \dots, f^{k-p}, \omega^{k-p+1}, \dots, \omega^k] = \sum \text{sign}(j_1, \dots, j_k) f_{j_1}^1 \cdots f_{j_{k-p}}^{k-p} \omega_{j_{k-p+1}}^{k-p+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_k}^k, \quad (3.1)$$

сумма берется по всем перестановкам $\{j_1, \dots, j_k\}$ индексов $1, \dots, k$. Предполагается, что операторы, входящие в ω_j^i , не действуют на коэффициенты последующих сомножителей, например

$$\left(a(x) \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 \right) \wedge \left(b(x) \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 \right) = a(x)b(x) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 \wedge dx_2.$$

Выражение (3.1) можно записать в виде детерминанта

$$\begin{vmatrix} f_1^1 & \cdots & f_1^{k-p} & \omega_1^{k-p+1} & \cdots & \omega_1^k \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_k^1 & \cdots & f_k^{k-p} & \omega_k^{k-p+1} & \cdots & \omega_k^k \end{vmatrix},$$

при раскрытии которого дифференциальные формы перемножаются внешним образом. Из определения следует, что этот детерминант антисимметричен относительно любых двух строк и относительно первых $k - p$ столбцов и симметричен относительно последних p столбцов.

Введем операторы

$$\begin{aligned} & [x^{r_1}, \dots, x^{r_\alpha}, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_\beta}, D^{j_1}, \dots, D^{j_\gamma}] \\ &= \sum_s [x^{r_1}, \dots, x^{r_\alpha}, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_\beta}, dx^{s_1}, \dots, dx^{s_\gamma}] E_{s_1}^{j_1} \circ \dots \circ E_{s_\gamma}^{j_\gamma}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\alpha + \beta + \gamma = k$. Здесь обозначено

$$\begin{aligned} E_s^i &= \sum_{\nu=1}^k x_\nu^i \partial_s^\nu, \quad \text{где } \partial_s^\nu = \frac{\partial}{\partial x_s^\nu}, \quad i, s = 1, \dots, n, \\ D_j^i &= \sum_{s=1}^n E_s^i dx_j^s = \sum_{s=1}^n \sum_{\nu=1}^k x_\nu^i \partial_s^\nu dx_j^s. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Кружочки вместо знаков умножения означают, что операторы не действуют на коэффициенты последующих операторов, т.е.

$$E_{s_1}^{j_1} \circ \dots \circ E_{s_\gamma}^{j_\gamma} = \sum_\nu x_{\nu_1}^{j_1} \dots x_{\nu_\gamma}^{j_\gamma} \partial_{s_1}^{\nu_1} \dots \partial_{s_\gamma}^{\nu_\gamma}.$$

Рассмотрим семейство операторов, представимых как внешние произведения l операторов вида (3.2). Для их описания используем несколько обозначений. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество пар (a, α) , где $a - (l \times n)$ -матрица с элементами 0 и 1 такая, что $\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq k$, $i = 1, \dots, l$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – последовательность целых неотрицательных чисел такая, что $\sum_{j=1}^n \alpha_j = kl - \sum_{i,j} a_{ij}$.

Свяжем с каждой парой $(a, \alpha) \in \mathcal{A}$ множество $U = U(a, \alpha)$ пар $(l \times n)$ -матриц $p = \|p_{ij}\|$ и $q = \|q_{ij}\|$ с целыми неотрицательными элементами, удовлетворяющих следующему условию:

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} + p_{ij} + q_{ij}) = k, \quad i = 1, \dots, l, \quad \sum_{i=1}^l (p_{ij} + q_{ij}) = \alpha_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

В частности, если $\alpha_j = 0$ для какого-либо j , то $p_{ij} = q_{ij} = 0$ для любого $i = 1, \dots, l$.

Отметим, что вместе с каждой парой (p, q) множество $U(a, \alpha)$ содержит также пары $(p - e_{ij}, q + e_{ij})$ при $p_{ij} > 0$ и пары $(p - e_{ij}, q + e_{ij'} + e_{i'j} - e_{i'j'})$ при $p_{ij} > 0$ и $q_{i'j'} > 0$. Здесь через e_{ij} обозначена $(l \times n)$ -матрица с единицей на (i, j) -м месте и нулями на остальных местах.

