Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Сыромолотова, Произведения классов Фиттинга
конечных групп, *Матем. заметки*, 2004, том 75, вы-
пуск 2, 269–276

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm33>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 10:59:47

УДК 512.542

ПРОИЗВЕДЕНИЯ КЛАССОВ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

О. В. Сыромолотова

В работе рассматриваются классы Фиттинга. В частности, показывается, что произведение n -кратно ω -локальных классов Фиттинга является n -кратно ω -локальным классом Фиттинга.

Библиография: 11 названий.

При конструировании новых классов групп одним из основных методов является факторизация классов групп. При этом возникает задача изучения полученных классов. Многие результаты этого направления установлены в теории формаций. В работах [1], [2] показывается, что если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – локальные формации, то формация $\mathfrak{MH}$ также является локальной. Аналогичный результат получен для ω -локальных формаций [3]. Кроме того, если ввести ограничение $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, то произведение двух композиционных формаций является композиционной формацией [4]. Позже этот результат был распространен на Ω -композиционные формации [5], [6]. В настоящей работе рассматриваются классы Фиттинга. В частности, показывается, что произведение n -кратно ω -локальных классов Фиттинга является n -кратно ω -локальным классом Фиттинга, что дает ответ на вопрос 25 [3]. Отметим, что аналогичный результат для n -кратно Ω -канонических классов Фиттинга независимо получен Ведерниковым [7].

Рассматриваются только конечные группы. Необходимые определения и обозначения можно найти в [8]–[10]. В дальнейшем, ω обозначает некоторое непустое подмножество множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$; Ω – непустой подкласс класса всех конечных простых групп $\mathfrak{J}$, $\Omega' = \mathfrak{J} \setminus \Omega$. Функция

$$f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга групп}\}$$

называется ωR -функцией. Функция

$$\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$$

называется $\mathbb{P}FR$ -функцией. Класс Фиттинга

$$\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi) = (G: O^\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G^{\varphi(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G))$$

называется ω -верным, где f и φ – некоторые ωR -функция и $\mathbb{P}FR$ -функция соответственно. При этом функция f называется ω -спутником, функция φ – направлением

ω -векторного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. При рассмотрении различных направлений получают различные классы Фиттинга. В частности, класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi)$ называется ω -полным или, коротко, ωA -классом Фиттинга и обозначается $\mathfrak{F} = \omega AR(f)$, если $\varphi(p) = \mathfrak{G}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$; класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi)$ называется ω -локальным или, коротко, ωL -классом Фиттинга и обозначается $\mathfrak{F} = \omega LR(f)$, если $\varphi(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{G}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Направление φ ω -векторного класса Фиттинга называется pn -направлением, если $\varphi(p) = \varphi(p) \mathfrak{G}_{p'}$ и $\varphi(p)$ не содержит простых неабелевых pd -групп для любого $p \in \mathbb{P}$. Функция

$$f: \Omega \cup \{\Omega'\} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга групп}\},$$

принимая одинаковые значения на изоморфных группах из Ω , называется ΩR -функцией. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется Ω -каноническим или, коротко, ΩK -классом Фиттинга и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega KR(f)$, если

$$\mathfrak{F} = (G: O^\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } O^{A, A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)).$$

При этом ΩR -функция f называется ΩK -спутником класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Произведением классов Фиттинга $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс

$$\mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} = \{G: G/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – ωL -классы Фиттинга, где m и h – внутренние ω -спутники классов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ – ωL -класс Фиттинга с ω -спутником f таким, что

$$\begin{aligned} f(\omega') &= \mathfrak{F}; & f(p) &= \mathfrak{M} \diamond h(p), & \text{если } p &\in \omega \cap \pi(\mathfrak{H}); \\ f(p) &= m(p), & \text{если } p &\in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \omega LR(f)$, где f – ω -спутник, описанный в формулировке леммы. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

1) Докажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим следующие случаи.

а) Предположим, что $\omega \cap \pi(G) = \emptyset$. Тогда $O^\omega(G) = G \in \mathfrak{F} = f(\omega')$, и из $p \in \omega \cap \pi(G) = \emptyset$ следует, что $F^p(G) \in f(p)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}_1$. В дальнейшем, будем считать, что $\omega \cap \pi(G) \neq \emptyset$.

