Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Быков, В. И. Овчинников, Интерполяционные свойства шкал банаховых пространств, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 6, 803–813

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3358>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 17:19:48

УДК 517.982

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ШКАЛ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Ю. Н. Быков, В. И. Овчинников

В настоящей работе мы показываем, что произвольные интерполяционные шкалы, соединяющие весовые пространства L_p или близкие к ним, обладают многими замечательными свойствами. Они не только внутренне интерполяционны, но и справедлив аналог теоремы Арази–Цвикеля об описании интерполяционных пространств между пространствами шкалы.

Библиография: 5 названий.

Произвольные шкалы банаховых пространств не всегда обладают хорошими свойствами, например, внутри шкалы интерполяционность может нарушаться. В настоящей работе мы показываем, что произвольные интерполяционные шкалы, соединяющие весовые пространства L_p или близкие к ним, обладают многими замечательными свойствами. Они не только внутренне интерполяционны, но и справедлив аналог теоремы Арази–Цвикеля об описании интерполяционных пространств между пространствами шкалы.

Работа состоит из двух пунктов. В п. 1 исследуются интерполяционные свойства треугольных матриц, которые в п. 2 применяются для доказательства новых интерполяционных теорем, включающих обобщение на произвольные шкалы теоремы Арази–Цвикеля.

Всюду в дальнейшем мы придерживаемся стандартных определений и обозначений, следуя [1] и [2].

1. Интерполяционные шкалы. Как обычно, через $\{X_0, X_1\}$ мы будем обозначать пару банаховых пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\{X_0, X_1\}$ – банахова пара. Пусть X_α , где $0 < \alpha < 1$, – семейство промежуточных пространств этой пары. Будем называть это семейство *интерполяционной шкалой*, соединяющей X_0 и X_1 , если при каждом $\alpha \in (0, 1)$ пространство X_α интерполяционно между X_0 и X_1 и

$$\|T\|_{X_\alpha} \leq C_\alpha \|T\|_{X_0}^{1-\alpha} \|T\|_{X_1}^\alpha$$

для любого линейного оператора, действующего в паре пространств $\{X_0, X_1\}$.

Работа выполнена при частичной поддержке Математического института Чешской академии наук, грант № AV0Z10190503.

Зафиксировав α_0 и α_1 между 0 и 1, рассмотрим новую пару пространств $\{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}$. Легко показать, что при $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$ пространство X_α будет промежуточным для пары $\{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}$.

Возникает естественный вопрос: а не является ли X_α интерполяционным пространством между X_{α_0} и X_{α_1} . Для классических шкал пространств, таких как шкала комплексного метода $X_\alpha = [X_0, X_1]_\alpha$ или любая из шкал $(X_0, X_1)_{\alpha, p}$ вещественного метода, ответ положительный. Соответствующие утверждения называются теоремами о рентерации (см., например, [2] или [1]).

Для произвольной же интерполяционной шкалы пространство X_α может и не быть интерполяционным между X_{α_0} и X_{α_1} . Однако, как показано ниже для довольно широкого класса пар $\{X_0, X_1\}$, все же X_α интерполяционно между X_{α_0} и X_{α_1} для произвольных интерполяционных шкал, соединяющих X_0 и X_1 .

Нам понадобится в дальнейшем следующая лемма, помогающая изучить интерполяционные шкалы.

ЛЕММА 1.1 (см. [1; упр. 4 к гл. 2]). Пусть E_α – произвольная интерполяционная шкала, соединяющая пространства E_0 и E_1 . Тогда существует семейство интерполяционных функторов $\mathcal{F}_\alpha$ таких, что $\mathcal{F}_\alpha(E_0, E_1) = E_\alpha$, для которых справедлива оценка

$$\|T\|_{\mathcal{F}_\alpha(X_0, X_1) \rightarrow \mathcal{F}_\alpha(Y_0, Y_1)} \leq C_\alpha \|T\|_{X_0 \rightarrow Y_0}^{1-\alpha} \|T\|_{X_1 \rightarrow Y_1}^\alpha$$

для всех банаховых пар $\{X_0, X_1\}$, $\{Y_0, Y_1\}$ и любого линейного оператора

$$T: \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Полезно иметь в виду, что утверждение леммы 1.1 не сводится к теореме Ароншайна–Гальярдо о продолжении интерполяционных функторов, поскольку нетривиальный результат получается, даже если в качестве исходной пары $\{E_0, E_1\}$ взять простейшую тождественную пару $\{\mathbb{R}, \mathbb{R}\}$ и шкалу $E_\alpha = \mathbb{R}$.

