Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Тыртышников, В. Н. Чугунов, О задачах окаймления и модификации эрмитовых матриц, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 1, 130–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm334>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:42:44

УДК 519.6

О ЗАДАЧАХ ОКАЙМЛЕНИЯ И МОДИФИКАЦИИ ЭРМИТОВЫХ МАТРИЦ

Е. Е. Тыртышников, В. Н. Чугунов

Получены необходимые и достаточные условия разрешимости задач окаймления и модификации порядка r эрмитовых матриц. В задаче окаймления требуется по предписанным собственным значениям построить эрмитову $((n+r) \times (n+r))$ -матрицу с заданным $(n \times n)$ -блоком A_{11} в блочном (2×2) -представлении. Задача модификации заключается в построении эрмитовой $(n \times n)$ -матрицы B ранга не более r такой, чтобы матрица, полученная при сложении матрицы B с заданной эрмитовой $(n \times n)$ -матрицей A , имела требуемый спектр. Приведена оценка для минимального числа различных собственных значений у решений данных задач.

Библиография: 2 названия.

1. Введение. Пусть A – эрмитова $(n \times n)$ -матрица с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$).

Под *задачей окаймления* порядка r матрицы A (задача I) понимается процесс построения эрмитовой $((n+r) \times (n+r))$ -матрицы B с предписанными собственными значениями $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_{n+r}$ ($\hat{\lambda}_1 \leq \hat{\lambda}_2 \leq \dots \leq \hat{\lambda}_{n+r}$) такой, что

$$(B)_{ij} = (A)_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

В *задаче модификации* ранга r матрицы A (задача II) требуется построить эрмитову $(n \times n)$ -матрицу B ранга не более r такую, что матрица $(A+B)$ имеет заданный спектр $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n$ ($\hat{\lambda}_1 \leq \hat{\lambda}_2 \leq \dots \leq \hat{\lambda}_n$).

Решение этих проблем для $r = 1$ дают следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Задача окаймления разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\hat{\lambda}_1 \leq \lambda_1 \leq \hat{\lambda}_2 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \hat{\lambda}_n \leq \lambda_n \leq \hat{\lambda}_{n+1}. \quad (1.1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00017.

ТЕОРЕМА 2. *Для существования решения задачи модификации необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$\widehat{\lambda}_i \leq \lambda_{i+1} \leq \widehat{\lambda}_{i+2}, \quad \lambda_i \leq \widehat{\lambda}_{i+1} \leq \lambda_{i+2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (1.2)$$

Доказательство этих утверждений можно найти в [1], [2].

Цель данной заметки двоякая. С одной стороны, представить решение этих задач для произвольного r . Этому посвящен раздел 2. С другой стороны, мы хотим исследовать вопрос о том, как сильно можем распоряжаться спектром возмущенной матрицы, какова степень свободы. В разделе 3 приведены оценки для минимального числа различных собственных значений у решений данных задач.

2. Теоремы разрешимости.

2.1. Задача окаймления. В данном разделе будут сформулированы и обоснованы необходимые и достаточные условия существования решения задачи I.

ТЕОРЕМА 3. *Задача окаймления разрешима тогда и только тогда, когда имеют место неравенства*

$$\widehat{\lambda}_i \leq \lambda_i \leq \widehat{\lambda}_{i+r}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Обозначим через $A^{(k)}$ $((n+k) \times (n+k))$ -подматрицу B в верхнем левом углу для $k = 0, 1, \dots, r$, а через $\mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}, \dots, \mu_{n+k}^{(k)}$ — ее собственные значения. Тогда

$$A^{(0)} = A, \quad A^{(r)} = B, \quad \mu_i^{(0)} = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \mu_i^{(r)} = \widehat{\lambda}_i, \quad i = 1, \dots, n+r. \quad (2.2)$$

Заметим, что каждая из матриц $A^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, r$, является решением задачи окаймления порядка 1 для матрицы $A^{(j-1)}$. Поэтому по теореме 1

$$\mu_i^{(j)} \leq \mu_i^{(j-1)} \leq \mu_{i+1}^{(j)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r. \quad (2.3)$$

Применяя формулу (2.2) и левое соотношение (2.3) для $j = r, \dots, 1$, получаем

$$\widehat{\lambda}_i = \mu_i^{(r)} \leq \mu_i^{(r-1)} \leq \dots \leq \mu_i^{(1)} \leq \mu_i^{(0)} = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

или

$$\widehat{\lambda}_i \leq \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Аналогично из (2.2) и правых неравенств (2.3) для $j = 1, \dots, r$ имеем

$$\lambda_i = \mu_i^{(0)} \leq \mu_{i+1}^{(1)} \leq \mu_{i+2}^{(2)} \leq \dots \leq \mu_{i+r}^{(i+r)} = \widehat{\lambda}_{i+r}, \quad i = 1, \dots, n,$$

или

$$\lambda_i \leq \widehat{\lambda}_{i+r}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Объединяя (2.4) и (2.5), приходим к условию (2.1).

