Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ш. Оманадзе, Мажорные множества, классы простых множеств и Q -полные множества, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 1, 100–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm331>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:36:22

УДК 510.5

МАЖОРНЫЕ МНОЖЕСТВА, КЛАССЫ ПРОСТЫХ МНОЖЕСТВ И Q -ПОЛНЫЕ МНОЖЕСТВА

Р. Ш. Оманадзе

Доказано, что каждое нерекурсивное рекурсивно перечислимое множество имеет Q -полное мажорное подмножество. Определены классы простых множеств, в которых существуют Q -полные множества.

Библиография: 16 названий.

В работе [1] Херрманом исследованы соотношения по включению между классами простых множеств, и на основе известных результатов разных авторов и самого Херрмана доказана классификационная теорема. Эта теорема вместе с теоремой 2 из [2] дает окончательную картину взаимного расположения некоторых классов простых множеств.

Из хорошо известной теоремы Деккера (см., например, [3, теорема XVI, с. 182]) и из леммы 1 из [4] следует, что существует Q -полное гиперпростое множество. В работах [5] и [6] доказано, что Q -полное множество может не быть гиперпростым. Поэтому естественно возникает вопрос: в каких классах простых множеств содержатся Q -полные множества? На этот вопрос в данной работе дается ответ для классов простых множеств, представленных в указанной выше классификационной теореме.

Все употребляемые без определения обозначения и понятия можно найти в [3].

Рекурсивно перечислимое (РП) подмножество B РП множества A называется *мажорным подмножеством* A ($B \subset_m A$), если $A \setminus B$ – бесконечное множество и для любого РП множества W

$$\overline{A} \subseteq^* W \implies \overline{B} \subseteq^* W.$$

(Для множеств X, Y мы пишем $X \subseteq^* Y$, если $X \setminus Y$ конечно.)

Лахлан [7] доказал, что каждое нерекурсивное РП множество имеет мажорное подмножество. С использованием теоремы Лахлана и теоремы 2 из [2] доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Каждое нерекурсивное РП множество A имеет мажорное подмножество B такое, что всякое надмножество C множества B , удовлетворяющее условию*

$$C \subset_m A,$$

является Q -полным.

Напомним, что множество A Q -сводится к множеству B ($A \leq_Q B$), если существует общерекурсивная функция (ОРФ) f такая, что

$$(\forall x)(x \in A \iff W_{f(x)} \subseteq B).$$

РП множество A называется Q -полным, если каждое РП множество Q -сводится к множеству A .

РП множество A с бесконечным дополнением называется *конечно строго гиперпростым*, если не существует ОРФ f такой, что

- 1) $(\forall x)(\forall y)(x \neq y \implies W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset)$;
- 2) $(\forall x)(W_{f(x)} \cap \overline{A} \neq \emptyset)$;
- 3) $(\forall x)(|W_{f(x)}| < \infty)$;
- 4) $\bigcup_{x \in \omega} W_{f(x)} = \omega$, где $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть A, B – нерекурсивные РП множества, $A \subset_m B$, f – одно-однозначная ОРФ, $\text{Val } f = B$ и $A_1 = f^{-1}(A)$. Тогда A_1 не является конечно строго гиперпростым множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что выполняются условия леммы. Согласно теореме 3 Лахлана [7] (см. также [3, теорема XX, с. 315]) $A \cup \overline{B}$ не является РП множеством. Тогда существует (см. [8, теорема 1, с. 200]) ОРФ g такая, что

- 1) $(\forall x)(\forall y)(x \neq y \implies W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset)$;
- 2) $(\forall x)(|W_{g(x)}| < \infty)$;
- 3) $(\forall x)(W_{g(x)} \cap (B \setminus A) \neq \emptyset)$;
- 4) $A \cup (\bigcup_{x \in \omega} W_{g(x)}) = B$.

