Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Романюк, Приближение классов периодических функций многих переменных, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 1, 109–121

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm332>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:02:35

УДК 517.5

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. С. Романюк

Изучается приближение классов периодических функций многих переменных $B_{p,\theta}^r$ и $W_{p,\alpha}^r$ кратными суммами Фурье фиксированного порядка, построенными с учетом индивидуальных свойств функций из этих классов. Такой выбор аппроксимирующих агрегатов в ряде случаев позволяет добиться лучшего порядка приближения указанных классов по сравнению с их приближением ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье.

Библиография: 10 названий.

В работе рассматриваются так называемые ортогональные тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных $B_{p,\theta}^r$ и $W_{p,\alpha}^r$ в пространстве L_q . Величины, о которых идет речь, являются частным случаем наилучших M -членных тригонометрических приближений (см. [1], [2]), которые особенно интенсивно исследуются в последнее время.

Приведем необходимые в дальнейшем обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_d)$ и $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$; $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi; \pi]$, обозначает множество функций $f(x)$, 2π -периодических по каждой переменной, таких, что

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Всюду ниже предполагаем, что для $f(x) \in L_p(\pi_d)$ выполнено условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

Для векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, и $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$, положим $\rho(s) = \{k: 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}\}$ и для $f(x) \in L_p(\pi_d)$ обозначим

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k, x)},$$

где $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k, t)} dt$ — коэффициенты Фурье $f(x)$.

Пусть $1 < p < \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, d$. Тогда классы Бесова $B_{p,\theta}^r$ определяются следующим образом (см., например, [3]):

$$B_{p,\theta}^r = \left\{ f(x) \mid \|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\}$$

при $1 \leq \theta < \infty$ и

$$B_{p,\infty}^r = \{f(x) \mid \|f\|_{B_{p,\infty}^r} = \sup_s 2^{(s,r)} \|\delta_s(f, x)\|_p \leq 1\}.$$

Напомним, что классы $B_{p,\infty}^r$ совпадают с классами H_p^r (см. [1, с. 31]), которые являются аналогами известных классов Никольского (см. [4, с. 189]). Параллельно нами будут исследоваться также классы $W_{p,\alpha}^r$. Напомним их определение (см., например, [1, с. 31]).

Пусть $F_r(x, \alpha)$ обозначают многомерные аналоги ядер Бернулли, т.е.

$$F_r(x, \alpha) = 2^d \sum_k \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \quad r_j > 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

и в сумме участвуют только те векторы k , для которых $k_j > 0$, $j = 1, \dots, d$. Обозначим $W_{p,\alpha}^r$ класс функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \varphi(x) * F_r(x, \alpha) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \varphi(y) F_r(x - y, \alpha) dy,$$

где $\varphi(x) \in L_p(\pi_d)$, $\|\varphi\|_p \leq 1$.

В дальнейшем, не умаляя общности, будем считать, что координаты вектора $r = (r_1, \dots, r_d)$ упорядочены в виде: $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_d$. Вектору $r = (r_1, \dots, r_d)$ будем сопоставлять вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$, $\gamma_j = r_j/r_1$, $j = 1, \dots, d$, которому, в свою очередь, сопоставляется вектор $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_d)$, где $\gamma_j = \gamma'_j$ при $j = 1, \dots, \nu$ и $1 < \gamma'_j < \gamma_j$, $j = \nu + 1, \dots, d$. Если A – конечное множество, то через $|A|$ будем обозначать количество его элементов.

Пусть Ω_M – произвольный набор из M d -мерных векторов $k^1, \dots, k^M$ с целочисленными координатами и $T(\Omega_M, x)$ – подпространство тригонометрических полиномов, порожденное системой экспонент $\{e^{i(k^j, x)}\}_{j=1}^M$. Полагая для $f(x) \in L_p(\pi_d)$ $S_M(f, x) = P(f, T(\Omega_M, x))$, где $P(f, T(\Omega_M, x))$ – ортогональная проекция $f(x)$ на $T(\Omega_M, x)$, рассмотрим величину

$$e_M^\perp(f)_q = \inf_{\{k^j\}} \|f(x) - S_M(f, x)\|_q.$$

Если $K \subset L_p(\pi_d)$ – некоторый класс функций, то полагаем

$$e_M^\perp(K)_q = \sup_{f \in K} e_M^\perp(f)_q. \quad (1)$$

Отметим, что в том случае, когда $K = W_{p,\alpha}^r$, величины (1) для некоторых соотношений между параметрами p и q исследовались в [5].

Все приводимые ниже результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. При этом функции $\mu_1(\mathbb{N})$ и $\mu_2(\mathbb{N})$ называем *функциями одного порядка* и пишем $\mu_1 \asymp \mu_2$, если существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что $C_1 \mu_2(\mathbb{N}) \leq \mu_1(\mathbb{N}) \leq C_2 \mu_2(\mathbb{N})$. Аналогичным образом определяются порядковые неравенства $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_1 \gg \mu_2$. Отметим, что ниже постоянные C_i , $i = 1, 2, \dots$, могут зависеть только от параметров, определяющих классы, метрики L_q и размерности пространства $\mathbb{R}^d$.