Определим для любых $(a, \alpha) \in \mathcal{A}$ и $(p, q) \in U(a, \alpha)$ оператор $\sigma(a, \alpha; p, q) \in A_k$ формулой

$$\sigma(a, \alpha; p, q) = \bigwedge_{i=1}^l \sigma_i(a, \alpha; p, q), \quad (3.4)$$

где $\sigma_i(a, \alpha; p, q)$ – оператор (3.2), у которого

- 1) последовательность $r_1, \dots, r_\alpha$ совпадает с возрастающей последовательностью индексов j , для которых $a_{ij} = 1$;
- 2) последовательность $i_1, \dots, i_\beta$ содержит каждый индекс $j = 1, \dots, n$ с кратностью p_{ij} ;
- 3) последовательность $j_1, \dots, j_\gamma$ содержит каждый индекс $j = 1, \dots, n$ с кратностью q_{ij} .

Предполагается, что дифференциальные операторы ∂_ν^s , входящие в выражение для $\sigma(a, \alpha; p, q)$, не действуют на коэффициенты последующих операторов.

Из определения следует, что $\sigma(a, \alpha; p, q) \in \mathcal{D}_s \otimes \Omega_t$, где $s = |q| = \sum_{i,j} q_{ij}$, $t = \sum_{j=1}^n \alpha_j$.

Выражение для $\sigma(a, \alpha; p, q)$ можно представить в другой форме.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\{D^{j_1}, \dots, D^{j_N}\}$ – последовательность всех столбцов D^j , входящих в выражение (3.4) для $\sigma(a, \alpha; p, q)$ ($N = |q| = \sum_{i,j} q_{ij}$), то

$$\sigma(a, \alpha; p, q) = \sum_s E_{s_1}^{j_1} \circ \dots \circ E_{s_N}^{j_N} \tilde{\sigma}(a, \alpha; p, q), \quad (3.5)$$

где $\tilde{\sigma}(a, \alpha; p, q)$ получается из $\sigma(a, \alpha; p, q)$ заменой каждого столбца D^{j_ν} на столбец dx^{s_ν} .

4. Построение операторов $\kappa \in A_k^l$. Обозначим для каждой пары $(a, \alpha) \in \mathcal{A}$ через $\mathcal{H}_{a, \alpha}$ подпространство в A_k , линейно порожденное операторами $\sigma(a, \alpha; p, q)$, $(p, q) \in U(a, \alpha)$, т.е. подпространство операторов вида

$$\kappa = \sum_{(p,q) \in U(a, \alpha)} c(p, q) \sigma(a, \alpha; p, q). \quad (4.1)$$

Назовем *главной частью* оператора (4.1) сумму членов с $p = 0$, т.е. сумму

$$\kappa^0 = \sum_{(0,q) \in U(a, \alpha)} c(0, q) \sigma(a, \alpha; p, q). \quad (4.2)$$

ТЕОРЕМА 1. Для любого оператора κ^0 вида (4.2) существует и притом единственный оператор $\kappa \in \mathcal{H}_{a, \alpha}$ с главной частью κ^0 , принадлежащий A_k^l .

Коэффициенты $c(p, q)$ в выражении (4.1) для этого оператора имеют вид

$$c(p, q) = \frac{c'(p, q)}{p! q!}, \quad (4.3)$$

где $p! = \prod_{i,j} p_{ij}!$, $q! = \prod_{i,j} q_{ij}!$, а $c'(p, q)$ задаются следующими рекуррентными по $|p| = \sum_{i,j} p_{ij}$ соотношениями:

$$c'(p, q) = l c(p - e_{ij}, q + e_{ij}) + \sum_{i', j'} q_{i' j'} c'(p - e_{ij}, q + e_{i' j'} + e_{i' j} - e_{i' j'}) \quad \text{при } p_{ij} > 0; \quad (4.4)$$

от выбора (i, j) правая часть не зависит.