Пусть f_1 – одно-однозначная ОРФ, $\text{Val } f_1 = A$ и α – ОРФ такая, что

$$(\forall x)(W_{\alpha(x)} = W_{g(x)} \cup \{f_1(x)\}).$$

Тогда существует (см. [3, с. 105] или [6]) ОРФ β такая, что

$$(\forall x)(\forall y)(x \neq y \implies W_{\beta(x)} \cap W_{\beta(y)} = \emptyset),$$

$$(\forall x)(W_{\beta(x)} \subseteq W_{\alpha(x)}),$$

$$\bigcup_{x \in \omega} W_{\beta(x)} = \bigcup_{x \in \omega} W_{\alpha(x)}.$$

Очевидно, что ОРФ β удовлетворяет условиям 1)–3) и

$$B = \bigcup_{x \in \omega} W_{\beta(x)}.$$

Пусть γ – ОРФ такая, что

$$(\forall x)(W_{\gamma(x)} = f^{-1}(W_{\beta(x)})).$$

Легко проверить, что ОРФ γ удовлетворяет условиям 1)–4) из определения конечно строго гиперпростого множества. Следовательно, A_1 не является конечно строго гиперпростым множеством. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть A – нерекурсивное РП множество, $E \subset_m A$, f – одно-однозначная ОРФ, $\text{Val } f = A$ и $E_1 = f^{-1}(E)$. Согласно лемме 1 E_1 не может быть конечно строго гиперпростым множеством. Тогда в силу теоремы 2 из [2] существует РП множество F , $E_1 \subseteq F$, такое, что всякое РП надмножество множества F с бесконечным дополнением является Q -полным. Поэтому для завершения доказательства теоремы 1 достаточно в качестве B взять множество $f(F)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Известно (см. [6] и [9]), что класс Q -полных РП множеств совпадает с классом эффективно ускоряемых множеств.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для каждого нерекурсивного РП множества M существуют РП подмножества A, B, A_1 и B_1 такие, что

- 1) $A \subset_m B \subset_m M$ и A не является Q -полным, а B является Q -полным;
- 2) $A_1 \subset_m B_1 \subset_m M$ и A_1, B_1 – Q -полные множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть M – нерекурсивное РП множество и A – мажорное подмножество множества M , которое не является Q -полным. Такое множество существует по теореме 1.1 из [10]. Тогда по теореме 3 из [7] $M \setminus A$ не может быть гипергипериммунным множеством. Поэтому существует ОРФ f такая, что

$$\begin{aligned} (\forall x)(W_{f(x)} \cap (M \setminus A) \neq \emptyset), \\ (\forall x)(\forall y)(x \neq y \implies W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset). \end{aligned}$$

Без ограничения общности можно считать, что $(\forall x)(W_{f(x)} \subseteq M)$, иначе вместо f взяли бы g такую, что $(\forall x)(W_{g(x)} = M \cap W_{f(x)})$.

Для завершения доказательства пункта 1) достаточно рассмотреть в качестве B множество

$$A \cup \left(\bigcup_{x \in K} W_{f(x)} \right),$$

где K – креативное множество.

2) Аналогично, для доказательства пункта 2) допустим, что A_1 есть Q -полное мажорное подмножество множества M , а

$$B_1 = A_1 \cup \left(\bigcup_{x \in K} W_{f(x)} \right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Для каждого максимального множества M существуют r -максимальные Q -полные множества A, B такие, что $A \subset_m B \subset_m M$ и $A \not\leq_m B$ & $B \not\leq_m A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что мажорное подмножество максимального множества является r -максимальным. Дёгтев [11] показал, что если A – r -максимальное множество, B – РП множество, $A \subset B$, $B \setminus A$ и $\overline{B}$ – бесконечные множества, то $A \not\leq_m B$ & $B \not\leq_m A$. Согласно утверждению 2) следствия 1 существуют Q -полные подмножества A, B множества M такие, что $A \subset_m B \subset_m M$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть A – T -полное РП множество, H – гипергиперпростое множество, $A \subset_m H$, f – одно-однозначная ОРФ, $\text{Val } f = A$, $B = \{x : (\exists y)(x < y \ \& \ f(y) \leq f(x))\}$. Тогда $A \cup B =^* \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что $\overline{B}$ – ретрассируемое множество и $A \equiv_T B$. В силу леммы 1 из [4] B – Q -полное множество, а согласно лемме Арсланова [12] всякое РП надмножество множества B с бесконечным дополнением является Q -полным. Поэтому в силу теоремы 10 из [5] $B \not\subseteq H$ и $H \not\subseteq B$. Следовательно, $\overline{H} \subseteq^* B$ (в противном случае $B \cup H$ будет Q -полным гипергиперпростым, что невозможно). Но по условию $A \subset_m H$, поэтому $\overline{A} \subseteq^* B$ и $A \cup B =^* \omega$. Предложение доказано.