Теперь перейдем к изложению полученных результатов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 < p < q < \infty$, $r_1 > 1/p - 1/q$. Тогда при $1 \leq \theta \leq \infty$ имеет место порядковое соотношение

$$e_M^{\frac{1}{p}}(B_{p,\theta}^r)_q \asymp M^{-(r_1-1/p+1/q)}(\log^{\nu-1} M)^{(r_1-1/p+2/q-1/\theta)_+}, \quad (2)$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим сначала в (2) оценку сверху. Предварительно заметим, что в случае $\theta \geq q$ требуемая оценка сверху следует из соответствующей оценки приближения класса $B_{p,\theta}^r$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье

$$S_n^\gamma(f, x) = \sum_{(s,\gamma) < n} \delta_s(f, x)$$

(см. [6, теорема 2]), если M и n связаны соотношением $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Таким образом, ниже при установлении оценки сверху будем предполагать, что $\theta \in [1, q)$.

Итак, пусть $f(x) \in B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < q$. По числу M подберем $n \in \mathbb{N}$ из соотношения $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ и положим $n_0 = [n + (\nu - 1) \log n]$, где $[a]$ – целая часть числа a . Полином $S_M(f, x)$, доставляющий для $f(x) \in B_{p,\theta}^r$ требуемую оценку приближения, будем подбирать в виде

$$S_M(f, x) = \sum_{(s,\gamma) < n} \delta_s(f, x) + R(x),$$

где $R(x)$ – некоторый полином, к построению которого мы и перейдем.

Каждому натуральному числу l , $n \leq l < n_0$, сопоставим величину

$$S_l = \left(\sum_{l \leq (s,\gamma) < l+1} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \quad (3)$$

и положим

$$m_l = [2^n n^{\nu-1} 2^{-l} S_l^\theta] + 1. \quad (4)$$

Далее, пусть $\alpha_i(f, l)$, $i = 1, 2, \dots$, обозначают числа $\|\delta_s(f, x)\|_p$, входящие в (3), упорядоченные в порядке убывания. Заметим, что из (3) следует соотношение

$$\alpha_i(f, l) \ll i^{-1/\theta} 2^{-lr_1} S_l.$$

Теперь из суммы $\sum_{l \leq (s,\gamma) < l+1} \delta_s(f, x)$ выберем те m_l “блоков” $\delta_s(f, x)$, которым соответствуют первые m_l чисел $\alpha_i(f, l)$. Проделав эту процедуру для каждого $l \in [n, n_0]$, $l \in \mathbb{N}$, получим набор “блоков” $\delta_s(f, x)$, которые образуют некоторый полином. Этот полином мы и обозначим $R(x)$.

Нетрудно убедиться, что в таком случае количество гармоник L , содержащихся в $S_M(f, x)$, не превышает по порядку M .

Действительно, в силу соотношения

$$\sum_{(s,\gamma) < n} 2^{(s,1)} \ll 2^n n^{\nu-1}$$

(см. [1, с. 11]) и выбора чисел m_l будем иметь

$$\begin{aligned} L &\ll 2^n n^{\nu-1} + \sum_{l=n}^{n_0} 2^l m_l \ll 2^n n^{\nu-1} + 2^n n^{\nu-1} \sum_{l=n}^{n_0} \sum_{l \leq (s, \gamma) < l+1} 2^{(s, r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \\ &\ll 2^n n^{\nu-1} + 2^n n^{\nu-1} \|f\|_{B_{p, \theta}^r}^\theta \ll 2^n n^{\nu-1} \asymp M. \end{aligned}$$

Осталось убедиться, что полином $S_M(f, x)$ доставляет требуемую оценку приближения для $f(x) \in B_{p, \theta}^r$.

Пусть D_f обозначает множество тех векторов s : $n \leq (s, \gamma) < n_0$, для которых “блоки” $\delta_s(f, x)$ не попали в $R(x)$. Тогда для $f(x) \in B_{p, \theta}^r$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|f(x) - S_M(f, x)\|_q &= \left\| f(x) - \sum_{(s, \gamma) < n_0} \delta_s(f, x) + \sum_{s \in D_f} \delta_s(f, x) \right\|_q \\ &\leq \left\| f(x) - \sum_{(s, \gamma) < n_0} \delta_s(f, x) \right\|_q + \left\| \sum_{s \in D_f} \delta_s(f, x) \right\|_q = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно теореме 2 из [6] и выбору числа n_0 имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &\ll 2^{-n_0(r_1-1/p+1/q)} \leq 2^{-n(r_1-1/p+1/q)} n^{-(\nu-1)(r_1-1/p+1/q)} \\ &\asymp M^{-(r_1-1/p+1/q)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для оценки $\mathcal{J}_2$ воспользуемся соотношением [1, с. 25]

$$\|f\|_q \ll \left\{ \sum_s (\|\delta_s(f, x)\|_p 2^{\|s\|_1(1/p-1/q)q})^q \right\}^{1/q}, \quad 1 < p < q < \infty, \quad \text{и} \quad f(x) \in L_q(\pi_d). \quad (7)$$