ПРИМЕР. Оператор

$$\kappa = \sum_{(p,q) \in U(a,\alpha)} \frac{1}{(|q| + l - 1)! p! q!} \sigma(a, \alpha; p, q), \quad (4.5)$$

где $|q| = \sum_{i,j} q_{ij}$, принадлежит A_k^l .

В самом деле, для оператора κ имеем

$$c'(p, q) = \frac{1}{(|q| + l - 1)!}$$

при любых $(p, q) \in U(a, \alpha)$ и легко убедиться, что эти коэффициенты удовлетворяют соотношениям (4.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть κ – оператор вида (4.1). Очевидно, что при преобразованиях $x \mapsto gx$, $g \in GL(k)$, операторы (3.2) умножаются на $\det g$. Отсюда следует, что для любой функции $\varphi \in H_k^l$ дифференциальная форма $\kappa\varphi$ на $\mathcal{E}_{k,n}$ инвариантна относительно действия группы $GL_+(k)$. Поэтому условие, что $\kappa \in A_k^l$, эквивалентно условию, что эта форма горизонтальна на расслоении $\mathcal{E}_{k,n} \rightarrow G_{k,n}$. Так как каждый вектор, касательный к слою этого расслоения, есть dgx , $g \in GL(k)$, то это значит, что $\kappa\varphi$ сохраняется при замене dx на $dx + dgx$.

Обозначим через $\hat{\kappa}$ оператор, полученный из κ заменой dx на $dx + dgx$, и через $\hat{\kappa}^0$ линейную относительно dg часть этого оператора. Тогда условие $\kappa \in A_k^l$ эквивалентно условию $\hat{\kappa}^0\varphi = 0$ при $\varphi \in H_k^l$. Найдем коэффициенты $c(p, q)$ в выражении для κ , исходя из этого условия.

ЛЕММА. Если $\varphi \in H_k^l$, то для любых $j_1, \dots, j_N, s_2, \dots, s_N = 1, \dots, n$ и $\nu = 1, \dots, k$ имеем

$$\sum_{s_1=1}^n x_{\nu}^{s_1} E_{s_1}^{j_1} \circ \dots \circ E_{s_N}^{j_N} \varphi = -l x_{\nu}^{i_1} E_{s_2}^{j_2} \circ \dots \circ E_{s_N}^{j_N} \varphi - \sum_{r=2}^N x_{\nu}^{i_r} E_{s_2}^{j_2} \circ \dots \circ E_{s_r}^{j_r} \circ \dots \circ E_{s_N}^{j_N} \varphi. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\varphi \in H_k^l$, то

$$\sum_{s_1=1}^n x_{\nu}^{s_1} \partial_{s_1}^{\nu_1} \varphi = -l \delta_{\nu}^{\nu_1} \varphi.$$

Применив к этому равенству оператор $\partial_{s_2}^{\nu_2} \dots \partial_{s_N}^{\nu_N}$, получим

$$\sum_{s_1=1}^n x_{\nu}^{s_1} \partial_{s_1}^{\nu_1} \dots \partial_{s_N}^{\nu_N} \varphi + \sum_{r=2}^N \delta_{\nu}^{\nu_r} \partial_{s_2}^{\nu_2} \dots \partial_{s_r}^{\nu_r} \dots \partial_{s_N}^{\nu_N} \varphi = -l \delta_{\nu}^{\nu_1} \partial_{s_2}^{\nu_2} \dots \partial_{s_N}^{\nu_N} \varphi.$$

Умножив полученное равенство на $x_{\nu_1}^{j_1} \dots x_{\nu_N}^{j_N}$ и просуммировав по $\nu_1, \dots, \nu_N$, получаем (4.6).