Для каждого множества $A \subseteq \omega$ обозначим через $L(A)$ множество всех РП надмножеств множества A , а через $L_r(A)$ множество $\{A \cup R : R \text{ – рекурсивное множество}\}$.

Класс $\mathcal{A}$ подмножеств множества ω называется *кофинальным* [1], если для каждого РП множества A с бесконечным дополнением существует множество $B \in \mathcal{A}$ такое, что $A \subseteq B$.

Говорят, что РП множество A с бесконечным дополнением имеет *кофинальные гипергиперпростые надмножества* [1], если класс гипергиперпростых множеств является кофинальным в $L(A)$.

В дальнейшем мы будем придерживаться следующих обозначений:

- Мах – класс максимальных множеств;
- Q -Мах – класс квазимаксимальных множеств;
- R -Мах – класс r -максимальных множеств;
- HH – класс гипергиперпростых множеств;
- MS_{HH} – класс мажорных подмножеств гипергиперпростых множеств;
- MS_{HH}^1 – класс $MS_{HH} \cup HH$;
- SH – класс РП множеств с кофинальными гипергиперпростыми надмножества;
- $HH_{\approx_r}$ – класс гипергиперпростых множеств по $(\text{mod}_{\approx_r})$;
- sHS – класс строго гиперпростых множеств;
- $fsHS$ – класс конечно строго гиперпростых множеств;
- DS – класс плотно простых множеств;
- HS – класс гиперпростых множеств;
- S – класс простых множеств.

Определения всех этих классов простых множеств можно найти в [1] и [3].

Для приведенных выше классов простых множеств имеем следующую диаграмму (см. рис. 1) взаимного расположения. (Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – классы множеств, то $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ обозначает, что $\mathcal{A}$ есть подкласс класса $\mathcal{B}$.)

КЛАССИФИКАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА (см. [1], [2, теорема 2]). *Имеют место следующие утверждения.*

- 1) Все включения в приведенной выше диаграмме справедливы и являются собственными.
- 2) Другие включения между этими классами не выполняются.

В работе [1] дана следующая характеристика класса $HH_{\approx_r}$. Пусть A – РП множество с бесконечным дополнением. Тогда $A \in HH_{\approx_r}$ тогда и только тогда, когда

$$(\forall X \in L(A))(\exists Y \in L_r(A))(Y \subset_m X \vee Y =^* X).$$

Рис. 1

Пусть f – ОРФ и D_x – конечное множество с каноническим индексом x . Говорят, что f определяет сильную таблицу $\{D_{f(x)}\}_{x \in \omega}$, если

$$(\forall x)(\forall y)(x \neq y \implies D_{f(x)} \cap D_{f(y)} = \emptyset).$$

Обозначим через $A \oplus B$ множество $\{2x : x \in A\} \cup \{2x + 1 : x \in B\}$. Пусть $\mathcal{K} = \{DS, sHS, fsHS, SH, HH_{\approx_r}, MS^1_{HH}\}$.

ЛЕММА 2. Для любого $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ и для любых $A, B \in S$ имеем

$$A, B \in \mathfrak{A} \iff A \oplus B \in \mathfrak{A}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно покажем, что если $C \in HH_{\approx_r}$, то $C \oplus C \in HH_{\approx_r}$. Пусть $X \in L(C \oplus C)$. Тогда $C \subseteq \{x : 2x \in X\}$ и $C \subseteq \{x : 2x + 1 \in X\}$. Так как $C \in HH_{\approx_r}$, то существуют $Y_1, Y_2 \in L_r(C)$ такие, что $Y_1 \subset_m \{x : 2x \in X\}$ или $Y_1 =^* \{x : 2x \in X\}$ и $Y_2 \subset_m \{x : 2x + 1 \in X\}$ или $Y_2 =^* \{x : 2x + 1 \in X\}$.