В силу выбора чисел $\alpha_i(f, l)$ и их оценок, а также оценки (7) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &\ll \left\{ \sum_{l=n}^{n_0} \sum_{i>m_l} \alpha_i^q(f, l) 2^{l(1/p-1/q)q} \right\}^{1/q} \\ &= \left\{ \sum_{l=n}^{n_0} \sum_{i>m_l} \alpha_i^\theta(f, l) \alpha_i^{q-\theta}(f, l) 2^{l(1/p-1/q)q} \right\}^{1/q} \\ &\ll \left\{ \sum_{l=n}^{n_0} \sum_{i>m_l} \alpha_i^\theta(f, l) i^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(q-\theta)r_1} S_l^{q-\theta} 2^{l(1/p-1/q)q} \right\}^{1/q} \\ &\leq \left\{ \sum_{l=n}^{n_0} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(q-\theta)r_1} S_l^{q-\theta} 2^{l(1/p-1/q)q} \sum_{i>m_l} \alpha_i^\theta(f, l) \right\}^{1/q} \\ &\ll \left\{ \sum_{l=n}^{n_0} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(q-\theta)r_1} S_l^{q-\theta} 2^{l(1/p-1/q)q} \sum_{l \leq (s, \gamma) < l+1} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right\}^{1/q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ll \left\{ \sum_{l=n}^{n_0} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(q-\theta)r_1} S_l^q 2^{l(1/p-1/q)q} 2^{-l\theta r_1} \right. \\
& \quad \times \left. \sum_{l \leq (s, \gamma) < l+1} 2^{(s, r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right\}^{1/q} \\
& \ll \left\{ \sum_{l=n}^{n_0} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(r_1-1/p+1/q)q} S_l^q S_l^\theta \right\}^{1/q} \\
& = \left\{ \sum_{l=n}^{n_0} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(r_1-1/p+1/q)q} S_l^q \right\}^{1/q}. \tag{8}
\end{aligned}$$

Теперь, подставив в (8) вместо m_l их соответствующие значения, продолжим оценку:

$$\begin{aligned}
& \ll (2^n n^{\nu-1})^{1/q-1/\theta} \left(\sum_{l=n}^{n_0} 2^{l(q-\theta)/\theta} S_l^\theta 2^{-l(r_1-1/p+1/q)q} S_l^q \right)^{1/q} \\
& = (2^n n^{\nu-1})^{1/q-1/\theta} \left(\sum_{l=n}^{n_0} S_l^\theta 2^{-l(r_1-1/p+1/q)q} 2^{lq(1/\theta-1/q)} \right)^{1/q} \\
& = (2^n n^{\nu-1})^{1/q-1/\theta} \left(\sum_{l=n}^{n_0} 2^{-lq(r_1-1/p+2/q-1/\theta)} S_l^\theta \right)^{1/q} = (2^n n^{\nu-1})^{1/q-1/\theta} \mathcal{J}_3. \tag{9}
\end{aligned}$$

Для оценки $\mathcal{J}_3$ рассмотрим два случая:

- а) $r_1 \geq 1/p - 2/q + 1/\theta$;
- б) $1/p - 1/q < r_1 < 1/p - 2/q + 1/\theta$.

Итак, пусть имеет место случай а). Тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_3 & \leq 2^{-n(r_1-1/p+2/q-1/\theta)} \left(\sum_{l=n}^{n_0} S_l^\theta \right)^{1/q} \\
& = 2^{-n(r_1-1/p+2/q-1/\theta)} \left(\sum_{l=n}^{n_0} \sum_{l \leq (s, \gamma) < l+1} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta 2^{(s, r)\theta} \right)^{1/q} \\
& \ll 2^{-n(r_1-1/p+2/q-1/\theta)} \|f\|_{B_{p, \theta}^r}^{\theta/q} \leq 2^{-n(r_1-1/p+2/q-1/\theta)}. \tag{10}
\end{aligned}$$

Сопоставив (8)–(10), приходим к оценке

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_2 & \ll (2^n n^{\nu-1})^{1/q-1/\theta} 2^{-n(r_1-1/p+2/q-1/\theta)} = 2^{-n(r_1-1/p+1/q)} n^{(\nu-1)(1/q-1/\theta)} \\
& \asymp M^{-(r_1-1/p+1/q)} (\log^{\nu-1} M)^{r_1-1/p+2/q-1/\theta}. \tag{11}
\end{aligned}$$