б) Пусть $p \in \omega \cap \pi(G/G_{\mathfrak{M}})$. Так как $\mathfrak{N}_p \mathfrak{G}_{p'}$ является формацией и $\mathfrak{M}$ – класс Фиттинга, то в силу леммы 1.2 гл. 1 [9] и леммы 1.1 гл. 9 [8]

$$F^p(G)/(F^p(G))_{\mathfrak{M}} = F^p(G)/G_{\mathfrak{M}} \cap F^p(G) \cong F^p(G)G_{\mathfrak{M}}/G_{\mathfrak{M}} = F^p(G/G_{\mathfrak{M}}).$$

Поскольку $G/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$, то $F^p(G/G_{\mathfrak{M}}) \in h(p)$, и значит, $F^p(G)/(F^p(G))_{\mathfrak{M}} \in h(p)$. Отсюда $F^p(G) \in \mathfrak{M} \diamond h(p)$. Так как $G/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$, то $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H})$, и, следовательно, $F^p(G) \in f(p)$.

с) Пусть $p \in [\omega \cap \pi(G)] \setminus \pi(G/G_{\mathfrak{M}})$, т.е. $G/G_{\mathfrak{M}}$ является p' -группой. Тогда по лемме 1 [3] $F^p(G) = F^p(G_{\mathfrak{M}})$. Так как $G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$, то $F^p(G_{\mathfrak{M}}) \in m(p)$, и значит, $F^p(G) \in m(p)$; теперь

i) если $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H})$, то

$$F^p(G) \in m(p) \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M} \diamond h(p) = f(p);$$

ii) если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H})$, то

$$F^p(G) \in m(p) = f(p).$$

Из б) и с) видим, что $F^p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Кроме того, так как $G \in \mathfrak{F}$ и $O^\omega(G) \triangleleft G$, то $O^\omega(G) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Отсюда $G \in \mathfrak{F}_1$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

2) Пусть $G \in \mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$ и G – группа минимального порядка с таким свойством. Тогда G – комонотическая группа с комонотом $M = G_{\mathfrak{F}}$.

Из того, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$, получаем $G \notin \mathfrak{M}$. Тогда $G_{\mathfrak{M}} \neq G$ и из комонотичности группы G следует, что $G_{\mathfrak{M}} \subseteq M$. Кроме того, $G_{\mathfrak{M}} = M_{\mathfrak{M}}$, и поскольку $M \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$, то $M/M_{\mathfrak{M}} = M/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$.

Допустим, G/M не является ω -группой. Тогда $G = O^\omega(G) \in f(\omega') = \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, G/M является ω -группой.

Если G/M – неабелева группа и $p \in \pi(G/M)$, то, учитывая, что спутники m и h внутренние, получаем $G = F^p(G) \in f(p) \subseteq \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Противоречие.

Значит, G/M является p -группой. Рассмотрим следующие возможные случаи.

а) Пусть $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H})$. Тогда $F^p(G) \in f(p) = \mathfrak{M} \diamond h(p)$, т.е. $F^p(G)/(F^p(G))_{\mathfrak{M}} \in h(p)$. Ранее было показано, что $F^p(G)/(F^p(G))_{\mathfrak{M}} \cong F^p(G/G_{\mathfrak{M}})$. Отсюда $F^p(G/G_{\mathfrak{M}}) \in h(p)$. Аналогично можно показать, что $F^q(G/G_{\mathfrak{M}}) \in h(q)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(G)$. Поскольку $\pi(M/G_{\mathfrak{M}}) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$ и $\pi(G/M) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$, то $\pi(G/G_{\mathfrak{M}}) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$, и значит, $F^q(G/G_{\mathfrak{M}}) \in h(q)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(G/G_{\mathfrak{M}})$. Кроме того, так как $\mathfrak{G}_\omega$ – формация, то по лемме 1.2 гл. 1 [9]

$$O^\omega(G/G_{\mathfrak{M}}) = O^\omega(G)G_{\mathfrak{M}}/G_{\mathfrak{M}} \cong O^\omega(G)/O^\omega(G) \cap G_{\mathfrak{M}} = O^\omega(G)/(O^\omega(G))_{\mathfrak{M}}.$$

Из $O^\omega(G) \triangleleft M \in \mathfrak{F}$, леммы 10 [10] получаем

$$O^\omega(G/G_{\mathfrak{M}}) \cong O^\omega(G)/(O^\omega(G))_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H} = h(\omega').$$

Отсюда $G/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$, и, следовательно, $G \in \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Противоречие.