Всюду в дальнейшем мы рассматриваем двусторонние пространства числовых последовательностей $\xi = \{\xi_k\}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Напомним, что пространство последовательностей E называется *идеальным*, если из того, что $\xi \in E$ и $|\eta| \leq |\xi|$, следует, что $\eta \in E$ и $\|\eta\|_E \leq \|\xi\|_E$.

Пространство двусторонних последовательностей E называется *инвариантным относительно сдвига*, если для любой $\{\xi_k\} \in E$ и любого $m \in \mathbb{Z}$ справедливо $\{\xi_{k-m}\} \in E$ и $\|\xi\|_E = \|\{\xi_{k-m}\}\|_E$.

Через $E(2^{-kx})$, где $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, а E – пространство двусторонних последовательностей, мы будем обозначать пространство последовательностей $\xi = \{\xi_k\}$ таких, что

$$\{\xi_k 2^{-xk}\} \in E \quad \text{и} \quad \|\xi\|_{E(2^{-kx})} = \|\{\xi_k 2^{-xk}\}\|_E.$$

ЛЕММА 1.2 (об экстраполяции). Пусть T – нижнетреугольная матрица, задающая ограниченный линейный оператор в пространстве $E(2^{-k\alpha})$, где E – инвариантное относительно сдвига идеальное пространство последовательностей. Тогда оператор T ограниченно действует в любом пространстве $F(2^{-kx})$, где $x > \alpha$, а F – инвариантное относительно сдвига идеальное пространство последовательностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограниченность оператора T в $E(2^{-k\alpha})$ влечет за собой ограниченность T из $l_1(2^{-k\alpha})$ в $l_\infty(2^{-k\alpha})$, которая, как легко видеть, эквивалентна ограниченности последовательности $2^{-k\alpha}t_{kj}2^{j\alpha}$. То есть

$$|t_{kj}| \leq C2^{\alpha(k-j)}. \quad (1)$$

Для нижнетреугольной матрицы лишь элементы с индексами $j \geq k$ отличны от нуля.

Рассмотрим оператор T_p , порожденный p -й диагональю матрицы нашего оператора T , т.е.

$$(T_p)_{kj} = \begin{cases} t_{kj}, & \text{если } k - j = p > 0, \\ 0, & \text{если } k - j \neq p, \end{cases}$$

действующий в пространстве $F(2^{-kx})$. Имеем $(T_p\xi)_k = t_{k-k-p}\xi_{k-p}$.

В силу условия (1) $|t_{kj}| \leq C2^{\alpha p}$ на p -й диагонали, поэтому $|(T_p\xi)_k| \leq C2^{\alpha p}|\xi_{k-p}|$ и

$$\begin{aligned} \|T_p(\xi)\|_{F(2^{-kx})} &\leq C\|\{2^{-kx}2^{\alpha p}|\xi_{k-p}|\}\|_F = C\|\{2^{-kx}2^{\alpha p}|\xi_{k-p}|2^{(\alpha-x)p}\}\|_F \\ &= C\|\{2^{-(k-p)x}|\xi_{k-p}|\}\|_F 2^{(\alpha-x)p} = C\|\{2^{-kx}\xi_k\}\|_F 2^{(\alpha-x)p} \\ &= C\|\xi\|_{F(2^{-kx})} 2^{(\alpha-x)p}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|T_p\|_{F(2^{-kx})} \leq C2^{(\alpha-x)p}$, т.е. ряд $\sum_{p=0}^{\infty} T_p$ абсолютно сходится в пространстве операторов, действующих в $F(2^{-kx})$.