Пусть теперь $1/p - 1/q < r_1 < 1/p - 2/q + 1/\theta$. В таком случае

$$\mathcal{J}_3 \leq 2^{-n_0(r_1-1/p+2/q-1/\theta)} \left(\sum_{l=n}^{n_0} S_l^\theta \right)^{1/q}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{-n_0(r_1-1/p+2/q-1/\theta)} \left(\sum_{l=n}^{n_0} \sum_{l \leq (s,\gamma) < l+1} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{1/q} \\
&\leq 2^{-n_0(r_1-1/p+2/q-1/\theta)} \|f\|_{B_{p,\theta}^r}^{\theta/q} \\
&\leq 2^{-n(r_1-1/p+2/q-1/\theta)} n^{-(\nu-1)(r_1-1/p+2/q-1/\theta)}
\end{aligned} \tag{12}$$

и согласно (8), (9) и (12) получаем оценку

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_2 &\ll (2^n n^{\nu-1})^{1/q-1/\theta} 2^{-n(r_1-1/p+2/q-1/\theta)} n^{-(\nu-1)(r_1-1/p+2/q-1/\theta)} \\
&= 2^{-n(r_1-1/p+1/q)} n^{-(\nu-1)(r_1-1/p+1/q)} \asymp M^{-(r_1-1/p+1/q)}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Наконец, подставляя поочередно оценки (11) и (6), а затем (13) и (6) в (5), приходим к искомой оценке сверху величины $e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_q$ в случае $1 \leq \theta < q$. Оценка сверху в теореме установлена.

Переходя к доказательству в (2) оценки снизу, обратим внимание, что ее достаточно получить при $\nu = d$.

Пусть $f(x) \in B_{p,\theta}^r$ и $S_M(f,x)$ – полином, составленный из M гармоник Фурье функции $f(x)$, выбранных произвольным образом. Тогда в силу следствия Д1.2 (см. [7, с. 392])

$$\|f(x) - S_M(f,x)\|_q = \sup_{g(x): \|g\|_{q'} \leq 1} \left| \int_{\pi_d} (f(x) - S_M(f,x))g(x) dx \right|, \tag{14}$$

где $q^{-1} + (q')^{-1} = 1$.

Подберем число $l \in \mathbb{N}$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения $2^l l^{d-1} \asymp M$ и $2^l l^{d-1} \geq 2M$, и рассмотрим функцию

$$F(x) = \sum_{(s,1)=l} \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)} \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{(s,1)=l} d_s(x).$$

Поскольку

$$\|\delta_s(F,x)\|_p = \|d_s(x)\|_p \asymp 2^{(s,1)(1-1/p)}, \quad 1 < p < \infty, \tag{15}$$

то из (15) согласно теореме о характеристизации класса $H_p^r = B_{p,\infty}^r$ (см. [1, с. 32]) заключаем, что функция

$$f_1(x) = C_1 2^{-l(r_1+1-1/p)} F(x) \tag{16}$$

с соответствующей постоянной $C_1 > 0$ принадлежит классу $B_{p,\infty}^r$.

Аналогично, если $1 \leq \theta < \infty$, то из определения классов $B_{p,\theta}^r$ и с учетом (15) будем иметь

$$\begin{aligned}
\|F\|_{B_{p,\theta}^r} &= \left(\sum_{(s,1)=l} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(F,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} = \left(\sum_{(s,1)=l} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(d_s,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \\
&\asymp \left(\sum_{(s,1)=l} 2^{(s,r)\theta} 2^{(s,1)(1-1/p)\theta} \right)^{1/\theta} = \left(\sum_{(s,1)=l} 2^{(s,1)(r_1+1-1/p)\theta} \right)^{1/\theta} \\
&\ll 2^{l(r_1+1-1/p)} l^{(d-1)/\theta}.
\end{aligned}$$

Следовательно, функция

$$f_2(x) = C_2 2^{-l(r_1+1-1/p)} l^{-(d-1)/\theta} F(x), \quad C_2 > 0, \quad (17)$$

принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$.

Функцию $g(x)$, которая фигурирует в (14), подберем, также отправляясь от функции $F(x)$.

Поскольку (см. [8]) $\|F\|_{q'} \ll 2^{l/q} l^{(d-1)/q'}$, $1 \leq q' < \infty$, то легко видеть, что функция

$$g(x) = C_3 2^{-l/q} l^{-(d-1)/q'} F(x), \quad C_3 > 0, \quad (18)$$

при соответствующем выборе постоянной C_3 удовлетворяет неравенству $\|g\|_{q'} \leq 1$.

