Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Зайцев, О равномерной приближаемости функций полиномами специальных классов на компактах в $\mathbb{R}^2$, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 1, 75–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm329>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 18:22:37

УДК 517.5

О РАВНОМЕРНОЙ ПРИБЛИЖАЕМОСТИ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ НА КОМПАКТАХ В $\mathbb{R}^2$

А. Б. Зайцев

В работе получен ряд достаточных условий равномерной приближаемости функций полиномиальными решениями однородных эллиптических уравнений второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами на компактах Каратеодори в $\mathbb{R}^2$.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $C(X)$ пространство комплекснозначных непрерывных на X функций с равномерной нормой. Если E – произвольный однородный эллиптический оператор с постоянными комплексными коэффициентами в $\mathbb{R}^2$, то через $P_E(X)$ будем обозначать замыкание по норме пространства $C(X)$ сужения на X множества всех полиномиальных решений уравнения $Eu = 0$, а через $A_E(X)$ – подпространство пространства $C(X)$, состоящее из функций, удовлетворяющих уравнению $Eu = 0$ на множестве X° внутренних точек X . Мы будем опускать индекс E у пространств $P_E(X)$ и $A_E(X)$, если $E = \bar{\partial}$ – оператор Коши–Римана.

Так как функция, являющаяся равномерным на X пределом последовательности (полиномиальных) решений уравнения $Eu = 0$, удовлетворяет данному уравнению на множестве X° [1, т. 1, с. 138], то $P_E(X) \subseteq A_E(X)$. В настоящей работе мы исследуем условия на E и X , необходимые и достаточные для совпадения пространств $P_E(X)$ и $A_E(X)$ для операторов E вида

$$L = c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2c_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (1)$$

с постоянными комплексными коэффициентами.

Пусть λ_1 и λ_2 – корни соответствующего характеристического уравнения

$$c_{11}\lambda^2 + 2c_{12}\lambda + c_{22} = 0. \quad (2)$$

Оператор (1) является эллиптическим тогда и только тогда, когда λ_1 и λ_2 невещественны. Если, кроме того, λ_1 и λ_2 имеют мнимые части разных знаков, то оператор (1) называется *сильно эллиптическим*.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 00-01-00618 и № 00-15-96008.

Обозначим через ∂X границу компакта X , а через $\hat{X}$ – объединение компакта X и всех ограниченных связных компонент множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$. По теореме Уолша–Лебега (см. [2, § 1], [3, гл. II, теорема 3.3]) $P_\Delta(X) = A_\Delta(X)$ тогда и только тогда, когда $\partial X = \partial \hat{X}$ (компакты X с последним условием называются *компактами Каратеодори*; Δ – оператор Лапласа). Случай $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ легко сводится к гармоническому случаю заменой переменных. Из результатов О’Фаррелла [4, теорема 1] следует, что $P_L(X) = C(X)$ для любого сильно эллиптического оператора L и компакта Каратеодори X , не имеющего внутренних точек. С другой стороны, при $\lambda_1 = \lambda_2$ установлено отсутствие топологических критериев совпадения пространств $P_L(X)$ и $A_L(X)$ (см. [5]).

В [6, теорема 1.1] доказано, что если $X = \hat{X}$, то $P_L(X) = A_L(X)$ для любого эллиптического оператора L вида (1). Там же сформулирована следующая гипотеза (гипотеза 4.2 (2)): если L – сильно эллиптический оператор, то $P_L(X) = A_L(X)$ тогда и только тогда, когда $\partial X = \partial \hat{X}$ (т.е. верен аналог теоремы Уолша–Лебега), причем (без доказательства) констатировалось, что для операторов, не являющихся сильно эллиптическими, аналогичная гипотеза не верна.

Основным результатом данной статьи является следующее утверждение (теорема 2): если X – компакт Каратеодори в $\mathbb{R}^2$, Y_j ($j = 1, \dots$) – ограниченные связные компоненты множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$, причем для каждой Y_j имеет место $P_L(\partial Y_j) = C(\partial Y_j)$, то $P_L(X) = A_L(X)$. При доказательстве данной теоремы мы используем результат [6, теорема 1.1], а также ряд теорем о представляющих мерах гомоморфизмов алгебры $R(X)$ (см. [3, главы II и VI]). Из теоремы 2 и теоремы О’Фаррелла следует, что $P_L(X) = A_L(X)$ для любого сильно эллиптического оператора L и компакта Каратеодори X . Таким образом, гипотеза 4.2 (2) работы [6] подтверждена в части достаточных условий приближаемости. Необходимость подтвердить (или опровергнуть) пока не удастся. Основная трудность (при $\lambda_1 \neq \overline{\lambda_2}$) связана с отсутствием принципов максимума и подходящих результатов о разрешимости и устойчивости в задаче Дирихле для уравнения $Lu = 0$ в односвязных плоских областях (имеется в виду классическая постановка задачи с непрерывными граничными данными). Здесь наиболее сильным на данный момент является следующий результат [7, теорема 7.4]: если D – жорданова область с кусочно-гладкой границей в $\mathbb{R}^2$, L – сильно эллиптический оператор, то задача Дирихле для уравнения $Lu = 0$ разрешима единственным образом в области D .

В теореме 1 из п. 3 доказывается некоторое техническое утверждение, из которого вытекает упомянутая выше теорема О’Фаррелла (см. следствие 1). Здесь мы используем конструкцию, подробно описанную в работах Э. Бишопы [8] и [9]. Из теоремы 1 также следуют некоторые результаты, касающиеся эллиптических операторов, не являющихся сильно эллиптическими. В частности, установлено, что для таких операторов критерии полиномиальной аппроксимации не могут носить топологического характера.

2. Предварительные результаты. Пусть L – эллиптический оператор вида (1). Существует невырожденное линейное преобразование плоскости, которое приводит оператор L к виду

$$\tilde{L} = \bar{\partial} \partial_2, \quad (3)$$

где

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \partial_2 = \frac{1}{1 - \beta} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \beta i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus (-1; 1],$$

т.е. характеристические корни оператора $\tilde{L}$ равны $-i$ и $-\beta i$. При этом оператор (1) приводится к виду (3) с $\beta \leq -1$ тогда и только тогда, когда он сильно эллиптический.