Сумма этого ряда, очевидно, совпадает с оператором T на замыкании финитных последовательностей в пространстве $F(2^{-kx})$, т.е. на пространстве $F(2^{-kx})^o$, в частности, на $l_1(2^{-kx})$, поскольку в силу инвариантности относительно сдвига $l_1 \subset F$.

Поскольку вновь в силу инвариантности относительно сдвига имеет место вложение $F \subset l_\infty$, мы получим

$$F(2^{-kx}) \subset l_\infty(2^{-kx}) \subset l_1(2^{-k(x+\varepsilon)}) + l_1(2^{-k(x-\varepsilon)}) \quad (2)$$

для любого $\varepsilon \neq 0$. Выберем ε так, чтобы $x \pm \varepsilon > \alpha$. Тогда из (2) будет следовать, что $T = \sum_{p=0}^{\infty} T_p$ всюду на $F(2^{-kx})$.

Это в свою очередь означает, что $T: F(2^{-kx}) \rightarrow F(2^{-kx})$ и

$$\|T\|_{F(2^{-kx})} \leq C \frac{1}{1 - 2^{\alpha-x}}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 1.3 (об экстраполяции). Пусть T – верхнетреугольная матрица, задающая ограниченный линейный оператор в пространстве $E(2^{-k\beta})$, где E – инвариантное относительно сдвига идеальное пространство последовательностей. Тогда оператор T действует в любом пространстве $F(2^{-ky})$, где $y < \beta$, а F – инвариантное относительно сдвига идеальное пространство последовательностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эту лемму можно доказать, повторяя рассуждения доказательства леммы 1.2. Однако она просто является следствием предыдущей леммы. В самом деле, сделаем замену переменных $k := -j$. Тогда верхнетреугольная матрица оператора T превратится в нижнетреугольную. Условие $T: E(2^{-k\beta}) \rightarrow E(2^{-k\beta})$

превратится в условие $T: E(2^{j\beta}) \rightarrow E(2^{j\beta})$, что совпадает с условием $E(2^{-j\alpha}) \rightarrow E(2^{-j\alpha})$, где $-\alpha = \beta$.

В силу леммы 1.2 отсюда следует, что T действует из $F(2^{-jx})$ в $F(2^{-jx})$, где $x > \alpha = -\beta$. Возвращаясь к старому индексу k , получим, что T действует в пространстве $F(2^{kx})$, где $x > -\beta$, или, что то же, оператор T действует в пространстве $F(2^{-ky})$, где $y = -x < \beta$. Лемма доказана.

Пусть T – бесконечная матрица. Через $T^\sharp$ будем обозначать такую же матрицу, верхнетреугольная часть которой совпадает с верхнетреугольной частью T , включая главную диагональ, а нижнетреугольная часть равна нулю. Через $T^\flat$ будем обозначать $T - T^\sharp$.

ЛЕММА 1.4. Пусть линейный оператор T ограниченно действует в паре $\{E_0(2^{-k\alpha}), E_1(2^{-k\beta})\}$, где $\alpha < \beta$, а E_j – инвариантное относительно сдвига идеальное пространство последовательностей. Тогда $T = T^\sharp + T^\flat$, где

$$T^\sharp: E_1(2^{-k\beta}) \rightarrow E_1(2^{-k\beta}), \quad T^\flat: E_0(2^{-k\alpha}) \rightarrow E_0(2^{-k\alpha}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы уже отмечали, если $T: E_0(2^{-k\alpha}) \rightarrow E_0(2^{-k\alpha})$, то матрица этого оператора допускает оценку $|t_{kj}| \leq C2^{\alpha(k-j)}$.

Рассмотрим нижнетреугольную часть нашего оператора в пространстве $E_1(2^{-k\beta})$. Точнее, рассмотрим сначала p -ю диагональ нашего оператора при $p > 0$ и соответствующий оператор T_p .