Рассмотрим отдельно все возможные случаи.

1. $Y_1 \subset_m \{x : 2x \in X\}$ и $Y_2 \subset_m \{x : 2x + 1 \in X\}$. Тогда $Y_1 \oplus Y_2 \subset_m X$. Действительно, если для некоторого РП множества W $X \cup W = \omega$, то $Y_1 \cup \{x : 2x \in W\} =^* \omega$ и $Y_2 \cup \{x : 2x + 1 \in W\} =^* \omega$. Отсюда $Y_1 \oplus Y_2 \cup W =^* \omega$.

2. $Y_1 =^* \{x : 2x \in X\}$ и $Y_2 =^* \{x : 2x + 1 \in X\}$. Тогда $Y_1 \oplus Y_2 =^* X$.

3. $Y_1 \subset_m \{x : 2x \in X\}$ и $Y_2 =^* \{x : 2x + 1 \in X\}$. Тогда $Y_1 \oplus Y_2 \subset_m X$. Действительно, пусть для некоторого РП множества W $X \cup W = \omega$. Тогда имеем $Y_1 \cup \{x : 2x \in W\} =^* \omega$ и $Y_2 \cup \{x : 2x + 1 \in W\} =^* \omega$. Отсюда $Y_1 \oplus Y_2 \cup W =^* \omega$, т.е. $Y_1 \oplus Y_2 \subset_m X$. Очевидно, что если $Y_1, Y_2 \in L_r(C)$, то $Y_1 \oplus Y_2 \in L_r(C \oplus C)$.

Для остальных классов из $\mathcal{K}$ легко проверяется, что если множество C принадлежит некоторому из этих классов, то $C \oplus C$ принадлежит этому же классу. Известно

(см. [1] и [12]), что для любого $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ $\mathfrak{A}$ замкнут относительно конечных пересечений и простых надмножеств. Поэтому допустим, что $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ и $A, B \in \mathfrak{A}$. Тогда $A \cap B \in \mathfrak{A}$ и $(A \cap B) \oplus (A \cap B) \in \mathfrak{A}$; $(A \cap B) \oplus (A \cap B) \subseteq A \oplus B$, поэтому $A \oplus B \in \mathfrak{A}$.

Обратную импликацию будем доказывать для каждого класса из $\mathcal{K}$ в отдельности.

1. Пусть $A, B \in S$, $A \oplus B \in DS$ и $A \notin DS$. Согласно результатам Робинсона [13] бесконечное множество X является плотно иммунным тогда и только тогда, когда для любой сильной таблицы $\{D_{f(x)}\}_{x \in \omega}$ существует число $n \in \omega$ такое, что для любого $m \geq n$ $D_{f(m)} \cap X$ содержит менее чем m элементов. Поэтому для множества A существует сильная таблица $\{D_{f(x)}\}_{x \in \omega}$ такая, что

$$(\exists \bar{m})^\infty (D_{f(m)} \cap \bar{A} \text{ содержит по крайней мере } m \text{ элементов}),$$

где символом $\exists \bar{m}^\infty$ обозначается выражение “существует бесконечно много m ”.

Рассмотрим сильную таблицу $\{D_{g(m)}\}_{m \in \omega}$, где

$$(\forall m)(D_{g(m)} = \{2x : x \in D_{f(m)}\}).$$

Тогда

$$(\exists \bar{m})^\infty (D_{g(m)} \cap \overline{A \oplus B} \text{ содержит по крайней мере } m \text{ элементов}).$$

Следовательно, $A \oplus B \notin DS$. Полученное противоречие доказывает, что $A \in DS$.