Пусть $\beta \in \mathbb{R} \setminus (-1; 1]$. Введем новые переменные:

$$z = x_1 + ix_2, \quad z_2 = \frac{2\beta}{\beta - 1} \left(x_1 + \frac{i}{\beta} x_2 \right).$$

Данные переменные обладают следующими свойствами:

$$\bar{\partial}z = 0, \quad \partial_2 z_2 = 0, \quad \partial_2 z = 1, \quad \bar{\partial}z_2 = 1.$$

Нам также потребуется $\mathbb{R}$ -линейное преобразование $T_2: z \rightarrow z_2$ плоскости $\mathbb{C}$. Это отображение меняет ориентацию жордановых кривых в $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда L – сильно эллиптический оператор.

Если функция f удовлетворяет уравнению $\tilde{L}f = 0$ в некоторой окрестности точки $c \in \mathbb{C}$, то вблизи c верно следующее разложение [6, предложение 2.1]:

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\partial_2^l f(c)}{l!} (z - c)^l + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{\partial}^m f(c)}{m!} (z_2 - T_2 c)^m. \quad (4)$$

В частности, если P – полином такой, что $\tilde{L}P = 0$, то из (4) следует, что $P = P_1(z) + P_2(z_2)$, где $P_1(z)$ – полином от переменной z , $P_2(z_2)$ – полином от переменной z_2 .

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область Каратеодори (или сбалансированная область; см. определение 1 работы [9]), B – единичный круг, Σ – единичная окружность. Пусть $\omega(w)$ – конформное отображение B на D . Данное отображение имеет угловые пределы почти всюду на Σ относительно линейной меры [10, с. 381]. В дальнейшем, если ω имеет угловой предел в точке $w_0 \in \Sigma$, то через $\omega(w_0)$ мы будем обозначать этот предел. Пусть $\chi(z)$ – конформное отображение D на B . Данная функция имеет в каждой достижимой граничной точке области D пределы, и при том совпадающие, по всем путям, лежащим в D и оканчивающимся в этой точке [10, гл. II, § 3, теорема 1], [11, с. 102]. В дальнейшем, если z_0 – достижимая граничная точка D , то через $\chi(z_0)$ мы будем обозначать данный предел. Функция $\chi(z)$ не может иметь одинаковых пределов в двух различных достижимых граничных точках области D [10, гл. II, § 3, теорема 1]. Таким образом, между множеством точек на Σ , в которых существуют угловые пределы функции $\omega(w)$, и множеством достижимых граничных точек области D возникает взаимно однозначное соответствие.

3. Основные результаты и их доказательства. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – компакт Каратеодори без внутренних точек, ψ – гомеоморфизм плоскости $\mathbb{C}$ на себя, $\mathbf{P}$ – совокупность комбинаций $\{P_1(z) + P_2(\psi(z)), P_1$ и P_2 – полиномы комплексного переменного $\}$. При каких условиях $\mathbf{P}$ плотна в $C(\Gamma)$?

В первой части этого пункта мы установим два технических утверждения (теорему 1 и предложение 1), отвечающих на этот вопрос, из которых, в частности, вытекает упомянутая выше теорема О’Фаррелла (см. следствие 1).

Пусть $\mathbf{P}$ не является плотной в пространстве $C(\Gamma)$. Так как по теореме Рисса–Маркова [12, теорема IV.17] каждый линейный функционал φ на пространстве $C(X)$ представляется в виде

$$\varphi(f) = \int_X f d\mu_\varphi,$$

где $f \in C(X)$, а μ_φ – конечная борелевская комплекснозначная мера с носителем на X , то существует ненулевая борелевская комплекснозначная мера μ на Γ , удовлетворяющая условиям

$$\int_{\Gamma} z^n d\mu = 0, \quad (5)$$

$$\int_{\Gamma} (\psi(z))^n d\mu = 0, \quad (6)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$.

Обратно, если существует ненулевая мера μ на Γ , удовлетворяющая условиям (5) и (6), то $\mathbf{P}$ не является плотной в пространстве $C(\Gamma)$.

В дальнейшем через $\text{supp}(\mu)$ обозначается (наименьший замкнутый) носитель меры μ .

Пусть $\widehat{\Gamma} \setminus \Gamma = \bigcup_{j=1}^J Y_j$, где Y_j – ограниченные связные компоненты множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, J – некоторое натуральное число или ∞ . Так как Γ – компакт Каратеодори, то все области Y_j являются областями Каратеодори. Пусть борелевская комплекснозначная мера μ с носителем на Γ удовлетворяет условиям (5) и (6). Тогда

$$\int_{\Gamma} \frac{d\mu(z)}{z-t} = 0, \quad (7)$$

$$\int_{\Gamma} \frac{d\mu(z)}{\psi(z) - \psi(t)} = 0 \quad (8)$$

при $t \in \mathbb{C} \setminus \widehat{\Gamma}$.

Пусть $t \in \widehat{\Gamma} \setminus \Gamma$,

$$f_1(t) = \int_{\Gamma} \frac{d\mu(z)}{z-t}.$$

Из условия (7) следует, что $f_1(t) dt$ является дифференциалом класса $H(Y_j)$ [9, теорема 2] при всех j , так что существуют борелевские комплекснозначные меры ν_j такие, что $\text{supp}(\nu_j) \subseteq \partial Y_j$ и ν_j является граничной мерой для $f_1(t) dt$ относительно Y_j . При этом

$$\int_{\partial Y_j} \frac{d\nu_j(z)}{z-t} = 0 \quad \text{при } t \in \mathbb{C} \setminus \overline{Y_j}, \quad f_1(t) = \int_{\partial Y_j} \frac{d\nu_j(z)}{z-t} \quad \text{при } t \in Y_j$$

(см. [9, теорема 1]).