Пусть $1 \leq \theta < \infty$. Тогда, подставив построенные функции (17) и (18) в (14) и принимая во внимание, что $M \asymp 2^l l^{d-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \|f_2(x) - S_M(f_2, x)\|_q &\gg (2^l l^{d-1} - M) 2^{-l(r_1+1-1/p+1/q)} l^{-(d-1)(1/\theta+1/q')} \\ &\gg 2^l l^{d-1} 2^{-l(r_1+1-1/p+1/q)} l^{-(d-1)(1/\theta+1/q')} \\ &= 2^{-l(r_1-1/p+1/q)} l^{(d-1)(1/q-1/\theta)} \\ &\asymp M^{-(r_1-1/p+1/q)} (\log^{d-1} M)^{r_1-1/p+2/q-1/\theta}. \end{aligned} \quad (19)$$

Если же $\theta = \infty$, то, подставив в (14) функции (16) и (18) и проведя соответствующие преобразования, получим оценку

$$\|f_1(x) - S_M(f_1, x)\|_q \gg M^{-(r_1-1/p+1/q)} (\log^{d-1} M)^{r_1-1/p+2/q}. \quad (20)$$

В завершение доказательства обратим внимание, что оценки (19) при $r_1 \geq 1/p - 2/q + 1/\theta$ и (20) при $r_1 > 1/p - 1/q$ совпадают по порядку с соответствующими оценками сверху для $e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_q$. Что касается случая $1/p - 1/q < r_1 < 1/p - 2/q + 1/\theta$, то здесь в силу независимости оценки сверху величины $e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_q$ от размерности пространства $\mathbb{R}^d$ ее соответствующую оценку снизу достаточно получить в случае $d = 1$. Но, с другой стороны, оценка (19) в одномерном случае точна для всех $r_1 > 1/p - 1/q$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сопоставив результат доказанной теоремы с результатом теоремы 2 из [6], обнаруживаем, что в случае $1/p - 1/q < r_1 < 1/p - 2/q + 1/\theta$ величины $e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_q$ убывают при $M \rightarrow \infty$ быстрее верхних граней уклонений ступенчатых гиперболических сумм Фурье, содержащих по порядку M гармоник. На классах H_p^r , как следует из теоремы 1 при $\theta = \infty$ и соответствующего результата из [1, теорема 2.2, с. 35], подобного рода эффект места не имеет.

Теперь перейдем к исследованию величин $e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_q$ для других соотношений между параметрами p и q .

Имеют место следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < q \leq p < \infty$, $p \geq 2$, $r_1 > 0$. Тогда при $1 \leq \theta \leq \infty$ справедлива оценка

$$e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_q \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1+1/2-1/\theta)+}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < q < p \leq 2$. Тогда

а) если $1 \leq \theta < p$, $r_1 \geq 1/\theta - 1/p$ или $\theta \geq p$ и $r_1 > 0$, то

$$M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta} \ll e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_q \ll M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/p-1/\theta};$$

б) если $1 \leq \theta < p$ и $0 < r_1 < 1/\theta - 1/p$, то

$$e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_q \asymp M^{-r_1}.$$

Перед тем как перейти к доказательству сформулированных теорем, отметим следующее. Поскольку при $p \geq 2$ $B_{p,\theta}^r \subset B_{2,\theta}^r$, то, с одной стороны, оценка сверху в теореме 2 является следствием оценки сверху в теореме 3 при $p = 2$. С другой стороны, поскольку при $1 < p \leq 2$ $B_{2,\theta}^r \subset B_{p,\theta}^r$, то оценки снизу в теореме 3 получим как следствие оценки снизу в теореме 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 2 И 3. В первую очередь отметим, что оценка сверху в теореме 3 при $p \leq \theta \leq \infty$ следует из соответствующей оценки приближения класса $B_{p,\theta}^r$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье (см. [9]). Таким образом, получим оценку сверху величины $e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_q$ при $1 < q < p \leq 2$ и $1 \leq \theta < p$. При этом мы будем проводить рассуждения, аналогичные тем, что и при установлении оценки сверху в теореме 1. Не останавливаясь на деталях этих рассуждений, отметим только некоторые их отличительные моменты.

Для $f(x) \in B_{p,\theta}^r$ приближающий полином будем выбирать в виде

$$S_M(f, x) = \sum_{(s, \gamma') < n} \delta_s(f, x) + R_1(x),$$

где $R_1(x)$ строится по известной схеме с тем отличием, что вместо величины S_l при его построении используется величина

$$\tilde{S}_l = \left(\sum_{l \leq (s, \gamma') < l+1} 2^{(s, r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta},$$

т.е. в суммировании вектор γ заменяется на γ' .

Итак, предположим, что полином $S_M(f, x)$ построен. Получим оценку сверху для $\|f(x) - S_M(f, x)\|_q$, $f(x) \in B_{p,\theta}^r$.

Пусть $\tilde{D}_f$ обозначает множество тех векторов s : $n \leq (s, \gamma') < n_0$, для которых “блоки” $\delta_s(f, x)$ не попали в $R_1(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f(x) - S_M(f, x)\|_q &\leq \left\| f(x) - \sum_{(s, \gamma') < n_0} \delta_s(f, x) + \sum_{s \in \tilde{D}_f} \delta_s(f, x) \right\|_q \\ &\leq \left\| f(x) - \sum_{(s, \gamma') < n_0} \delta_s(f, x) \right\|_q + \left\| \sum_{s \in \tilde{D}_f} \delta_s(f, x) \right\|_q = \mathcal{J}_4 + \mathcal{J}_5. \end{aligned} \quad (21)$$