Достаточность докажем по индукции. При $r = 1$ получаем теорему 1. Для обоснования теоремы для $r > 1$ построим набор чисел $\mu_1, \dots, \mu_{n+r-1}$ таких, что

$$\widehat{\lambda}_i \leq \mu_i \leq \widehat{\lambda}_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n+r-1, \quad (2.6)$$

$$\mu_i \leq \lambda_i \leq \mu_{i+r-1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

В качестве μ_i можно взять, например,

$$\mu_i = \frac{c_i + d_i}{2}, \quad i = 1, \dots, n+r-1,$$

где

$$c_i = \begin{cases} \widehat{\lambda}_i, & i = 1, \dots, r-1, \\ \max(\widehat{\lambda}_i, \lambda_{i-(r-1)}), & i = r, \dots, n+r-1, \end{cases}$$

$$d_i = \begin{cases} \min(\widehat{\lambda}_{i+1}, \lambda_i), & i = 1, \dots, n, \\ \widehat{\lambda}_{i+1}, & i = n+1, \dots, n+r-1. \end{cases}$$

Покажем справедливость (2.6) и (2.7). В силу (2.1) и соотношений $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, $\widehat{\lambda}_1 \leq \dots \leq \widehat{\lambda}_{n+r}$ заключаем, что $c_i \leq d_i$. Поэтому из условий $c_i \geq \widehat{\lambda}_i$, $d_i \leq \widehat{\lambda}_{i+1}$ следует (2.6), а из условия $d_i \leq \lambda_i$ — левая часть (2.7). Так как $c_i \geq \lambda_{i-(r-1)}$, то и $\mu_i \geq \lambda_{i-(r-1)}$. Заменяя в этом неравенстве i на $i+r-1$, приходим к (2.7).

По индуктивному предположению для $(n \times n)$ -матрицы A и чисел $\mu_1, \dots, \mu_{n+r-1}$ построим $((n+r-1) \times (n+r-1))$ -матрицу $\widetilde{B}$ с собственными значениями $\mu_1, \dots, \mu_{n+r-1}$ такую, что

$$(\widetilde{B})_{i,j} = (A)_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Это возможно в силу (2.7). Условия (2.6) позволяют окаймить матрицу $\widetilde{B}$ столбцом справа и строкой снизу так, чтобы итоговая $((n+r) \times (n+r))$ -матрица имела заданный спектр $\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_{n+r}$. Теорема доказана.

2.2. Задача модификации.

ТЕОРЕМА 4. *Задача модификации разрешима тогда и только тогда, когда*

$$1) \quad \widehat{\lambda}_i \leq \lambda_{i+r} \leq \widehat{\lambda}_{i+2r}, \quad 2) \quad \lambda_i \leq \widehat{\lambda}_{i+r} \leq \lambda_{i+2r}, \quad i = 1, \dots, n-2r. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость* данного утверждения доказана в [2].

Достаточность проведем по аналогии с теоремой 3 по индукции. Для $r = 1$ имеем теорему 2. При $r > 1$ выберем числа $\mu_1, \dots, \mu_n$, удовлетворяющие условиям

$$\mu_i \leq \widehat{\lambda}_{i+1} \leq \mu_{i+2}, \quad \widehat{\lambda}_i \leq \mu_{i+1} \leq \widehat{\lambda}_{i+2}, \quad i = 1, \dots, n-2, \quad (2.9)$$

и

$$\lambda_i \leq \mu_{i+r-1} \leq \lambda_{i+2(r-1)}, \quad \mu_i \leq \lambda_{i+r-1} \leq \mu_{i+2(r-1)}, \quad i = 1, \dots, n-2(r-1). \quad (2.10)$$

Если положить

$$\mu_i = \frac{c_i + d_i}{2}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где

$$c_i = \begin{cases} \min(\hat{\lambda}_1, \lambda_1), & i = 1, \\ \hat{\lambda}_{i-1}, & i = 2, \dots, r-1, \\ \max(\hat{\lambda}_{i-1}, \lambda_{i-(r-1)}), & i = r, \dots, n, \end{cases}$$

$$d_i = \begin{cases} \min(\hat{\lambda}_{i+1}, \lambda_{i+r-1}), & i = 1, \dots, n - (r-1), \\ \hat{\lambda}_{i+1}, & i = n - r + 2, \dots, n-1, \\ \max(\hat{\lambda}_n, \lambda_n), & i = n, \end{cases}$$

то из соотношений $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, $\hat{\lambda}_1 \leq \dots \leq \hat{\lambda}_n$ и условий (2.8) несложно вывести (2.9) и (2.10).

Благодаря неравенствам (2.10) построим по индуктивному предположению $(n \times n)$ -матрицу B_1 ранга не более $r-1$ такую, что матрица $\tilde{B} = A + B_1$ имеет собственные значения $\mu_1, \dots, \mu_n$. Условие (2.9) в силу теоремы 2 обеспечивает существование одноранговой матрицы B_2 такой, что спектр матрицы $\tilde{B} + B_2$ составляют числа $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n$. Решение задачи модификации в данном случае представимо в виде матрицы $B = B_1 + B_2$, ранг которой не более суммы рангов B_1 и B_2 , т.е. не более r . Теорема доказана.