Кроме того, при $k \neq l$ меры ν_k и ν_l сингулярны друг относительно друга [9, лемма 10]. Отсюда следует, что для любого натурального $N \leq J$ имеем

$$\sum_{j=1}^N \|\nu_j\| = \left\| \sum_{j=1}^N \nu_j \right\| \leq \|\mu\|$$

[9, лемма 8], так что ряд $\sum_{j=1}^J \nu_j$ сходится по норме пространства мер. При этом преобразование Коши меры $\sum_{j=1}^J \nu_j$ равно $f_1(t)$ при $t \in \widehat{\Gamma} \setminus \Gamma$ и нулю вне $\widehat{\Gamma}$. Таким образом, преобразование Коши меры $\mu - \sum_{j=1}^J \nu_j$ обращается в нуль всюду вне Γ . Значит, $\mu = \sum_{j=1}^J \nu_j$ [3, гл. VIII, следствие 8.4].

Пусть $\Gamma_2 = \psi(\Gamma)$. Докажем, что Γ_2 – компакт Каратеодори. Так как ψ – гомеоморфизм, то данное отображение переводит связные множества в связные. Поэтому $\psi(\mathbb{C} \setminus \widehat{\Gamma}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \widehat{\Gamma}_2$. Аналогично доказывается, что $\psi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \widehat{\Gamma}_2) \subseteq \mathbb{C} \setminus \widehat{\Gamma}$. Таким образом, $\psi(\mathbb{C} \setminus \widehat{\Gamma}) = \mathbb{C} \setminus \widehat{\Gamma}_2$. Отсюда следует, что каждая точка Γ_2 является граничной для множества $\mathbb{C} \setminus \widehat{\Gamma}_2$. Поэтому Γ_2 – компакт Каратеодори. Аналогично доказывается, что ограниченные связные компоненты множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma_2$ есть множества $\psi(Y_j)$ и только они и что $\partial(\psi(Y_j)) = \psi(\partial Y_j)$.

Определим на Γ_2 меру μ_2 по формуле $\mu_2(S) = \mu(\psi^{-1}(S))$. Из (8) следует, что мера μ_2 удовлетворяет условию

$$\int_{\Gamma_2} \frac{d\mu_2(\zeta)}{\zeta - t} = 0 \quad (8')$$

при $t \in \mathbb{C} \setminus \widehat{\Gamma}_2$. Из (8') следует, что существуют меры $\nu_{2,j}$ с носителями на $\psi(\partial Y_j)$, $j = 1, 2, \dots$, попарно сингулярные друг относительно друга, такие, что

$$\int_{\psi(\partial Y_j)} \frac{d\nu_{2,j}(\zeta)}{\zeta - t} = 0 \quad \text{при } t \in \mathbb{C} \setminus \psi(\overline{Y}_j), \quad \mu_2 = \sum_{j=1}^J \nu_{2,j}.$$

Определим на ∂Y_j меру σ_j по формуле $\sigma_j(S) = \nu_{2,j}(\psi(S))$. Таким образом,

$$\int_{\partial Y_j} \frac{d\sigma_j(z)}{\psi(z) - \psi(t)} = 0 \quad \text{при } t \in \mathbb{C} \setminus \overline{Y}_j,$$

меры σ_j , $j = 1, 2, \dots$, попарно сингулярны друг относительно друга и $\mu = \sum_{j=1}^J \sigma_j$. Меры ν_j и σ_j сосредоточены на множестве достижимых граничных точек области Y_j , причем меры ν_j и σ_j любой точки равны нулю [9, лемма 9]. Так как любые две области Y_k и Y_l , $k \neq l$, имеют не более одной общей достижимой граничной точки (см. доказательство леммы 10 работы [9]), то для любого подмножества S множества достижимых граничных точек Y_j имеем $\nu_j(S) = \mu(S)$ и $\sigma_j(S) = \mu(S)$. Следовательно, $\sigma_j = \nu_j$ при всех j . Поэтому

$$\int_{\partial Y_j} \frac{d\nu_j(z)}{\psi(z) - \psi(t)} = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\partial Y_j} \frac{d\nu_j(z)}{z - t} = 0 \quad \text{при } t \in \mathbb{C} \setminus \overline{Y}_j.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из разложения $\mu = \sum_{j=1}^J \nu_j$ (а значит, и из условия (7)) следует, что мера μ любой точки равна нулю.

Следовательно, если при всех j каждая функция класса $C(\partial Y_j)$ может быть равномерно на ∂Y_j приближена функциями вида $P_1(z) + P_2(\psi(z))$, где P_1 и P_2 – полиномы комплексного переменного, то $\nu_j = 0$ при всех j . Поэтому $\mu = 0$; следовательно, каждая функция класса $C(\Gamma)$ может быть равномерно на Γ приближена функциями вида $P_1(z) + P_2(\psi(z))$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что Γ – граница некоторой области Каратеодори, которую мы обозначим через D , а мера μ удовлетворяет условиям (7) и (8) при $t \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$.

Пусть $\omega(w)$ – конформное отображение единичного круга B на область D , имеющее радиальный предел в точке 1, $\chi(z)$ – обратное по отношению к $\omega(w)$ конформное отображение. Обозначим через M множество достижимых граничных точек области D , через $R \subseteq \Sigma$ – множество точек, в которых существуют угловые пределы функции ω . Между

точками множества M и точками множества R существует взаимно однозначное соответствие, причем $\chi(M) = R$, $\omega(R) = M$. Так как мера μ удовлетворяет условию (7) при $t \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$, то $|\mu|(\Gamma \setminus M) = 0$. Пусть $t \in D$,

$$f_1(t) = \int_{\Gamma} \frac{d\mu(z)}{z - t}.$$

Так как дифференциал $f_1(t) dt \in H(D)$, то дифференциал $f_1(\omega(w))\omega'(w) dw \in H(B)$. Поэтому на Σ существует борелевская комплекснозначная мера $\tilde{\mu}$, которая является граничной мерой данного дифференциала. Мера $\tilde{\mu}$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\Sigma} w^n d\tilde{\mu}(w) = 0,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$.