Согласно оценке приближения класса $B_{p,\theta}^r$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье (см. [9]) имеем

$$\mathcal{J}_4 \ll 2^{-n_0 r_1} \asymp M^{-r_1}. \quad (22)$$

Чтобы оценить слагаемое $\mathcal{J}_5$, воспользуемся сначала теоремой Литтлвуда–Пэли (см., например, [2, с. 59–65]) и затем неравенством $|a + b|^c \leq |a|^c + |b|^c$, $0 \leq c \leq 1$. В результате получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_5 &= \left\| \sum_{s \in \tilde{D}_f} \delta_s(f, x) \right\|_q \leq \left\| \sum_{s \in \tilde{D}_f} \delta_s(f, x) \right\|_p \\ &\ll \left\| \left(\sum_{s \in \tilde{D}_f} |\delta_s(f, x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq \left(\sum_{s \in \tilde{D}_f} \|\delta_s(f, x)\|_p^p \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (23)$$

Далее, повторив рассуждения, которые проводились при оценке $\mathcal{J}_2$ (см. (8), (9)), из (23) получаем

$$\mathcal{J}_5 \ll (2^n n^{\nu-1})^{1/p-1/\theta} \left(\sum_{l=n}^{n_0} 2^{-pl(r_1-1/\theta+1/p)} \tilde{S}_l^\theta \right)^{1/p}. \quad (24)$$

Чтобы продолжить оценку (24), рассмотрим два случая:

- а) $r_1 \geq 1/\theta - 1/p$;
- б) $0 < r_1 < 1/\theta - 1/p$.

Итак, пусть $r_1 \geq 1/\theta - 1/p$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_5 &\ll (2^n n^{\nu-1})^{1/p-1/\theta} 2^{-n(r_1-1/\theta+1/p)} \left(\sum_{l=n}^{n_0} \tilde{S}_l^\theta \right)^{1/p} \\ &\ll 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/p-1/\theta)} \|f\|_{B_{p,\theta}^r}^{\theta/p} \ll 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/p-1/\theta)} \\ &\asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/p-1/\theta}. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставив (25) и (22) в (21), приходим к оценке

$$\|f(x) - S_M(f, x)\|_q \ll M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/p-1/\theta}.$$

Пусть теперь $0 < r_1 < 1/\theta - 1/p$. Тогда из (24) находим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_5 &\ll (2^n n^{\nu-1})^{1/p-1/\theta} 2^{-n_0(r_1-1/\theta+1/p)} \left(\sum_{l=n}^{n_0} \tilde{S}_l^\theta \right)^{1/p} \\ &\ll (2^n n^{\nu-1})^{1/p-1/\theta} 2^{-n(r_1-1/\theta+1/p)} n^{-(\nu-1)(r_1-1/\theta+1/p)} \\ &= 2^{-nr_1} n^{-(\nu-1)r_1} \asymp M^{-r_1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом, оценки сверху в теореме 3, а следовательно, и в теореме 2 установлены.

Переходя к оценке снизу в теореме 2, заметим, что ее достаточно получить в случае $1 < q \leq 2 < p < \infty$ и при $\nu = d$. Аналогично доказательству оценки снизу в теореме 1 здесь мы также будем использовать соотношение (14).

Подберем число l из условий $2^l l^{d-1} \asymp M$ и $2^l l^{d-1} \geq 2M$ и положим

$$F_1(x) = \sum_{(s,1)=l} \prod_{j=1}^d R_{s_j}(x_j),$$

где $R_m(t) = \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} \varepsilon_k e^{ikt}$, $\varepsilon_k = \pm 1$, — полиномы Рудина–Шапиро (см., например, [10, с. 155]), обладающие свойством $\|R_m\|_\infty \ll 2^{m/2}$.

Итак, пусть $1 \leq \theta < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \|F_1\|_{B_{p,\theta}^r} &\asymp \left(\sum_{(s,1)=l} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(F_1, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\ll \left(\sum_{(s,1)=l} 2^{(s,r)\theta} 2^{(s,1/2)\theta} \right)^{1/\theta} = \left(\sum_{(s,1)=l} 2^{(s,1)(r_1+1/2)\theta} \right)^{1/\theta} \\ &= 2^{l(r_1+1/2)} \left(\sum_{(s,1)=l} 1 \right)^{1/\theta} \asymp 2^{l(r_1+1/2)} l^{(d-1)/\theta}. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что функция

$$f_3(x) = C_4 2^{-l(r_1+1/2)} l^{-(d-1)/\theta} F_1(x)$$

с соответствующей постоянной $C_4 > 0$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$. Аналогично из определения класса $B_{p,\infty}^r$ и свойства полиномов Рудина–Шапиро следует, что функция

$$f_4(x) = C_5 2^{-l(r_1+1/2)} F_1(x), \quad C_5 > 0,$$

принадлежит классу $B_{p,\infty}^r$.