3. Оценки для задаваемого спектра. Изучим теперь вопрос о минимальном количестве различных чисел среди задаваемого спектра $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_{n+r}$ (в задаче I) и $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n$ (в задаче II). В данном разделе считаем, что все собственные значения A простые.

3.1. Задача окаймления.

ТЕОРЕМА 5. *Минимальное число различных собственных значений среди задаваемых $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_{n+r}$ в задаче окаймления не может быть меньше*

$$2 + \left\lceil \frac{(n-r-2)_+}{r+1} \right\rceil, \quad (3.1)$$

где $[*]$ – целая часть числа сверху, а

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Главными условиями, налагаемыми на числа $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_{n+r}$, являются соотношения

$$\hat{\lambda}_i \leq \lambda_i \leq \hat{\lambda}_{i+r}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Уменьшить число различных $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_{n+r}$ можно лишь за счет слияния некоторых из них. Из условия (3.2) очевидно, что точки λ_1 и λ_n как границы спектра матрицы A накладывают условия на $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_{n+r}$, не давая последним приблизиться. Поэтому λ_1 и λ_n являются двумя граничными точками слияния. Несложно проверить, что, положив

$$\hat{\lambda}_1 = \dots = \hat{\lambda}_{r+1} = \lambda_1, \quad \hat{\lambda}_n = \dots = \hat{\lambda}_{n+r} = \lambda_n,$$

мы обеспечим выполнение условий (3.2), однако при этом увеличение кратностей λ_1 и λ_n невозможно. После такого выбора у нас остается $(n-r-2)$ чисел спектра $\hat{\lambda}_{r+2}, \dots, \hat{\lambda}_{n-1}$, которыми мы еще можем распорядиться.

Запишем (3.2) в виде

$$\lambda_{i-r} \leq \hat{\lambda}_i \leq \lambda_i$$

и рассмотрим это неравенство для $i = k+r, k = 2, \dots, n-r-1$. Получим соотношения

$$\lambda_k \leq \hat{\lambda}_{k+r} \leq \lambda_{k+r}, \quad k = 1, \dots, n-r-1.$$

Отсюда следует, что каждое из чисел $\hat{\lambda}_{k+r}$ должно принадлежать интервалу $[\lambda_k, \lambda_{k+r}]$, $k = 2, \dots, n-r-1$. Эти интервалы расположены последовательно, пересечение нескольких рядом стоящих не пусто, при этом максимальное число интервалов, имеющих общую точку, равно $r+1$. Разобьем все множество этих интервалов на группы по $r+1$ с последовательными номерами (в последней может быть меньше). Так как в каждой группе существует точка, принадлежащая всем ее интервалам, скажем $\tilde{\lambda}_m$, определим собственные значения, заключенные в интервалы данной группы, равными $\tilde{\lambda}_m$.

В силу того, что таких групп $\lceil (n-r-2)/(r+1) \rceil$, количество различных собственных значений равно $2 + \lceil (n-r-2)/(r+1) \rceil$. Теорема доказана.

3.2. Задача модификации.

ТЕОРЕМА 6. *Минимальное число различных собственных значений среди задаваемых $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n$ в задаче модификации не может быть меньше*

$$\left\lceil \frac{n}{2r+1} \right\rceil.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Ω_i отрезок вида $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$. Из условий теоремы 4 следует, что числа $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n$ должны подчиняться условиям

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_j \leq \lambda_{j+r}, & j = 1, \dots, r, \\ \lambda_{j-r} \leq \hat{\lambda}_j \leq \lambda_{j+r}, & j = r+1, \dots, n-r, \\ \lambda_{j-r} \leq \hat{\lambda}_j, & j = n-r+1, \dots, n. \end{cases}$$

То есть каждое $\hat{\lambda}_j$ должно лишь содержаться в определенном интервале G_j , состоящем не более чем из $2r+1$ отрезков Ω_k с последовательными номерами. Максимальное количество отрезков G_j , имеющих общую точку, равно $2r+1$. Разобьем весь набор выбираемых $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n$ на группы по $2r+1$ с последовательными номерами (в последней может быть меньше). Обозначим для каждой группы k точку пересечения соответствующих интервалов G_j через $\tilde{\lambda}_k$ и положим $\hat{\lambda}_j = \tilde{\lambda}_k$ для всех $\hat{\lambda}_j$ из группы k . Так как в каждой группе все задаваемые числа равны и числа $\tilde{\lambda}_k$ попарно различны, то число различных собственных значений модифицированной матрицы не может быть меньше числа групп, а именно

$$\left\lceil \frac{n}{2r+1} \right\rceil.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Годунов С. К. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
- [2] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.