Между мерами μ и $\tilde{\mu}$ существуют следующие соотношения (см. [8, теорема 4] с учетом замечания в конце доказательства леммы 9 работы [9]):

- 1) если $S \subseteq M$ μ -измеримо, то $\chi(S)$ $\tilde{\mu}$ -измеримо, причем $\mu(S) = \tilde{\mu}(\chi(S))$.
- 2) если $\tilde{S} \subseteq \Sigma$ $\tilde{\mu}$ -измеримо, то $\omega(\tilde{S} \cap R)$ μ -измеримо, причем $\tilde{\mu}(\tilde{S}) = \mu(\omega(\tilde{S} \cap R))$.

По теореме Риссов [3, гл. II, теорема 7.10] мера $\tilde{\mu}$ абсолютно непрерывна на Σ относительно линейной меры.

Определим функцию Φ на Σ следующим образом: $\Phi(1)$ – некоторая фиксированная комплексная постоянная, которую мы выберем позже, $\Phi(e^{is}) = \Phi(1) + \tilde{\mu}(\tau_s)$, где $0 < s < 2\pi$, $\tau_s = \{e^{ip} : 0 \leq p \leq s\}$. Очевидно, что функция Φ абсолютно непрерывна на Σ . Из определения данной функции следует, что

$$\int_{\Sigma} w^n d\Phi(w) = \int_{\Sigma} w^n d\tilde{\mu} = 0,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$.

Интегрируя по частям, получаем, что

$$\int_{\Sigma} w^n \Phi(w) dw = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Из (9) следует, что существует функция $\tilde{F}(w)$ класса $A(\overline{B})$, удовлетворяющая условию $\tilde{F}(w)|_{\Sigma} = \Phi(w)$ [13, с. 102].

Обозначим $F(z) = \tilde{F}(\chi(z))$. Данная функция голоморфна в области D и имеет в каждой достижимой граничной точке предел по всем путям, лежащим в D и оканчивающимся в данной точке. В дальнейшем, если z_0 – достижимая граничная точка D , под $F(z_0)$ будем понимать данный предел. Кроме того,

$$F(\omega(e^{is})) = F(\omega(1)) + \mu(\omega(\tau_s \cap R)) \quad (10)$$

при всех $e^{is} \in R$.

Обозначим $D_2 = \psi(D)$, $\zeta = \psi(z)$. При отображении ψ каждой достижимой граничной точки области D соответствует достижимая граничная точка области D_2 ; и наоборот, при отображении ψ^{-1} каждой достижимой граничной точки области D_2 соответствует достижимая граничная точка области D . Таким образом, множество $\psi(M)$ совпадает с множеством всех достижимых граничных точек области D_2 . Также очевидно,

что D_2 – область Каратеодори. На Γ_2 определим меру μ_2 по формуле $\mu_2(S) = \mu(\psi^{-1}(S))$. Из условий (8) следует, что мера μ_2 удовлетворяет (8') при $t \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_2}$. Кроме того, $|\mu_2|(\Gamma_2 \setminus \psi(M)) = 0$. Обозначим через $\omega_2(w)$ конформное отображение B на D_2 , имеющее в точке 1 радиальный предел, равный $\psi(\omega(1))$, а через $\chi_2(\zeta)$ – конформное отображение области D_2 на единичный круг, обратное по отношению к $\omega_2(w)$. Через $R_2 \subseteq \Sigma$ обозначим множество точек, в которых существуют угловые пределы функции ω_2 . Очевидно, что $\omega_2(R_2) = \psi(M)$.

Из условий (8') следует (см. доказательство для области D), что существует функция F_2 , голоморфная внутри D_2 , имеющая в каждой достижимой граничной точке ζ_0 области D_2 предел по всем путям, лежащим в D_2 и оканчивающимся в ζ_0 (который мы обозначим через $F_2(\zeta_0)$), и удовлетворяющая соотношениям

$$F_2(\omega_2(e^{is})) = F_2(\omega_2(1)) + \mu_2(\omega_2(\tau_s \cap R_2)) \quad (11)$$

при всех $e^{is} \in R_2$, где мы полагаем

$$F_2(\omega_2(1)) = -F(\omega(1)). \quad (12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогично функции $\tilde{F}$ функция $\tilde{F}_2(w) = F_2(\omega_2(w))$ продолжается до функции, непрерывной на $\bar{B}$ и абсолютно непрерывной на Σ .

Пусть ψ – гомеоморфизм плоскости $\mathbb{C}$, меняющий ориентацию жордановых кривых. Найдём соотношение между функциями F и $F_2 \circ \psi$ на множестве M . Пусть a, b, c – три точки множества R , расположенные в порядке положительного обхода окружности Σ . Докажем, что точки $\chi_2(\psi(\omega(a)))$, $\chi_2(\psi(\omega(b)))$, $\chi_2(\psi(\omega(c)))$ расположены в порядке отрицательного обхода Σ . Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – жордановы дуги, лежащие за исключением концов в B , причем γ_1 соединяет a и b , γ_2 соединяет b и c , γ_3 соединяет c и a . Будем также полагать, что эти дуги не имеют общих точек внутри B . Будем считать, что дуги γ_i расположены настолько близко к Σ , что центр единичного круга содержится как внутри кривой $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, так и внутри кривой $\chi_2(\psi(\omega(\gamma_1))) \cup \chi_2(\psi(\omega(\gamma_2))) \cup \chi_2(\psi(\omega(\gamma_3)))$. Кроме того, будем полагать, что кривые $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ не касаются Σ в точках a, b, c . Так как точки a, b, c расположены в порядке положительного обхода Σ , то эти точки расположены в порядке положительного обхода кривой $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$. Следовательно, точки $\omega(a), \omega(b), \omega(c)$ расположены в порядке положительного обхода кривой $\omega(\gamma_1) \cup \omega(\gamma_2) \cup \omega(\gamma_3)$ [10, с. 48]. Так как отображение ψ меняет ориентацию, то точки $\psi(\omega(a)), \psi(\omega(b)), \psi(\omega(c))$ расположены в порядке отрицательного обхода кривой $\psi(\omega(\gamma_1)) \cup \psi(\omega(\gamma_2)) \cup \psi(\omega(\gamma_3))$. Отсюда следует, что точки $\chi_2(\psi(\omega(a))), \chi_2(\psi(\omega(b))), \chi_2(\psi(\omega(c)))$ расположены в порядке отрицательного обхода кривой $\chi_2(\psi(\omega(\gamma_1))) \cup \chi_2(\psi(\omega(\gamma_2))) \cup \chi_2(\psi(\omega(\gamma_3)))$. Значит, эти точки расположены в порядке отрицательного обхода Σ , что и требовалось доказать.