Функцию $g(x)$, которая фигурирует в (14), также подберем, отправляясь от функции $F_1(x)$. Поскольку при $2 \leq q' < \infty$

$$\begin{aligned} \|F_1\|_{q'} &\ll \left\| \left(\sum_{(s,1)=l} |\delta_s(F_1, x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{q'} \leq \left(\sum_{(s,1)=l} \|\delta_s(F_1, x)\|_{q'}^2 \right)^{1/2} \\ &\ll 2^{l/2} \left(\sum_{(s,1)=l} 1 \right)^{1/2} \asymp 2^{l/2} l^{(d-1)/2}, \end{aligned}$$

отсюда следует, что функция

$$g_1(x) = C_6 2^{-l/2} l^{-(d-1)/2} F_1(x), \quad C_6 > 0,$$

удовлетворяет условию $\|g_1\|_{q'} \leq 1$. Подставив $f_3(x)$ и $g_1(x)$ в (14), будем иметь

$$\begin{aligned} \|f_3(x) - S_M(f_3, x)\|_q &\gg (2^l l^{d-1} - M) 2^{-l(r_1+1)} l^{-(d-1)(1/2+1/\theta)} \\ &\gg 2^l l^{d-1} \cdot 2^{-l(r_1+1)} l^{-(d-1)(1/2+1/\theta)} = 2^{-lr_1} l^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \\ &\asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta}. \end{aligned} \quad (27)$$

Соответственно, подставив в (14) $f_4(x)$ и $g_1(x)$, приходим к оценке

$$\|f_4(x) - S_M(f_4, x)\|_q \gg M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+1/2}. \quad (28)$$

Оценки (27) и (28) совпадают по порядку с соответствующими оценками сверху в теореме 2 при $r_1 \geq 1/\theta - 1/2$. Если же $0 < r_1 < 1/\theta - 1/2$, то искомые оценки снизу следуют из одномерного случая. Оценки снизу в теореме 2 и, следовательно, в теореме 3 установлены. Теоремы 2 и 3 доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Сравнив оценки теорем 2 и 3 с соответствующими оценками приближения классов $B_{p,\theta}^r$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье (см. [6] и [9]), обнаруживаем (при $0 < r_1 < 1/\theta - 1/2$ и $0 < r_1 < 1/\theta - 1/p$ соответственно) их различие в смысле порядка. На классах H_p^r отмеченный эффект места не имеет.

Обратим внимание, что в теореме 3 в отличие от теоремы 2 не охвачен случай $p = q$. В этом случае нам удалось установить точные по порядку оценки величин $e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_p$, $p \in (1, 2)$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p \in (1, 2)$, $r_1 > 0$. Тогда при $1 \leq \theta \leq \infty$

$$e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_p \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1+1/p-1/\theta)_+}. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху в (29) устанавливается с помощью тех же рассуждений, что и в теореме 3. Мы не будем на этом останавливаться, а только отметим, что для оценки слагаемого $\mathcal{J}_4$ нужно воспользоваться результатом теоремы 1 [6].

Установим оценку снизу. При этом мы будем следовать схеме рассуждений, которая применялась В. Н. Темляковым в [1, с. 94] при получении им оценки снизу величины наилучшего M -членного тригонометрического приближения класса $W_{p,\alpha}^r$ в пространстве L_q при $1 < p \leq q \leq 2$.

По числу M подберем n таким, чтобы $M \asymp 2^n n^{d-1}$ и число точек во множестве $F_n = \bigcup_{(s,1)=n} \rho(s)$ было бы больше $4M$. Рассмотрим функции

$$f_5(x) = C_7 2^{-n(r_1+1-1/p)} n^{-(d-1)/\theta} \sum_{k \in F_n} e^{i(k,x)}, \quad C_7 > 0,$$

при $1 \leq \theta < \infty$ и

$$f_6(x) = C_8 2^{-n(r_1+1-1/p)} \sum_{k \in F_n} e^{i(k,x)}, \quad C_8 > 0,$$

при $\theta = \infty$, которые, как было показано при доказательстве теоремы 1, принадлежат классам $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$, и $B_{p,\infty}^r$ соответственно.

Далее, пусть Ω_M – произвольный набор из M целочисленных векторов $k^1, \dots, k^M$, $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$. Для каждого вектора $s: (s, 1) = n$ рассмотрим множества $\Omega_M \cap \rho(s)$. Нетрудно видеть, что согласно выбору числа n множество тех векторов $s: (s, 1) = n$, для которых $|\Omega_M \cap \rho(s)| \leq \frac{1}{2} |\rho(s)|$, будет содержать, по крайней мере, половину всех векторов s , удовлетворяющих условию $(s, 1) = n$. Поэтому, обозначив множество этих векторов через S , можем записать $|S| \asymp n^{d-1}$. Далее нам понадобится вспомогательное утверждение (см. [1, с. 28]).