б) Пусть $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H})$. Тогда $F^p(G) = O^p(G) \in m(p)$. Нетрудно показать, что $O^p(G) \subset G$. Поскольку $M/O^p(G) \triangleleft G/O^p(G) \in \mathfrak{N}_p$, то $M/O^p(G)$ является q' -группой для любого $q \in \omega \cap \pi(G)$, $q \neq p$. Тогда по лемме 1 [3] $F^q(M) = F^q(O^p(G))$. Так как $O^p(G) \in m(p) \subseteq \mathfrak{M}$, то $F^q(O^p(G)) \in m(q)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(O^p(G))$, $q \neq p$. Поскольку $M/O^p(G)$ – q' -группа, то $F^q(O^p(G)) \in m(q)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(M)$, $q \neq p$. Аналогично, из того, что G/M является q' -группой, по лемме 1 [3] $F^q(G) = F^q(M) \in m(q)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(G)$, $q \neq p$. Кроме того, поскольку $p \in \omega$, то $M/O^p(G) \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{G}_\omega$. Следовательно, $O^\omega(M) = O^\omega(O^p(G))$, а так как $O^p(G) \in \mathfrak{M}$, то $O^\omega(O^p(G)) \in m(\omega')$. Из $G/M \in \mathfrak{G}_\omega$ следует, что $O^\omega(G) = O^\omega(M) \in m(\omega')$. Получили, что $G \in \omega\text{LR}(m) = \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Из 1) и 2) следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [3]. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n -кратно ω -локальным, $n \geq 1$, если $\mathfrak{F} = \omega\text{LR}(f)$, причем все непустые значения спутника f являются $(n - 1)$ -кратно ω -локальными классами Фиттинга. Произвольный класс Фиттинга считается 0-кратно ω -локальным классом Фиттинга.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – n -кратно ω -локальные классы Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ является n -кратно ω -локальным классом Фиттинга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по n . При $n = 0$ утверждение ввиду теоремы 1.12 гл. 9 [8] верно. При $n = 1$ справедливость следствия 1 вытекает из леммы 10 [10] и теоремы 1. Пусть утверждение следствия 1 выполняется для любых натуральных чисел, меньших n , и $\mathfrak{M} = \omega\text{LR}(m)$, $\mathfrak{H} = \omega\text{LR}(h)$, причем все непустые значения спутников m и h суть $(n - 1)$ -кратно ω -локальные классы Фиттинга. Ввиду леммы 10 [10] можем считать спутники m и h внутренними. Тогда по теореме 1 $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} - \omega\text{L}$ -класс Фиттинга с ω -спутником f таким, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$; $f(p) = \mathfrak{M} \diamond h(p)$, если $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H})$; $f(p) = m(p)$, если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H})$.

Так как $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ являются $(n - 1)$ -кратно ω -локальными классами Фиттинга, то по предположению индукции $\mathfrak{F}$ является $(n - 1)$ -кратно ω -локальным классом Фиттинга. Также по индукции заключаем, что $\mathfrak{M} \diamond h(p)$ является $(n - 1)$ -кратно ω -локальным классом Фиттинга. Таким образом, все непустые значения спутника f являются $(n - 1)$ -кратно ω -локальными классами Фиттинга. Тогда по определению 1 $\mathfrak{F}$ является n -кратно ω -локальным классом Фиттинга. Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H} = \omega\text{R}(h, \varphi)$ с внутренним ω -спутником h и pn -направлением φ , $\mathfrak{M}$ – непустой класс Фиттинга, причем m – минимальный ω -спутник класса Фиттинга $\omega\text{R}(\mathfrak{M}, \varphi)$. Если $\mathfrak{F}$ является ω -вверным классом Фиттинга с pn -направлением φ , то $\mathfrak{F}$ обладает ω -спутником f таким, что

$$\begin{aligned} f(\omega') &= \mathfrak{F}, & f(p) &= \mathfrak{M} \diamond h(p), & \text{если } p &\in \omega \cap \pi(\mathfrak{H}), \\ f(p) &= m(p), & & & \text{если } p &\in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F}$ – ω -вверный класс Фиттинга с pn -направлением φ , $\mathfrak{F}_1 = \omega\text{R}(f, \varphi)$, где f – ω -спутник, описанный в формулировке теоремы. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

1) Докажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим следующие случаи.