Пусть $0 < s < 2\pi$, $e^{is} \in R$; $s_2 \in (0; 2\pi)$, $e^{is_2} = \chi_2(\psi(\omega(e^{is})))$. Из предыдущих рассуждений следует, что $\chi_2(\psi(\omega(\tau_s \cap R))) = R_2 \cap ((\Sigma \setminus \tau_{s_2}) \cup 1 \cup e^{is_2})$. Поэтому $\mu_2(\psi(\omega(\tau_s \cap R))) = \mu_2(\omega_2(R_2 \cap (\Sigma \setminus \tau_{s_2})))$. Так как $\mu_2(\psi(M)) = 0$, то

$$\mu_2(\omega_2(R_2 \cap (\Sigma \setminus \tau_{s_2}))) = -\mu_2(\omega_2(R_2 \cap \tau_{s_2})).$$

Следовательно, $\mu(\omega(\tau_s \cap R)) = -\mu_2(\omega_2(R_2 \cap \tau_{s_2}))$.

Отсюда и из условий (10)–(12) следует, что на M имеет место равенство $F = -F_2 \circ \psi$. Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\psi(z)$ – гомеоморфизм плоскости $\mathbb{C}$ на себя, меняющий ориентацию замкнутых жордановых кривых. Тогда в терминах введенных выше обозначений имеем $F|_M = -F_2 \circ \psi|_M$.

Пусть теперь ψ – гомеоморфизм плоскости $\mathbb{C}$ на себя, сохраняющий ориентацию жордановых кривых. Используя аналогичные рассуждения и полагая в (12) $F_2(\omega_2(1)) = F(\omega(1))$, получаем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть ψ – гомеоморфизм плоскости $\mathbb{C}$ на себя, сохраняющий ориентацию замкнутых жордановых кривых. Тогда в терминах введенных выше обозначений имеем $F|_M = F_2 \circ \psi|_M$.

СЛЕДСТВИЕ 1 (теорема О’Фаррелла). Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – компакт Каратеодори без внутренних точек, и пусть $\psi(z)$ – гомеоморфизм плоскости $\mathbb{C}$ на себя, меняющий ориентацию замкнутых жордановых кривых. Тогда каждая функция класса $C(\Gamma)$ может быть равномерно на Γ приближена функциями вида $P_1(z) + P_2(\psi(z))$, где P_1 и P_2 – полиномы комплексного переменного. В частности, если L – сильно эллиптический оператор, то $P_L(\Gamma) = C(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать следствие 1 для случая, когда $\Gamma = \partial D$, где D – область Каратеодори. Сохраним все обозначения, введенные при доказательстве теоремы 1.

Пусть функция F непостоянна в D . Тогда функция $\tilde{F}$ непостоянна в B . Так как $\tilde{F}$ абсолютно непрерывна на Σ , то множество $\tilde{F}(\Sigma)$ имеет конечную длину. Отсюда следует, что это множество не имеет внутренних точек. В то же время $\tilde{F}(B)$ – область. Таким образом, $\tilde{F}(\Sigma)$ является более “тощим” множеством, чем $\tilde{F}(\bar{B})$. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $\tilde{F}$ имеет нули внутри B и не имеет их на Σ (этого можно добиться выбором $\Phi(1)$). Переходя на область D , получаем, что функция F имеет нули в D , а глобальное предельное множество F не содержит 0. Кроме того, $|F|$ строго больше некоторой положительной константы на множестве M .

Докажем, что существует

$$\int_M \frac{d\mu}{F}.$$

Так как функция $1/F$ ограничена на M , то достаточно доказать, что эта функция μ -измерима на M . Известно [14, с. 335], что функция является μ -измеримой на некотором множестве тогда и только тогда, когда она является равномерным пределом простых μ -измеримых функций на данном множестве (т.е. таких μ -измеримых функций, которые принимают на данном множестве не более чем счетное число значений). Так как функция $1/\tilde{F}$ $\tilde{\mu}$ -измерима на Σ , существует последовательность простых $\tilde{\mu}$ -измеримых функций $\{\tilde{g}_n\}_{n=1}^\infty$, равномерно на Σ сходящаяся к функции $1/\tilde{F}$. Тогда последовательность простых функций $g_n(z) = \tilde{g}_n(\chi(z))$, $n = 1, 2, \dots$, заданная на множестве M , равномерно на M сходится к функции $1/F(z)$.

Так как $\tilde{g}_n$ – $\tilde{\mu}$ -измеримы, то эти функции принимают каждое свое значение на некоторых $\tilde{\mu}$ -измеримых подмножествах Σ . Из соотношения 2) между мерами $\tilde{\mu}$ и μ следует, что функции $g_n(z)$ принимают каждое свое значение на некоторых μ -измеримых подмножествах множества M . Поэтому $g_n(z)$ μ -измеримы на M , откуда следует, что $1/F$ также μ -измерима на M . Поэтому искомый интеграл существует и определяется

по формуле

$$\int_M \frac{d\mu}{F} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M g_n d\mu.$$

Кроме того,

$$\int_M \frac{d\mu}{F} = \int_{\Sigma} \frac{d\tilde{\mu}}{\tilde{F}} = \int_{\Sigma} \frac{d\tilde{F}(w)}{\tilde{F}(w)} = \int_{\Sigma} d(\log \tilde{F}) = i \int_{\Sigma} d(\operatorname{Arg} \tilde{F}).$$

Отсюда и из принципа аргумента следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{d\mu}{F} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Sigma}(\operatorname{Arg} \tilde{F}) = n > 0,$$

где n – число нулей $\tilde{F}$ в B с учетом кратности.