В дальнейшем для краткости будем вместо $\sigma(a, \alpha; p, q)$ писать $\sigma(p, q)$. Обозначим через $\hat{\sigma}(p, q)$ оператор, полученный из $\sigma(p, q)$ заменой dx на $dx + dgx$, и через $\hat{\sigma}^0(p, q)$ линейную относительно dg часть оператора $\hat{\sigma}(p, q)$. Из предложения 1 и леммы следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Ограничение оператора $\hat{\sigma}^0(p, q)$ на подпространство функций $\varphi \in H_k^l$ имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^0(p, q) = & \sum_{i,j} p_{ij} \sigma^{ij}(p, q) - \sum_{i,j} q_{ij} (q_{ij} + l - 1) \sigma^{ij}(p + e_{ij}, q - e_{ij}) \\ & - \sum_{(i,j) \neq (i',j')} q_{ij'} q_{i'j} \sigma^{ij}(p + e_{ij}, q - e_{ij'} - e_{i'j} + e_{i'j'}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $\sigma^{ij}(p, q)$ получается из $\sigma(p, q) = \bigwedge_{i=1}^l \sigma_i(p, q)$ заменой в $\sigma_i(p, q)$ одного столбца dx^j на столбец $dg x^j$.

СЛЕДСТВИЕ. Ограничение оператора $\hat{\kappa}^0$ на подпространство функций $\varphi \in H_k^l$ имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}^0 = & \sum_{i,j} \left(\sum_{(p,q) \in U(a,\alpha)} p_{ij} c(p, q) \sigma^{ij}(p, q) \right. \\ & - \sum_{(p,q) \in U(a,\alpha)} q_{ij} (q_{ij} + l - 1) c(p, q) \sigma^{ij}(p + e_{ij}, q - e_{ij}) \\ & \left. - \sum_{(p,q) \in U(a,\alpha)} \sum_{(i',j') \neq (i,j)} q_{ij'} q_{i'j} c(p, q) \sigma^{ij}(p + e_{ij}, q - e_{ij'} - e_{i'j} + e_{i'j'}) \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Операторы $\sigma^{ij}(p, q)$ не определены при $p_{ij} = 0$. Однако выражения (4.7) и (4.8) корректны, поскольку $\sigma^{ij}(p, q)$ с $p_{ij} = 0$ входят в эти выражения с коэффициентом 0. Аналогичное замечание относится и к последующим равенствам.

Положим

$$c(p, q) = \frac{c'(p, q)}{p! q!}. \quad (4.9)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Условие, что форма $\kappa\varphi$, где $\varphi \in H_k^l$, опускается на грассманиан $G_{k,n}$, эквивалентно следующим соотношениям между коэффициентами оператора κ :

$$\begin{aligned} c'(p, q) = & l c'(p - e_{ij}, q + e_{ij}) + \sum_{i',j'} q_{i'j'} c'(p - e_{ij}, q + e_{ij'} + e_{i'j} - e_{i'j'}) \\ & \text{при } p_{ij} > 0, i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие, что $\kappa\varphi$ опускается на грассманиан $G_{k,n}$, эквивалентно соотношению $\hat{\kappa}^0 = 0$. Значит, в силу (4.8)

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q) \in U(a,\alpha)} p_{ij} c(p, q) \sigma^{ij}(p, q) = & \sum_{(p,q) \in U(a,\alpha)} q_{ij} (q_{ij} + l - 1) c(p, q) \sigma^{ij}(p + e_{ij}, q - e_{ij}) \\ & + \sum_{(p,q) \in U(a,\alpha)} \sum_{(i',j') \neq (i,j)} q_{ij'} q_{i'j} c(p, q) \sigma^{ij}(p + e_{ij}, q - e_{ij'} - e_{i'j} + e_{i'j'}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

при любых i, j , для которых $p_{ij} > 0$.

Преобразуем (4.11) к виду

$$\begin{aligned}
 & \sum_{(p,q) \in U(a,\alpha)} p_{ij} c(p,q) \sigma^{ij}(p,q) \\
 &= \sum_{(p,q) \in U(a,\alpha)} q_{ij} \left(q_{ij} + \sum_{s \neq i} q_{is} + \sum_{s \neq j} q_{sj} + l - 1 \right) c(p,q) \sigma^{ij}(p + e_{ij}, q - e_{ij}) \\
 &+ \sum_{(p,q) \in U(a,\alpha)} \sum_{i' \neq i} \sum_{j' \neq j} q_{ij'} q_{i'j} c(p,q) \sigma^{ij}(p + e_{ij}, q - e_{ij'} - e_{i'j} + e_{i'j'}). \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