а) Предположим, что $\omega \cap \pi(G) = \emptyset$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G = O^\omega(G) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Кроме того, из $p \in \omega \cap \pi(G) = \emptyset$ следует, что $G^{\varphi(p)} \in f(p)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}_1$. В дальнейшем, будем считать, что $\omega \cap \pi(G) \neq \emptyset$.

б) Пусть $p \in \omega \cap \pi(G/G_{\mathfrak{M}})$. Так как $\varphi(p)$ является формацией и $\mathfrak{M}$ – классом Фиттинга, то в силу леммы 1.2 гл. 1 [9] и леммы 1.1 гл. 9 [8]

$$G^{\varphi(p)} / (G^{\varphi(p)})_{\mathfrak{M}} = G^{\varphi(p)} / G_{\mathfrak{M}} \cap G^{\varphi(p)} \cong G^{\varphi(p)} G_{\mathfrak{M}} / G_{\mathfrak{M}} = (G / G_{\mathfrak{M}})^{\varphi(p)}.$$

Поскольку $G / G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$, то $(G / G_{\mathfrak{M}})^{\varphi(p)} \in h(p)$, и значит, $G^{\varphi(p)} / (G^{\varphi(p)})_{\mathfrak{M}} \in h(p)$. Отсюда $G^{\varphi(p)} \in \mathfrak{M} \diamond h(p)$. Так как $G / G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$, то $p \in \pi(\mathfrak{H}) \cap \omega$, и следовательно, $G^{\varphi(p)} \in f(p)$.

с) Пусть $p \in [\omega \cap \pi(G)] \setminus \pi(G / G_{\mathfrak{M}})$, т.е. $G / G_{\mathfrak{M}}$ является p' -группой. Тогда по лемме 11 [7] $G^{\varphi(p)} = (G_{\mathfrak{M}})^{\varphi(p)}$. Так как $G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M} \subseteq \omega\text{R}(\mathfrak{M}, \varphi)$, то $(G_{\mathfrak{M}})^{\varphi(p)} \in m(p)$, и значит, $G^{\varphi(p)} \in m(p)$; далее,

i) если $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H})$, то

$$G^{\varphi(p)} = (G_{\mathfrak{M}})^{\varphi(p)} \triangleleft G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M} \diamond h(p) = f(p);$$

ii) если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H})$, то

$$G^{\varphi(p)} \in m(p) = f(p).$$

Из б) и в) следует, что $G^{\varphi(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Кроме того, так как $G \in \mathfrak{F}$, то $O^{\omega}(G) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Отсюда $G \in \mathfrak{F}_1$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

2) Пусть $G \in \mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$ и G – группа минимального порядка с таким свойством. Тогда G – комонотическая группа с комонотом $M = G_{\mathfrak{F}}$. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в теореме 1, нетрудно проверить, что $M/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$ и G/M является ω -группой.

Если G/M – неабелева группа и $p \in \pi(G/M)$, то, поскольку φ является pn -направлением, получаем $G = G^{\varphi(p)}$. Из того, что m и h являются внутренними спутниками и $\omega R(\mathfrak{M}, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$, следует, что $G = G^{\varphi(p)} \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие.

Значит, G/M является простой p -группой. Рассмотрим следующие возможные случаи.