Аналогичным образом (с учетом замечания 2) определяется

$$\int_{\psi(M)} \frac{d\mu_2}{F_2}.$$

Так как по теореме 1 $F = -F_2 \circ \psi$ на M , то (снова учитывая замечание 2) получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{d\mu}{F} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\psi(M)} \frac{d\mu_2}{F_2} \leq 0.$$

Но ранее было доказано, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{d\mu}{F} > 0.$$

Из полученного противоречия следует, что функция F – тождественная константа. Поэтому $\mu \equiv 0$ на Γ . Следствие 1 доказано.

Следующие примеры показывают, что для некоторых жордановых контуров X равенство $P_L(X) = C(X)$ может выполняться без условия сильной эллиптичности оператора L , а для некоторых X может и не выполняться, т.е. в случае, когда L – эллиптический, но не сильно эллиптический оператор, чисто топологических условий приближаемости L -полиномами не существует.

ПРИМЕР 1. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – квадрат с вершинами $0, 1, i, 1+i$, L – оператор вида (3) с $\beta \in \mathbb{R} \setminus (-1; 1]$. Тогда $P_L(\Gamma) = C(\Gamma)$.

Сохраним все обозначения, введенные при доказательстве теоремы 1. Так как для сильно эллиптических операторов приближаемость уже доказана, то достаточно доказать данное утверждение для случая $\beta > 1$. Из предложения 1 с учетом того обстоятельства, что Γ – жорданова кривая, получаем, что F и $F_2 \circ T_2$ непрерывно продолжаются на $\overline{D}$ и $F|_{\Gamma} = F_2 \circ T_2|_{\Gamma}$. На отрезке с концами 0 и 1 имеем $z_2 = 2\beta x_1/(\beta - 1)$. Таким образом, отображение $T_3 = (\beta - 1)T_2/(2\beta)$ является тождественным на данном отрезке. Пусть $D_3 = T_3(D)$. Имеет место включение $D_3 \subset D$. Определим функцию F_3 на $\overline{D}_3$ по формуле

$$F_3(z) = F_2\left(\frac{2\beta}{\beta - 1}z\right).$$

Так как F_2 голоморфна в D_2 , то F_3 голоморфна в D_3 и $F|_\Gamma = F_3 \circ T_3|_\Gamma$. На отрезке с концами 0 и 1 имеем $F - F_3 = 0$. Так как $F - F_3 \in A(\overline{D}_3)$, то по принципу симметрии функция $F - F_3$ аналитически продолжается в некоторую область, содержащую интервал $(0, 1)$. Из теоремы единственности для голоморфных функций следует, что $F \equiv F_3$ на $\overline{D}_3$. Поэтому $F|_\Gamma = F \circ T_3|_\Gamma$. Докажем, что F тождественно равна некоторой константе на отрезке с концами в точках 0 и i . На данном отрезке имеем $T_3(z) = ix_2/\beta$. Так как $\beta > 1$, то для любой точки z_0 из отрезка с концами 0 и i $T_3^n(z_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $F \in C(\overline{D})$, то $F(z_0) = F(T_3(z_0)) = \dots = F(T_3^n(z_0)) = \dots = F(0)$. Поэтому $F \equiv F(0)$ на отрезке с концами 0 и i . Следовательно, $F \equiv F(0)$ на $\overline{D}$. Таким образом, $\mu = 0$. Поэтому $P_L(\Gamma) = C(\Gamma)$.

ПРИМЕР 2. Пусть L – оператор вида (3) с $\beta > 1$, $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + \frac{1}{\beta}x_2^2 = 1\}$. Тогда $P_L(\Gamma) \neq C(\Gamma)$.

Выразив уравнение кривой Γ с помощью переменных z и z_2 , получим равенство

$$z^2 - \frac{(\beta - 1)^2}{4\beta} z_2^2 = 1 - \beta.$$

На Γ определим меру μ по формуле $d\mu(z) = 2z dz$. Тогда

$$d\mu(z) = \frac{(\beta - 1)^2}{2\beta} z_2 dz_2.$$

Поэтому мера μ ортогональна всем полиномиальным решениям уравнения $Lu = 0$. Отсюда следует, что $P_L(\Gamma) \neq C(\Gamma)$.

Перейдем теперь к случаю произвольного компакта Каратеодори. Отметим, что случай $L = \bar{\partial}^2$ следующей теоремы был ранее рассмотрен П. В. Парамоновым (работа готовится к печати) несколько другим способом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$ – компакт Каратеодори, Y_j , $j = 1, 2, \dots$, – связанные ограниченные компоненты множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$. Предположим, что для всех Y_j имеет место $P_L(\partial Y_j) = C(\partial Y_j)$. Тогда $P_L(X) = A_L(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда L имеет попарно различные характеристические корни. Не ограничивая общности, будем доказывать теорему 2 для операторов L вида (3) с $\beta \in \mathbb{R} \setminus (-1; 1]$. В силу теоремы 1.1 работы [6] любую функцию класса $A_L(X)$ можно равномерно приблизить функциями, каждая из которых является решением уравнения $Lu = 0$ в некоторой окрестности X . Отсюда и из замечания, сделанного в § 3 работы [6], следует, что любая функция класса $A_L(X)$ может быть приближена равномерно на X “мероморфными” решениями уравнения $Lu = 0$ с “полюсами” вне X . Поэтому достаточно доказать следующее утверждение: если мера μ с носителем на X удовлетворяет условиям