2. Пусть $A, B \in S$, $A \oplus B \in sHS$ и $A \notin sHS$. Тогда существует ОРФ f такая, что

- 1) $(\forall x)(W_{f(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset)$;
- 2) $(\forall x)(\forall y)(x \neq y \implies W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset)$;
- 3) $\bigcup_{x \in \omega} W_{f(x)} = \omega$.

Определим ОРФ g равенством

$$W_{g(x)} = \{2y : y \in W_{f(x)}\} \cup \{2y + 1 : y \in W_{f(x)}\}.$$

Тогда существование функции g доказывает, что $A \oplus B \notin sHS$. Противоречие. Поэтому $A \in sHS$.

Точно так же доказывается, что если $A, B \in S$ и $A \oplus B \in fsHS$, то $A, B \in fsHS$.

3. Пусть $A, B \in S$, $A \oplus B \in SH$ и $A \notin SH$. Допустим, что C – РП множество, $A \subseteq C$, $\bar{C}$ бесконечно и C не содержится в гипергиперпростом множестве. Тогда $A \oplus B \subseteq C \oplus B$ и $C \oplus B \subseteq H$, где H – гипергиперпростое множество. Отсюда имеем $A \subseteq C \subseteq C_1 = \{x : 2x \in H\}$. Очевидно, что C_1 не является гипергиперпростым множеством. Поэтому существует ОРФ f такая, что

$$\begin{aligned} &(\forall x)(W_{f(x)} \cap \bar{C}_1 \neq \emptyset), \\ &(\forall x)(\forall y)(x \neq y \implies W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset). \end{aligned}$$

Определим ОРФ g равенством

$$W_{g(x)} = \{2y : y \in W_{f(x)}\}.$$

Тогда существование функции g противоречит гипергиперпростоте множества H . Полученное противоречие доказывает, что если $A \oplus B \in SH$, то $A, B \in SH$.

4. Пусть $A, B \in S$, $A \oplus B \in HH_{\approx_r}$ и $A \notin HH_{\approx_r}$. Тогда

$$(\exists X \in L_r(A))(\forall Y \in L_r(A))(Y \not\subset_m X \text{ \& } Y \neq^* X) \quad \text{и} \quad A \oplus B \subseteq X \oplus B. \quad (*)$$

Поэтому

$$(\exists Y_1 \in L_r(A \oplus B))(Y_1 \subset_m X \oplus B \vee Y_1 =^* X \oplus B).$$

Рассмотрим отдельно эти случаи.

Пусть $Y_1 = A \oplus B \cup R$, где R – рекурсивное множество. Если $Y_1 =^* X \oplus B$, то $\{x : 2x \in Y_1\} =^* X$. Обозначим через R_1 множество $\{x : 2x \in R\}$. Тогда $A \cup R_1 =^* X$, что противоречит соотношению (*).

Пусть

$$Y_1 = A \oplus B \cup R \subset_m X \oplus B, \quad Y_2 = \{x : 2x \in A \oplus B \cup R\} = A \cup R_1. \quad (**)$$

Если $Y_2 = A \cup R_1 =^* X$, то опять получается противоречие. Допустим, что $|X \setminus (A \cup R_1)| = \infty$, и покажем, что $A \cup R_1 \subset_m X$.

Пусть $X \cup W = \omega$, где W – РП множество. Тогда

$$X \oplus B \cup W \oplus W \cup \{2x + 1 : x \in X\} = \omega.$$

Отсюда и из соотношения (**) получаем, что

$$A \oplus B \cup R \cup W \oplus W \cup \{2x + 1 : x \in X\} =^* \omega.$$

Но из этого следует, что $A \cup R_1 \cup W =^* \omega$. Итак, получили, что если $A \oplus B \in HH_{\approx_r}$, то $A, B \in HH_{\approx_r}$.