а) Пусть $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H})$. Тогда $G^{\varphi(p)} \in f(p) = \mathfrak{M} \diamond h(p)$, т.е.

$$G^{\varphi(p)} / (G^{\varphi(p)})_{\mathfrak{M}} \in h(p).$$

Ранее было показано, что $G^{\varphi(p)} / (G^{\varphi(p)})_{\mathfrak{M}} \cong (G/G_{\mathfrak{M}})^{\varphi(p)}$, т.е. $(G/G_{\mathfrak{M}})^{\varphi(p)} \in h(p)$. Аналогично можно показать, что $(G/G_{\mathfrak{M}})^{\varphi(q)} \in h(q)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(G)$. Поскольку $\pi(G/G_{\mathfrak{M}}) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$, то $(G/G_{\mathfrak{M}})^{\varphi(q)} \in h(q)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(G/G_{\mathfrak{M}})$. Как и в теореме 1 $O^{\omega}(G/G_{\mathfrak{M}}) \in h(\omega')$. Значит, $G/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$, и, следовательно, $G \in \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Противоречие.

б) Пусть $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H})$. Тогда $G^{\varphi(p)} \in f(p) = t(p)$. Пусть f_1 – минимальный ω -спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\omega R(\mathfrak{M}, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда по следствию 12.1 [10] $m \leq f_1$, и значит, $G^{\varphi(p)} \in t(p) \subseteq f_1(p)$. Так как G/M является ω -группой, то $O^{\omega}(G) = O^{\omega}(M)$. Поскольку $M \in \mathfrak{F}$, то

$$O^{\omega}(G) = O^{\omega}(M) \in f_1(\omega').$$

Пусть $q \in \omega \cap \pi(G)$, $q \neq p$. Так как G/M – q' -группа, то $G^{\varphi(q)} = M^{\varphi(q)}$. Из $M \in \mathfrak{F}$ следует, что $G^{\varphi(q)} = M^{\varphi(q)} \in f_1(q)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(M)$, $q \neq p$, и значит, любого $q \in \omega \cap \pi(G)$, $q \neq p$. Отсюда $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Из 1) и 2) следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H} = \omega AR(h)$ с внутренним ω -спутником h , $\mathfrak{M}$ – непустой класс Фиттинга, причем t – минимальный ω -спутник класса Фиттинга $\omega AR(\mathfrak{M})$. Если $\mathfrak{F}$ является ω -полным классом Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ обладает ω -спутником f таким, что

$$\begin{aligned} f(\omega') &= \mathfrak{F}, & f(p) &= \mathfrak{M} \diamond h(p), & \text{если } p &\in \omega \cap \pi(\mathfrak{H}), \\ f(p) &= t(p), & & \text{если } p &\in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H}). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H} = \omega LR(h)$ с внутренним ω -спутником h , $\mathfrak{M}$ – непустой класс Фиттинга, причем t – минимальный ω -спутник класса Фиттинга $\omega LR(\mathfrak{M})$. Если $\mathfrak{F}$ является ω -локальным классом Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ обладает ω -спутником f таким, что

$$\begin{aligned} f(\omega') &= \mathfrak{F}, & f(p) &= \mathfrak{M} \diamond h(p), & \text{если } p &\in \omega \cap \pi(\mathfrak{H}), \\ f(p) &= t(p), & & \text{если } p &\in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H}). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – Ω К-классы Фиттинга, где m и h – внутренние Ω -спутники классов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ – Ω К-класс Фиттинга с Ω -спутником f таким, что

$$\begin{aligned} f(\Omega') &= \mathfrak{F}, & f(A) &= \mathfrak{M} \diamond h(A), & \text{если } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{H}), \\ f(A) &= m(A), & & \text{если } A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{H}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega KR(f)$, где f – Ω К-спутник, описанный в формулировке теоремы. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

1) Докажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим следующие случаи.

а) Если $\Omega \cap K(G) = \emptyset$, то $O^\Omega(G) = G \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$, из $A \in \Omega \cap K(G) = \emptyset$ следует, что $O^{A,A'}(G) \in f(A)$, и значит, $G \in \mathfrak{F}_1$. В дальнейшем полагаем, что $\Omega \cap K(G) \neq \emptyset$.