$$\int_X \frac{d\mu(z)}{z - t} = 0, \quad (13)$$

$$\int_X \frac{d\mu(z)}{z_2 - T_2 t} = 0 \quad (14)$$

при $t \in \mathbb{R}^2 \setminus \widehat{X}$, то μ удовлетворяет условиям (13) и (14) при $t \in \mathbb{R}^2 \setminus X$. Кроме того, достаточно доказать приближаемость полиномиальными решениями уравнения $Lu = 0$ всех “мероморфных” в $\mathbb{R}^2$ решений данного уравнения с конечным числом “полюсов”. Следовательно, достаточно доказать приближаемость функций вида $1/(z - a)^n$, $1/(z_2 - T_2 a)^n$, где n – натуральное число, а $a \in \widehat{X} \setminus X$. Поэтому теорему 2 достаточно доказать для компактов Каратеодори X с единственной компонентой дополнения Y .

Пусть M – совокупность достижимых граничных точек области Y , μ_0 – логарифмическая мера для некоторой точки $z_0 \in Y$ относительно алгебры $P(\widehat{X})$, причем $\text{supp}(\mu_0) \subseteq \partial X$. Тогда $\text{supp}(\mu_0) \subseteq \partial Y$ [3, гл. VI, теорема 3.3]. Рассмотрим разложение $\mu = \mu_a + \mu_s$, где μ_a абсолютно непрерывна относительно μ_0 , а μ_s сингулярна относительно μ_0 . Введем следующие обозначения:

$$f_0(t) = \int_{\partial Y} \frac{d\mu_a(z)}{z - t}, \quad f_1(t) = \int_X \frac{d\mu_s(z)}{z - t}.$$

ЛЕММА 1. В указанных обозначениях имеем $f_0(t) = 0$ при $t \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{Y}$, $f_1(t) = 0$ при $t \in \mathbb{R}^2 \setminus X$, $|\mu_a|(\mathbb{R}^2 \setminus M) = 0$, $|\mu_s|(M) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как любая представляющая положительная мера точки z_0 в алгебре $P(\widehat{X})$, имеющая носитель на X , сосредоточена на ∂Y [3, гл. VI, теорема 3.3], то μ_0 – единственная представляющая положительная мера точки z_0 в алгебре $P(\widehat{X})$ с носителем на X [3, гл. II, теорема 4.2]. Поэтому из (13) следует, что

$$\int_{\partial Y} \frac{d\mu_a(z)}{z - t} = 0 \quad \text{и} \quad \int_X \frac{d\mu_s(z)}{z - t} = 0$$

при $t \in \mathbb{R}^2 \setminus \widehat{X}$ [3, гл. II, теорема 7.6]. Так как $\mu_0(\mathbb{R}^2 \setminus M) = 0$ [3, гл. VI, лемма 4.3], то $|\mu_a|(\mathbb{R}^2 \setminus M) = 0$. Докажем, что $f_0(t) = 0$ при $t \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{Y}$. Пусть существует точка $t_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{Y}$ такая, что $f_0(t_0) \neq 0$. Можно считать, что $t_0 \in X$. Так как

$$\int_{\partial Y} \frac{h(z) d\mu_a(z)}{z - t_0} = f_0(t_0)h(t_0)$$

для любой функции $h \in P(\widehat{X})$, то мера $d\mu_a(z)/(f_0(t_0)(z - t_0))$ является комплексной представляющей мерой точки t_0 в алгебре $P(\widehat{X})$. Следовательно, существует положительная мера μ_{t_0} , абсолютно непрерывная относительно меры $\mu_a(z)$, являющаяся представляющей мерой точки t_0 в алгебре $P(\widehat{X})$ [3, гл. II, теорема 2.2]. Так как μ_a абсолютно непрерывна относительно μ_0 , то μ_{t_0} также абсолютно непрерывна относительно μ_0 , что невозможно, так как точки z_0 и t_0 принадлежат разным долям алгебры $P(\widehat{X})$ [3, гл. VI, теорема 2.2, теорема 4.4]. Итак, $f_0 = 0$ вне $\overline{Y}$.

Докажем, что $f_1(t) = 0$ при $t \in Y$. Пусть существует точка $z_1 \in Y$ такая, что $f_1(z_1) \neq 0$. Тогда для любой функции $h(z)$ класса $P(\widehat{X})$ имеем

$$\int_X \frac{h(z) d\mu_s(z)}{f_1(z_1)(z - z_1)} = h(z_1).$$

Поэтому мера $d\mu_s(z)/(f_1(z_1)(z - z_1))$ является комплексной представляющей мерой точки z_1 в алгебре $P(\widehat{X})$. Следовательно, существует положительная мера μ_1 , абсолютно непрерывная относительно меры $\mu_s(z)$, являющаяся представляющей мерой точки z_1 в алгебре $P(\widehat{X})$. Так как $\text{supp}(\mu_1) \subseteq X$, то $\text{supp}(\mu_1) \subseteq \partial Y$. Поэтому μ_1 – логарифмическая мера точки z_1 в алгебре $P(\widehat{X})$. Так как точки z_0 и z_1 лежат внутри одной

доли Y алгебры $P(\hat{X})$, то μ_0 абсолютно непрерывна относительно μ_1 [3, гл. VI, п. 4.4]. Итак, μ_0 абсолютно непрерывна относительно μ_s . Последнее противоречит тому, что μ_s сингулярна относительно μ_0 . Поэтому $f_1 \equiv 0$ в Y .