Полученное равенство эквивалентно следующим соотношениям для коэффициентов $c(p,q)$:

$$\begin{aligned}
 p_{ij} c(p,q) &= (q_{ij} + 1) \left(q_{ij} + \sum_{s \neq i} q_{is} + \sum_{s \neq j} q_{sj} + l \right) c(p - e_{ij}, q + e_{ij}) \\
 &+ \sum_{i' \neq i} \sum_{j' \neq j} (q_{ij'} + 1) (q_{i'j} + 1) c(p - e_{ij}, q + e_{ij'} + e_{i'j} - e_{i'j'}) \quad \text{при } p_{ij} > 0.
 \end{aligned}$$

Перейдя от $c(p,q)$ к коэффициентам $c'(p,q)$, заданным равенством (4.9), получаем

$$\begin{aligned}
 c'(p,q) &= \left(q_{ij} + \sum_{s \neq i} q_{is} + \sum_{s \neq j} q_{sj} + l \right) c'(p - e_{ij}, q + e_{ij}) \\
 &+ \sum_{i' \neq i} \sum_{j' \neq j} q_{ij'} c'(p - e_{ij}, q + e_{ij'} + e_{i'j} - e_{i'j'}).
 \end{aligned}$$

Полученные соотношения эквивалентны соотношениям (4.10).

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Соотношения (4.10) выражают $c'(p,q)$ при любом $|p| = s > 0$ через $c'(p,q)$ при $|p| = s - 1$. Таким образом, при заданных $c'(0,q)$, $(0,q) \in U(a,\alpha)$, имеется не более одного решения системы (4.10). Чтобы доказать существование решения, достаточно убедиться, что равенства (4.10) корректно определяют $c'(p,q)$, т.е. правые части этих равенств не зависят от выбора пары (i,j) , для которой $p_{ij} > 0$.

Проведем доказательство индукцией по $s = |p|$. При $s = 1$, т.е. когда $p = e_{kl}$ для некоторого (k,l) , утверждение очевидно. В самом деле, в этом случае имеется единственное соотношение вида (4.10), выражающее $c'(p,q)$ через коэффициенты $c'(0,q')$. Пусть теперь $|p| > 1$, и пусть $p_{ij} > 0$ и $p_{kl} > 0$, $(i,j) \neq (k,l)$. Тогда в соответствии с (4.10) $c'(p,q)$ можно определить двумя различными равенствами: равенством (4.10) и равенством

$$c''(p,q) = l c'(p - e_{kl}, q + e_{kl}) + \sum_{k',l'} q_{k'l'} c'(p - e_{kl}, q + e_{k'l'} + e_{k'l} - e_{k'l'}). \quad (4.13)$$

Нужно убедиться, что $c''(p,q) = c'(p,q)$.

В силу индуктивного предположения $c'(p', q')$ при $|p'| = |p| - 1$ однозначно выражается по формулам (4.10) через $c'(p', q')$ при $|p'| = |p| - 2$. Согласно этим формулам имеем

$$\begin{aligned} c'(p - e_{ij}, q + e_{ij}) &= l c'(p - e_{ij} - e_{kl}, q + e_{ij} + e_{kl}) \\ &\quad + \sum_{k'l'} (q_{k'l'} + \delta_{k'l', ij}) c'(p - e_{ij} - e_{kl}, q + e_{ij} + e_{kl'} + e_{k'l} - e_{k'l'}), \\ c'(p - e_{ij}, q + e_{ij'} + e_{i'j} - e_{i'j'}) &= l c'(p - e_{ij} - e_{kl}, q + e_{ij'} + e_{i'j} - e_{i'j'} + e_{kl}) \\ &\quad + \sum_{k'l'} (q_{k'l'} + \delta_{k'l', ij'} + \delta_{k'l', i'j} - \delta_{k'l', i'j'}) \\ &\quad \times c'(p - e_{ij} - e_{kl}, q + e_{ij'} + e_{i'j} - e_{i'j'} + e_{kl'} + e_{k'l} - e_{k'l'}). \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (4.10), получим после элементарных упрощений