б) Пусть $A \in \Omega \cap K(G/G_{\mathfrak{M}})$. Так как $\mathfrak{G}_A \mathfrak{G}_{A'}$ является формацией и $\mathfrak{M}$ – классом Фиттинга, то в силу леммы 1.2 гл. 1 [9] и леммы 1.1 гл. 9 [8]

$$O^{A,A'}(G)/(O^{A,A'}(G))_{\mathfrak{M}} \cong O^{A,A'}(G/G_{\mathfrak{M}}).$$

Поскольку $G/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$, то $O^{A,A'}(G/G_{\mathfrak{M}}) \in h(A)$, и значит, $O^{A,A'}(G)/(O^{A,A'}(G))_{\mathfrak{M}} \in h(A)$, т.е.

$$O^{A,A'}(G) \in \mathfrak{M} \diamond h(A) = f(A).$$

с) Пусть

$$A \in [\Omega \cap K(G)] \setminus K(G/G_{\mathfrak{M}}).$$

Тогда $G/G_{\mathfrak{M}}$ является A' -группой и, значит, по лемме 11 [7] $O^{A,A'}(G) = O^{A,A'}(G_{\mathfrak{M}})$. Так как $G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$, то $O^{A,A'}(G_{\mathfrak{M}}) \in m(A)$, и следовательно, $O^{A,A'}(G) \in m(A)$. Нетрудно проверить, что в этом случае $O^{A,A'}(G) \in f(A)$.

Из б) и с) видим, что

$$O^{A,A'}(G) \in f(A) \quad \text{для любого } A \in \Omega \cap K(G).$$

Кроме того, так как $G \in \mathfrak{F}$, то $O^\Omega(G) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Отсюда $G \in \mathfrak{F}_1$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

2) Пусть $G \in \mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$ и G – группа минимального порядка с таким свойством. Тогда G – комонолитическая группа с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}}$, причем можно показать, что $M/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$ и G/M является Ω -группой. Пусть $G/M \cong A$. Рассмотрим следующие возможные случаи.

а) Пусть $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{H})$. Тогда $O^{A,A'}(G) \in f(A) = \mathfrak{M} \diamond h(A)$, т.е.

$$O^{A,A'}(G)/(O^{A,A'}(G))_{\mathfrak{M}} \in h(A).$$

Так как

$$O^{A,A'}(G)/(O^{A,A'}(G))_{\mathfrak{M}} \cong O^{A,A'}(G/G_{\mathfrak{M}}),$$

то $O^{A,A'}(G/G_{\mathfrak{M}}) \in h(A)$. Аналогично можно показать, что

$$O^{B,B'}(G/G_{\mathfrak{M}}) \in h(B) \quad \text{для любой } B \in \Omega \cap K(\mathfrak{H}) \cap K(G).$$

Поскольку $K(M/G_{\mathfrak{M}}) \subseteq K(\mathfrak{H})$ и $A \in K(\mathfrak{H})$, то $K(G/G_{\mathfrak{M}}) \subseteq K(\mathfrak{H})$, и значит,

$$O^{B,B'}(G/G_{\mathfrak{M}}) \in h(B) \quad \text{для любой } B \in \Omega \cap K(G/G_{\mathfrak{M}}).$$

Кроме того, так как $\mathfrak{G}_{\Omega}$ – формация, то в силу леммы 1.2 гл. 1 [9]

$$O^{\Omega}(G/G_{\mathfrak{M}}) \cong O^{\Omega}(G)/(O^{\Omega}(G))_{\mathfrak{M}}.$$

Поскольку $O^{\Omega}(G) \triangleleft M \in \mathfrak{F}$, то $O^{\Omega}(G)/(O^{\Omega}(G))_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$, и значит, ввиду леммы 11 [11]

$$O^{\Omega}(G/G_{\mathfrak{M}}) \in \mathfrak{H} = h(\Omega').$$

Отсюда $G/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$, и, следовательно, $G \in \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Противоречие.