Остается доказать, что $|\mu_s|(M) = 0$. Обозначим через $R(X)$ замыкание по норме пространства $C(X)$ сужения на X множества мероморфных в $\mathbb{C}$ функций с полюсами вне X . Пусть $K \subset \partial X$ – замкнутое множество, причем логарифмическая мера K с носителем на ∂X относительно любой точки множества X° и алгебры $R(X)$ равна нулю. Пусть σ – некоторая борелевская комплекснозначная мера с носителем на ∂X , ортогональная к алгебре $R(X)$. Тогда мера σ любой точки множества ∂X равна нулю (см. замечание 1). Следовательно, $|\sigma|(K) = 0$ [3, гл. VI, теорема 2.3, гл. II, теорема 8.5]. Поэтому K – интерполяционное множество пика для алгебры $R(X)|_{\partial X}$ [3, гл. II, теорема 12.1, теорема 12.7]. Отсюда и из принципа максимума следует (с учетом того обстоятельства, что K не содержит целиком границы ни одной из связных компонент множества X°), что K – интерполяционное множество пика для алгебры $R(X)$. Так как μ_s ортогональна к алгебре $R(X)$, то $|\mu_s|(K) = 0$.

Так как каждая точка множества ∂X представляет собой одноточечную долю алгебры $R(X)$ [3, гл. VI, доказательство теоремы 4.4], то единственной представляющей мерой данной точки в алгебре $R(X)$ является мера, сосредоточенная в этой точке [3, гл. VI, теорема 3.3]. Поэтому каждая граничная точка компакта X имеет нулевую логарифмическую меру с носителем на ∂X относительно алгебры $R(X)$ и любой точки множества X° [3, гл. VI, теорема 2.2]. Так как Y и любая связная компонента множества X° имеют не более одной общей достижимой граничной точки, то любое подмножество множества M имеет нулевую логарифмическую меру с носителем на ∂X относительно алгебры $R(X)$ и любой точки множества X° [3, глава VI, лемма 4.3 (iv)]. Поэтому в качестве K можно взять любое замкнутое подмножество множества M . Таким образом, $|\mu_s|(M) = 0$. Лемма 1 полностью доказана.

Из леммы 1 и условия (14) следует, что $\mu = \mu_{2,a} + \mu_{2,s}$, где $|\mu_{2,a}|(\mathbb{R}^2 \setminus M) = 0$, $|\mu_{2,s}|(M) = 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial Y} \frac{d\mu_{2,a}(z)}{z_2 - T_2 t} &= 0 \quad \text{при } t \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{Y}, \\ \int_X \frac{d\mu_{2,s}(z)}{z_2 - T_2 t} &= 0 \quad \text{при } t \in \mathbb{R}^2 \setminus X. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mu_{2,a} = \mu_a$, $\mu_{2,s} = \mu_s$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial Y} \frac{d\mu_a(z)}{z_2 - T_2 t} &= 0 \quad \text{при } t \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{Y}, \\ \int_X \frac{d\mu_s(z)}{z_2 - T_2 t} &= 0 \quad \text{при } t \in \mathbb{R}^2 \setminus X. \end{aligned}$$

Из условия теоремы 2 следует, что $\mu_a = 0$. Итак, $\mu = \mu_s$, μ удовлетворяет условиям (13) и (14) при всех $t \in \mathbb{R}^2 \setminus X$. Случай попарно различных характеристических корней рассмотрен.

Пусть теперь L имеет совпадающие характеристические корни. Не ограничивая общности, будем считать, что $L = \overline{\partial}^2$. Тогда условие (14) заменяется на условие

$$\int_X \frac{\bar{z} d\mu(z)}{z - t} = 0. \quad (14')$$

Для доказательства теоремы 2 в данном случае достаточно показать, что любая мера μ , удовлетворяющая условиям (13) и (14') при $t \in \mathbb{R}^2 \setminus \widehat{X}$, удовлетворяет данным условиям при $t \in \mathbb{R}^2 \setminus X$. Точно так же, как и в случае попарно различных характеристических корней, доказывается, что

$$\begin{aligned} \int_{\partial Y} \frac{d\mu_a(z)}{z-t} = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\partial Y} \frac{\bar{z} d\mu_a(z)}{z-t} = 0 \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{Y}, \\ \int_X \frac{d\mu_s(z)}{z-t} = 0 \quad \text{и} \quad \int_X \frac{\bar{z} d\mu_s(z)}{z-t} = 0 \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}^2 \setminus X. \end{aligned}$$

Из условия теоремы 2 следует, что $\mu_a = 0$. Таким образом, $\mu = \mu_s$, μ удовлетворяет условиям (13) и (14') при всех $t \in \mathbb{R}^2 \setminus X$. Теорема 2 полностью доказана.

Применяя теорему 2 к случаю сильно эллиптического оператора L и учитывая следствие 1, получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$ – компакт Каратеодори, L – сильно эллиптический оператор. Тогда $P_L(X) = A_L(X)$.

Автор выражает искреннюю благодарность П. В. Парамонову за постановку задачи и внимание к работе. Автор также благодарен Е. М. Чирке за ряд ценных советов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов. М.: Мир, 1986.
- [2] Парамонов П. В. C^m -приближения гармоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbb{R}^n$ // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 2. С. 105–128.
- [3] Гамелин Т. Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.
- [4] O'Farrell A. G. A generalized Walsh–Lebesgue theorem // Proc. Roy. Soc. Edinburg. Sect. A. 1975. V. 73. № 1. P. 231–234.
- [5] Федоровский К. Ю. О равномерных приближениях функций n -аналитическими полиномами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$ // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 4. С. 604–610.
- [6] Парамонов П. В., Федоровский К. Ю. О равномерной и C^1 -приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго порядка // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 2. С. 123–144.
- [7] Verchota G. C, Vogel A. L. Nonsymmetric systems on nonsmooth planar domains // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. V. 349. № 11. P. 4501–4535.
- [8] Бишоп Э. Структура некоторых мер // Некоторые вопросы теории приближений. Сб. под редакцией А. А. Гончара. М.: ИЛ, 1963. С. 74–86.
- [9] Бишоп Э. Граничные меры аналитических дифференциалов // Некоторые вопросы теории приближений. Сб. под редакцией А. А. Гончара. М.: ИЛ, 1963. С. 87–100.
- [10] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
- [11] Каратеодори К. Конформное отображение. М.–Л.: Гостехиздат, 1934.
- [12] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
- [13] Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
- [14] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.