ЛЕММА 1. Пусть $1 < p < q \leq \infty$ и $f(x) \in L_p(\pi_d)$. Тогда

$$\|f\|_p \gg \left(\sum_s \|\delta_s(f, x)\|_q^p 2^{\|s\|_1(1/q-1/p)p} \right)^{1/p}. \quad (30)$$

Итак, пусть $S_M(f_5, x)$ – полином, составленный из гармоник Фурье функции $f_5(x)$, имеющих “номера” в Ω_M . Тогда согласно (30) для $f_5(x)$ будем иметь оценку

$$\begin{aligned} \|f_5(x) - S_M(f_5, x)\|_p &\gg \left(\sum_{(s,1)=n} \|\delta_s(f_5(x) - S_M(f_5, x))\|_2^p 2^{\|s\|_1(1/2-1/p)p} \right)^{1/p} \\ &\gg \left(\sum_{s \in S} \|\delta_s(f_5(x) - S_M(f_5, x))\|_2^p \right)^{1/p} 2^{n(1/2-1/p)} \\ &\gg 2^{-n(r_1+1-1/p)} n^{-(d-1)/\theta} |S|^{1/p} 2^{n(1/2-1/p)} 2^{n/2} \\ &\asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1/p-1/\theta)} \asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+1/p-1/\theta}. \end{aligned} \quad (31)$$

Заметим, что полученная оценка совпадает по порядку с оценкой сверху величины $e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_p$ в случае $r_1 \geq 1/\theta - 1/p$. Если же $0 < r_1 < 1/\theta - 1/p$, то искомая оценка снизу следует из одномерного случая. Аналогично, для $f_6(x)$ согласно (31) получаем

$$\|f_6(x) - S_M(f_6, x)\|_p \gg 2^{-nr_1} n^{(d-1)/p} \asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+1/p}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Сопоставив результат теоремы 4 с результатом теоремы 1 [6], видим, что при $0 < r_1 < 1/\theta - 1/p$ величины $e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_p$ убывают при $M \rightarrow \infty$ быстрее верхних граней уклонений ступенчатых гиперболических сумм Фурье.

В заключение приведем два результата о приближении классов $W_{p,\alpha}^r$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $r_1 > 1/p - 1/q$. Тогда

$$e_M^\perp(W_{p,\alpha}^r)_q \asymp M^{-(r_1-1/p+1/q)} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1-2/p+2/q)_+}. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В первую очередь отметим, что оценка (32) в случаях $1 < p \leq 2 < q < \infty$ и $1 < p \leq q \leq 2$ известна [5]. Поэтому рассмотрим случай $2 \leq p < q < \infty$. Оценка сверху здесь следует из теоремы 1 согласно вложению $W_{p,\alpha}^r \subset B_{p,p}^r$, $2 \leq p < \infty$, а соответствующая оценка снизу устанавливается с помощью рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 1. При этом в роли функции $f_1(x)$ нужно выбрать функцию

$$f_7(x) = C_9 2^{-l(r_1-1/p+1)} l^{-(d-1)/p} F(x), \quad C_9 > 0,$$

которая, как нетрудно проверить, принадлежит классу $W_{p,\alpha}^r$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Сопоставив (32) с результатом теоремы 2.1 [1, с. 34], видим, что при $1/p - 1/q < r_1 \leq 2(1/p - 1/q)$ имеет место различие в поведении величин $e_M^\perp(W_{p,\alpha}^r)_q$ по сравнению с величинами верхних граней уклонений ступенчатых гиперболических сумм Фурье.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $1 < q < p < \infty$, $r_1 > 0$. Тогда

$$e_M^\perp(W_{p,\alpha}^r)_q \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1}. \quad (33)$$

Оценка сверху в (33) следует из оценки приближения класса $W_{p,\alpha}^r$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье в метрике L_p , $1 < p < \infty$ (см. [1, теорема 2.1]). Оценка снизу является следствием оценки снизу M -членных тригонометрических приближений (см. следствие 1 в [2]).

Таким образом, порядки величин $e_M^\perp(W_{p,\alpha}^r)_q$ в следствии 1 совпадают с порядками верхних граней уклонений ступенчатых гиперболических сумм Фурье, а также наилучших M -членных тригонометрических приближений (см., например, [2]).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Обнаруженные выше эффекты на классах $B_{p,\theta}^r$ и $W_{p,\alpha}^r$ имеют многомерную специфику и в отмеченных случаях в пространстве $\mathbb{R}^1$ не проявляются.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1986. Т. 178.
- [2] Кашин Б. С., Темляков В. Н. О наилучших m -членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 5. С. 57–86.
- [3] Лизоркин П. И., Никольский С. М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН. 1989. Т. 187. С. 143–161.
- [4] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
- [5] Белинский Э. С. Приближение плавающей системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль: ЯГУ, 1988. С. 16–33.
- [6] Романюк А. С. Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. матем. ж. 1991. Т. 43. № 10. С. 1398–1408.
- [7] Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
- [8] Галеев Э. М. Порядковые оценки производных периодического многомерного α -ядра Дирихле в смешанной норме // Матем. сб. 1982. Т. 117. № 1. С. 32–43.
- [9] Галеев Э. М. Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 3. С. 32–41.
- [10] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.