$$\begin{aligned} c'(p, q) &= l^2 c'(p - e_{ij} - e_{kl}, q + e_{ij} + e_{kl}) + l c'(p - e_{ij} - e_{kl}, q + e_{il} + e_{kj}) \\ &\quad + \sum_{i', j'} q_{i'j'} (l c'(p - e_{ij} - e_{kl}, q + e_{ij'} + e_{i'j} - e_{i'j'} + e_{kl}) \\ &\quad + l c'(p - e_{ij} - e_{kl}, q + e_{ij} + e_{il} + e_{kj'} - e_{i'j'}) \\ &\quad + c'(p - e_{ij} - e_{kl}, q + e_{ij'} - e_{i'j'} + e_{i'l} + e_{kj}) \\ &\quad + c'(p - e_{ij} - e_{kl}, q + e_{i'j} - e_{i'j'} + e_{il} + e_{kj'}) \\ &\quad - c'(p - e_{ij} - e_{kl}, q + e_{ij'} + e_{i'j} - 2e_{i'j'} + e_{i'l} + e_{kj'})) \\ &\quad + \sum_{i', j', k', l'} q_{i'j'} q_{k'l'} c'(p - e_{ij} - e_{kl}, q + e_{ij'} + e_{i'j} - e_{i'j'} + e_{kl'} + e_{k'l} - e_{k'l'}). \end{aligned}$$

Правая часть полученного равенства симметрична относительно перестановки пар (ij) и (kl) . Значит, то же выражение получается и для $c''(p, q)$, а потому $c''(p, q) = c'(p, q)$.

5. Построение относительно замкнутых операторов. Пусть $\kappa^0 \in A_k$ – произвольный оператор вида

$$\kappa^0 = \bigwedge_{i=1}^l [x^1, \dots, x^r, D^{\mu_{i,1}}, \dots, D^{\mu_{i,k-r}}], \quad \text{где } j_{is} \leq r. \quad (5.1)$$

В обозначениях п. 3 $\kappa^0 = \sigma(a, \alpha; 0, q^0)$, где $a = \|a_{is}\|$ и $q^0 = \|q_{is}^0\|$ – $(l \times n)$ -матрицы с элементами $a_{is} = 1$ при $s \leq r$, $a_{is} = 0$ при $s > r$; q_{is}^0 – число индексов μ_{it} , равных s ; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)$, где $\alpha_s = \sum_i q_{is}^0$.

По теореме 1 в $\mathcal{H}_{a, \alpha}$ существует и притом единственный оператор $\kappa \in A_k^l$ с главной частью κ^0 , а именно

$$\kappa = \kappa^0 + \sum_{\substack{(p, q) \in U(a, \alpha) \\ p \neq 0}} c(p, q) \sigma(a, \alpha; p, q), \quad (5.2)$$

где коэффициенты $c(p, q)$ задаются формулами (4.3), (4.4).

ТЕОРЕМА 2. Оператор κ является относительно замкнутым типа r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства найдем ограничение дифференциальной формы $\kappa\varphi$, где $\varphi \in H_k^l$, на подмногообразии $G_{k,n}^h \subset G_{k,n}$ k -подпространств, содержащих произвольное фиксированное r -мерное подпространство h .

Фиксируем в h произвольный базис $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^r)$, $i = 1, \dots, r$. Не нарушая общности, можно предполагать, что $\Delta_r(x) \equiv \det \|x_j^i\|_{i,j=1,\dots,r} \neq 0$.

Обозначим через $\tilde{\mathcal{E}}_{k,n}^x$ подмногообразие матриц $x' \in \mathcal{E}_{k,n}$, у которых первые r строк совпадают с векторами x_i фиксированного базиса в h и, кроме того, $x_j^i = 0$ при $i = 1, \dots, r$ и $j = r+1, \dots, k$. Образ $\tilde{\mathcal{E}}_{k,n}^x$ при отображении $\mathcal{E}_{k,n} \rightarrow G_{k,n}$ есть все подмногообразие $G_{k,n}^h$, а потому вместо формы $\kappa_r\varphi$ на $G_{k,n}^h$ можно рассматривать ее поднятие на многообразие $\tilde{\mathcal{E}}_{k,n}^x \subset \mathcal{E}_{k,n}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любой функции $\varphi \in H_k^l$ имеем

$$\kappa\varphi = \kappa^0\varphi \quad \text{на } \tilde{\mathcal{E}}_{k,n}^x.$$

В самом деле, так как $dx^i = 0$ на $\tilde{\mathcal{E}}_{k,n}^x$ при $i \leq r$, то все слагаемые суммы (5.2), кроме κ^0 , равны нулю на $\tilde{\mathcal{E}}_{k,n}^x$.