5. Пусть $A, B \in S$ и $A \oplus B \in MS_{HH}^1$. Если $A \oplus B \in HH$, то в силу леммы 3 из [15] $A, B \in HH$. Допустим, что $A \oplus B \subset_m B_1$, где B_1 – гипергиперпростое множество; $A \subset A'_1 = \{x : 2x \in B_1\}$ и $B \subset B'_1 = \{x : 2x + 1 \in B\}$. Очевидно, что $A'_1, B'_1 \in HH$. Если $A =^* A'_1$, то $A \in MS_{HH}^1$. Пусть $|A'_1 \setminus A| = \infty$. Покажем, что $A \subset_m A'_1$. Допустим, что для некоторого РП множества W $A'_1 \cup W = \omega$. Тогда $A'_1 \oplus B'_1 \cup W \oplus W \cup \{2x + 1 : x \in A\} = \omega$. Отсюда $A \oplus B \cup W \oplus W \cup \{2x + 1 : x \in A\} = \omega$. Тогда $A \cup W =^* \omega$, т.е. $A \in MS_{HH}^1$. Аналогично проверяется, что $B \in MS_{HH}^1$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. 1) $(\exists A)(A - Q\text{-полное} \text{ \& } A \in S \setminus HS)$.

2) $(\exists A)(A - Q\text{-полное} \text{ \& } A \in HS \setminus (DS \cup fsHS))$.

3) $(\exists A)(A - Q\text{-полное} \text{ \& } A \in DS \setminus fsHS)$.

4) $(\exists A)(A - Q\text{-полное} \text{ \& } A \in fsHS \setminus (SH \cup sHS))$.

5) $(\exists A)(A - Q\text{-полное} \text{ \& } A \in SH \setminus sHS)$.

6) $(\exists A)(A - Q\text{-полное} \text{ \& } A \in sHS \setminus HH_{\approx_r})$.

7) $(\exists A)(A - Q\text{-полное} \text{ \& } A \in HH_{\approx_r} \setminus (MS_{HH}^1 \cup R\text{-Max}))$.

8) $(\exists A)(A - Q\text{-полное} \text{ \& } A \in R\text{-Max})$.

9) $(\exists A)(A - Q\text{-полное} \text{ \& } A \in MS_{HH}^1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Известно [3, с. 207], что гиперпростое множество не может быть W -полным и существует C -полное простое множество A . Поэтому A является искомым множеством.

2) Пусть B – Q -полное гиперпростое множество с ретрассируемым дополнением (такое существует). Тогда $B \notin fsHS$, так как известно [16], что конечно строго гиперпростое множество не имеет ретрассируемого дополнения. Рассмотрим множество $B \oplus C$, где $C \in HS \setminus DS$. Тогда $B \oplus C$ является Q -полным множеством и в силу леммы 2 $B \oplus C \in HS \setminus (DS \cup fsHS)$.

3) Известно, что если B – W -полное РП множество, f – одно-однозначная ОРФ, $Val f = B$, то множество $C = \{x : (\exists y)(y > x \ \& \ f(y) \leq f(x))\}$ является плотно простым множеством с ретрассируемым дополнением; $B \equiv_T C$. Поэтому по лемме 1 из [4] множество C Q -полно. С другой стороны, конечно строго гиперпростое множество не имеет ретрассируемого дополнения. Следовательно, $C \notin fsHS$.

4) Пусть $B \in fsHS \setminus SH$. Без ограничения общности допустим, что B не содержится в гипергиперпростом множестве. Тогда в силу теоремы 10 из [5] существует Q -полное множество B_1 такое, что $B \subseteq B_1$ и B_1 не содержится в гипергиперпростом множестве. Поэтому $B_1 \notin SH$. Пусть $B_2 \in fsHS \setminus sHS$. Тогда $B_1 \oplus B_2$ является Q -полным и в силу леммы 2 $B_1 \oplus B_2 \in fsHS \setminus (SH \cup sHS)$.

5) Пусть $A_1 \in SH \setminus sHS$, B – Q -полное мажорное подмножество множества A_1 . Тогда $B \in SH \setminus sHS$. Если $B \subset C$, $|A_1 \setminus C| = \infty$ и $C \cup A_1 =^* \omega$, то $B \cup C =^* \omega$. Поэтому невозможно, чтобы $|A_1 \setminus C| = \infty$ и $C \cup A_1 =^* \omega$.