б) Пусть $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{H})$. Тогда

$$O^{A,A'}(G) = O^A(G) \in f(A) = m(A).$$

Нетрудно показать, что $O^A(G) \subset G$. Поскольку $M/O^A(G) \triangleleft G/O^A(G) \in \mathfrak{G}_A$, то $M/O^A(G)$ является B' -группой для любой $B \in \Omega \cap K(G)$, $B \neq A$. Тогда

$$O^{B,B'}(M) = O^{B,B'}(O^A(G)).$$

Так как $O^A(G) \in m(A) \subseteq \mathfrak{M}$, то $O^{B,B'}(O^A(G)) \in m(B)$ для любой $B \in \Omega \cap K(O^A(G))$, $B \neq A$. Поскольку $M/O^A(G)$ – B' -группа, то

$$O^{B,B'}(O^A(G)) \in m(B) \quad \text{для любой } B \in \Omega \cap K(M), \quad B \neq A.$$

Аналогично из того, что G/M является B' -группой, получаем, что

$$O^{B,B'}(G) = O^{B,B'}(M) \in m(B) \quad \text{для любой } B \in \Omega \cap K(G), \quad B \neq A.$$

Поскольку $A \in \Omega$ и $O^A(G) \in \mathfrak{M}$, то ввиду леммы 7 [11] получаем

$$O^{\Omega}(G) = O^{\Omega}(M) = O^{\Omega}(O^A(G)) \in m(\Omega').$$

Следовательно,

$$G \in \Omega \text{KR}(m) = \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Значит, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Из 1) и 2) следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Следуя [3], класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем n -кратно Ω -каноническим, $n \geq 1$, если $\mathfrak{F} = \Omega \text{KR}(f)$, причем все непустые значения спутника f являются $(n-1)$ -кратно Ω -каноническими классами Фиттинга. Произвольный класс Фиттинга будем считать 0-кратно Ω -каноническим классом Фиттинга.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – n -кратно Ω -канонические классы Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ является n -кратно Ω -каноническим классом Фиттинга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по n . При $n = 0$ утверждение ввиду теоремы 1.12 гл. 9 [8] верно. При $n = 1$ справедливость следствия 4 вытекает из леммы 11 [11] теоремы 3. Пусть утверждение следствия 4 выполняется для любых натуральных чисел, меньших n , и $\mathfrak{M} = \Omega\text{KR}(m)$, $\mathfrak{H} = \Omega\text{KR}(h)$, причем все непустые значения спутников m и h суть $(n - 1)$ -кратно Ω -канонические классы Фиттинга. Ввиду леммы 11 [11] можем считать спутники m и h внутренними. Тогда по теореме 3 $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} - \Omega\text{K}$ -класс Фиттинга с Ω -спутником f таким, что

$$\begin{aligned} f(\Omega') &= \mathfrak{F}, & f(A) &= \mathfrak{M} \diamond h(A), & \text{если } A &\in \Omega \cap K(\mathfrak{H}), \\ f(A) &= m(A), & & \text{если } A &\in \Omega \setminus K(\mathfrak{H}). \end{aligned}$$

Так как $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ являются $(n - 1)$ -кратно Ω -каноническими классами Фиттинга, то по предположению индукции $\mathfrak{F}$ является $(n - 1)$ -кратно Ω -каноническим классом Фиттинга. Также по индукции заключаем, что $\mathfrak{M} \diamond h(p)$ является $(n - 1)$ -кратно Ω -каноническим классом Фиттинга. Таким образом, все непустые значения спутника f являются $(n - 1)$ -кратно Ω -каноническими классами Фиттинга. Тогда по определению 2 $\mathfrak{F}$ является n -кратно Ω -каноническим классом Фиттинга. Следствие доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шеметков Л. А. О произведении формаций // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 2. С. 101–103.
- [2] Шеметков Л. А. Экраны произведения формаций // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25. № 8. С. 677–680.
- [3] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. Препринт № 63. Гомель: ГГУ, 1997.
- [4] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
- [5] Еловигов А. Б. Кратно Ω -композиционные формации групп. Препринт № 3. Брянск: БГПУ, 1999.
- [6] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно $\mathfrak{L}$ -композиционные формации конечных групп // Укр. матем. ж. 2000. Т. 52. № 6. С. 783–797.
- [7] Ведерников В. А. Максимальные спутники Ω -расслоенных формаций и классов Фиттинга. Препринт № 1. Москва: МГПУ, 2001.
- [8] Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
- [9] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
- [10] Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω -веерные формации и классы Фиттинга конечных групп. Препринт № 6. Брянск: БГПУ, 1999.
- [11] Ведерников В. А., Сорокина М. М. Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. Препринт № 5. Брянск: БГПУ, 1999.