Заметим, что

$$[x^1, \dots, x^r, D^{\mu_{i,1}}, \dots, D^{\mu_{i,k-r}}] = \Delta_r(x) \sum (D_{r+1}^{\mu'_{i,1}} \wedge \dots \wedge D_k^{\mu'_{i,k-r}}),$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\mu'_{i,r+1}, \dots, \mu'_{i,k-r}$ индексов $\mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,k-r}$. Отсюда следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. На $\tilde{\mathcal{E}}_{k,n}^x$ имеем

$$\kappa^0\varphi = \pm (\Delta_r(x))^l \sum_{\mu'} \left(\bigwedge_{j=1}^{k-r} \bigwedge_{i=1}^l D_{r+j}^{\mu'_{ij}} \right) \varphi, \quad (5.3)$$

где суммирование ведется по множеству $l \times (k-r)$ -матриц $\mu' = \|\mu'_{ij}\|$, получающихся из $\mu = \|\mu_{ij}\|$ всевозможными перестановками элементов в каждой из строк.

Перейдем к доказательству теоремы. Очевидно, что на $\tilde{\mathcal{E}}_{k,n}^x$ оператор d внешнего дифференцирования имеет вид $d = d_{r+1}^{r+1} + \dots + d_k^k$. Так как каждый оператор $\bigwedge_{i=1}^l D_{r+j}^{\mu'_{ij}}$ представим на $\tilde{\mathcal{E}}_{k,n}^x$ как линейная комбинация операторов вида $\bigwedge_{i=1}^l d_{r+j}^{s_i}$ с коэффициентами, зависящими только от x , то в силу (1.6)

$$d_{r+j}^{r+j} \left(\bigwedge_{i=1}^l D_{r+j}^{\mu'_{ij}} \right) \varphi = 0$$

для любой функции φ из образа $\mathcal{J}_{kl}$. Значит, в силу предложений 4 и 5 $d(\kappa\varphi) = d(\kappa^0\varphi) = 0$ на $\tilde{\mathcal{E}}_{k,n}^x$.

6. Формулы обращения. Обозначим через C_q пространство относительно замкнутых операторов типа l и ранга $q < (k-l)(n-k)$. Если $\kappa \in C_q$, то для любого $h \in G_{l,n}$ и любого q -мерного цикла $\gamma^h \subset G_{l,n}^h$ имеем

$$\int_{\gamma^h} \kappa(\mathcal{J}_{kl}f) = c(\gamma^h) (Lf)(x), \quad (6.1)$$

где $c(\gamma^h)$ зависит только от класса гомологий γ^h , $L \in \mathcal{D}$, а $x \in \mathcal{E}_{l,n}$ – любой элемент из прообраза h . В нетривиальном случае, т.е. когда $c(\gamma^h) \neq 0$, равенство (6.1) задает гомоморфизм

$$\pi: C_q \rightarrow \mathcal{D},$$

перестановочный с представлениями группы $GL(n)$, действующими в пространствах C_q и $\mathcal{D}$. Его ядром является по определению подпространство $Z_q \subset C_q$ тривиальных операторов.

Так как правая часть в (6.1) зависит только от образа $h \in G_{l,n}$ точки x , то при преобразованиях $x \mapsto gx$, $g \in GL(l)$, операторы L из образа C_q умножаются на $(\det g)^k$.