6) Пусть $A_1 \in sHS \setminus HH_{\approx_r}$ и $A_1 \subseteq B$, где B – Q -полное РП множество (такое существует по теореме 10 из [5] или по теореме 5 из [6]). Тогда $A_1 \oplus B$ является Q -полным и в силу леммы 2 $A_1 \oplus B \in sHS \setminus HH_{\approx_r}$.

7) Пусть $A_1 \in HH_{\approx_r} \setminus MS_{HH}^1$, $B \in HH_{\approx_r} \setminus R\text{-Max}$. Тогда

$$A_1 \oplus B \in HH_{\approx_r} \setminus (MS_{HH}^1 \cup R\text{-Max}).$$

Действительно, в силу леммы 2 $A_1 \oplus B \in HH_{\approx_r} \setminus MS_{HH}^1$ и нетрудно проверить, что если $A_1 \oplus B \in R\text{-Max}$, то $A_1, B \in R\text{-Max}$.

Пусть $C = A_1 \oplus B$, E – Q -полное РП множество и $C \subseteq E$ (такое существует по теореме 10 из [5] или по теореме 5 из [6]). Тогда $C \oplus E$ – Q -полное множество и по лемме 2 $C \oplus E \in HH_{\approx_r}$ и $C \oplus E \notin MS_{HH}^1$. Если $C \oplus E \in R\text{-Max}$, то $C, E \in R\text{-Max}$. Поэтому $C \oplus E \notin R\text{-Max}$.

8) и 9) непосредственно вытекают из теоремы 1 и из того, что мажорное подмножество r -максимального множества является r -максимальным. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Herrmann E. Classes of simple sets, filter properties, and their mutual position // Seminarber. Humbolt-Univ. Berlin. Sect. Math. 1984. № 60. P. 60–72.
- [2] Оманадзе Р. III. Классы рекурсивно перечислимых множеств и Q -сводимость // Матем. заметки. 1989. Т. 45. № 2. С. 79–82.
- [3] Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
- [4] Марченков С. С. Об одном классе неполных множеств // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 4. С. 473–478.

- [5] Соловьев В. Д. Q -сводимость и гипергиперпростые множества // Вероятностные методы и кибернетика. Вып. 10–11. Казань: КазГУ, 1974. С. 121–128.
- [6] Gill J. T., Morris P. H. On subcreative sets and S -reducibility // J. Symb. Logic. 1974. V. 39. № 4. P. 669–677.
- [7] Lachlan A. H. On the lattice of recursively enumerable sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 130. № 1. P. 1–37.
- [8] Herrmann E. Die Verbandseigenschaften der rekursiv aufzählbaren Mengen // Seminarber. Humbolt-Univ. Berlin. Sect. Math. 1981. № 36.
- [9] Blum M., Marques I. On complexity properties of recursively enumerable sets // J. Symb. Logic. 1973. V. 38. № 4. P. 579–593.
- [10] Lerman M. Some theorems of r -maximal sets and major subsets of recursively enumerable sets // J. Symb. Logic. 1971. V. 36. P. 193–215.
- [11] Дёгтев А. Н. Об m -степенях простых множеств // Алгебра и логика. 1972. Т. 11. № 2. С. 130–139.
- [12] Арсланов М. М. Об одном классе гиперпростых неполных множеств // Матем. заметки. 1985. Т. 38. № 6. С. 872–874.
- [13] Дёгтев А. Н. Некоторые классы гипериммунных множеств // Алгебраические системы. Иркутск, 1976. С. 21–36.
- [14] Robinson R. W. Simplicity of recursively enumerable sets // J. Symb. Logic. 1967. V. 32. № 2. P. 162–172.
- [15] Морозов А. С. Об одном классе рекурсивно перечислимых множеств // Сиб. матем. ж. 1987. Т. 23. № 2. С. 124–128.
- [16] Дёгтев А. Н. Наследственные множества и табличная сводимость // Алгебра и логика. 1972. Т. 11. № 3. С. 257–269.

Тбилисский государственный университет им. И. А. Джавахишвили
Институт прикладной математики им. И. Н. Векуа
E-mail: omanr@viam.hepi.edu.ge

Поступило
31.03.1998
Исправленный вариант
01.02.2001