Опишем подпространство C_q^0 операторов $\kappa \in C_q$, для которых L – оператор нулевой степени, т.е. равенство (6.1) имеет вид

$$\int_{\gamma^h} \kappa(\mathcal{J}_{kl}f) = c(\gamma^h) P(x) f(x), \quad (6.2)$$

где $P(x)$ – полином от элементов матрицы $x \in \mathcal{E}_{l,n}$, удовлетворяющий условию

$$P(gx) = (\det g)^k P(x) \quad \text{для любого } g \in GL(k). \quad (6.3)$$

Обозначим через $\mathcal{H}_l^k$ пространство всех полиномов $P(x)$, удовлетворяющих условию (6.3), т.е. пространство однородных полиномов степени k от миноров порядка l матриц $x \in \mathcal{E}_{l,n}$.

ТЕОРЕМА 3. Если $k+l < n$ и $k-l$ четно, то при $q = l(k-l)$ отображение $\kappa \mapsto P(x)$, определенное равенством (6.2), является изоморфизмом пространств:

$$C_q^0/Z_q^0 \simeq \mathcal{H}_l^k,$$

где Z_q^0 – подпространство тривиальных операторов. При этом отображении прообразом полинома $(\Delta_l(x))^k$, где $\Delta_l(x) = \det \|x_j^i\|_{i,j=1,\dots,l}$, является с точностью до множителя оператор $\kappa \in A_k^l$ с главной частью

$$\kappa^0 = \bigwedge_{i=1}^l [x^1, \dots, x^l, \underbrace{D^i, \dots, D^i}_{k-l}]. \quad (6.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что пространство $\mathcal{H}_l^k$ неприводимо относительно действия группы $GL(n)$. Поэтому так как отображение $C_q^0 \rightarrow \mathcal{H}_l^k$ перестановочно с представлениями группы $GL(n)$ в пространствах C_q^0 и $\mathcal{H}_l^k$, то образ C_q^0 есть либо 0 и тогда $C_q^0 = Z_q^0$, либо все пространство $\mathcal{H}_l^k$ и тогда $C_q^0/Z_q^0 \simeq \mathcal{H}_l^k$.

Итак, для доказательства теоремы достаточно убедиться, что если κ – оператор с главной частью (6.4) и $\varphi = \mathcal{J}_{kl}f$, то

$$\int_{\gamma^h} \kappa \varphi = c(\gamma^h) (\Delta_l(x))^k f(x), \quad (6.5)$$

где $c(\gamma^h) \neq 0$.

Из (6.4) и (5.2) следует, что на $\tilde{\mathcal{E}}_{k,n}^x$ имеем

$$\kappa \varphi = \kappa^0 \varphi = [(k-l)!]^l (\Delta_l(x))^l \bigwedge_{j=1}^{k-l} \bigwedge_{i=1}^l D_{l+j}^i = [(k-l)!]^l (\Delta_l(x))^k \bigwedge_{i=1}^l d_{l+j}^i.$$

Значит,

$$\kappa^0 \varphi = c(\Delta_l(x))^k \kappa_l \quad \text{на } \tilde{\mathcal{E}}_{k,n}^x,$$

где κ_l – оператор, заданный равенством (1.7). Соотношение (6.5) следует непосредственно из формулы обращения (1.8), связанной с оператором κ_l .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Интегральная геометрия в аффинном и проективном пространствах // Итоги науки и техники. Современ. пробл. матем. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1980. С. 53–226.
- [2] Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет, 2000.
- [3] Гельфанд И. М., Граев М. И. Описание всех формул обращения в задаче интегральной геометрии, связанной с грассманианом $G_{k,n}$ // Препринт ин-та прикл. математики АН СССР. № 102, 1986. С. 1–27.
- [4] Graev M. Intermediate inversion formulas in integral geometry // Preprint ESI. № 630, 1998. P. 1–14.
- [5] Граев М. И. Задача интегральной геометрии, связанная с тройкой грассмановых многообразий // Функцион. анализ и его прилож. 2000. Т. 34. № 4.
- [6] Гельфанд И. М., Граев М. И., Шапиро З. Я. Задача интегральной геометрии, связанная с парой грассмановых многообразий // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193. № 2. С. 259–262.
- [7] Гельфанд И. М., Граев М. И., Шапиро З. Я. Интегральная геометрия в проективном пространстве // Функцион. анализ и его прилож. 1970. Т. 4. № 1. С. 14–32.

Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, г. Москва
E-mail: mgraev@niisi.msk.ru

Поступило
31.08.2000