Как мы уже вычисляли, из (1) следует, что $\|T_p\|_{E_1(2^{-k\beta})} \leq C2^{(\alpha-\beta)p}$, где $\beta > \alpha$. Поэтому, как и в лемме 1.2, отсюда следует, что $\sum_{p=1}^{\infty} T_p$ представляет собой ограниченный оператор в пространстве $E_1(2^{-k\beta})$, матрица которого совпадает с нижнетреугольной частью матрицы оператора T . Поэтому $T - \sum_{p=1}^{\infty} T_p = T^\sharp$ является верхнетреугольной матрицей, и оператор, ею определяемый, действует в $E_1(2^{-k\beta})$.

Аналогично, с помощью леммы 1.3 мы можем показать, что нижнетреугольная часть оператора T дает ограниченный оператор в пространстве $E_0(2^{-k\alpha})$. Лемма доказана.

Следующая лемма, видимо, является известной, однако нам не удалось найти прямой ссылки.

ЛЕММА 1.5. Если линейный оператор T ограниченно действует в паре пространств $\{E_0(2^{-k\alpha}), E_1(2^{-k\beta})\}$, где $\alpha < \beta$, а E_0 и E_1 – инвариантные относительно сдвига идеальные пространства последовательностей, то T ограниченно действует в любом пространстве $F(2^{-k\gamma})$, где $\alpha < \gamma < \beta$, а F – любое инвариантное относительно сдвига идеальное пространство последовательностей. При этом

$$\|T\|_{F(2^{-k\gamma})} \leq C\|T\|_{E_0(2^{-k\alpha})}^{1-\theta}\|T\|_{E_1(2^{-k\beta})}^{\theta},$$

где $\gamma = (1 - \theta)\alpha + \theta\beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем ограниченность оператора T в $F(2^{-k\gamma})$. В силу леммы 1.4 $T^\sharp: E_1(2^{-k\beta}) \rightarrow E_1(2^{-k\beta})$, тогда в силу леммы 1.3 $T^\sharp: F(2^{-k\gamma}) \rightarrow F(2^{-k\gamma})$, потому что $\gamma < \beta$.

Аналогично, $T^\flat: E_0(2^{-k\alpha}) \rightarrow E_0(2^{-k\alpha})$ и по лемме 1.2 $T^\flat$ ограниченно действует в $F(2^{-k\gamma})$, поскольку $\gamma > \alpha$. Следовательно, и их сумма $T = T^\sharp + T^\flat$ будет ограниченно действовать в $F(2^{-k\gamma})$.

Из теоремы Банаха о замкнутом графике следует, что

$$\|T\|_{F(2^{-k\gamma})} \leq C \max(\|T\|_{E_0(2^{-k\alpha})}, \|T\|_{E_1(2^{-k\beta})}). \quad (3)$$

Обозначим через U_m оператор сдвига вправо на m индексов, т.е. $U_m(\xi)_k = \xi_{k-m}$. Тогда

$$\begin{aligned} \|U_m T\|_{E_0(2^{-k\alpha})} &= 2^{-m\alpha} \|T\|_{E_0(2^{-k\alpha})}, & \|U_m T\|_{E_1(2^{-k\beta})} &= 2^{-m\beta} \|T\|_{E_1(2^{-k\beta})}, \\ \|U_m T\|_{F(2^{-k\gamma})} &= 2^{-m\gamma} \|T\|_{F(2^{-k\gamma})}. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу (3)

$$2^{-m\gamma} \|T\|_{F(2^{-k\gamma})} \leq C \max(2^{-m\alpha} \|T\|_{E_0(2^{-k\alpha})}, 2^{-m\beta} \|T\|_{E_1(2^{-k\beta})}),$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \|T\|_{F(2^{-k\gamma})} &\leq C \max(2^{-m(\alpha-\gamma)} \|T\|_{E_0(2^{-k\alpha})}, 2^{-m(\beta-\gamma)} \|T\|_{E_1(2^{-k\beta})}) \\ &\leq C(2^{-m(\alpha-\gamma)} \|T\|_{E_0(2^{-k\alpha})} + 2^{-m(\beta-\gamma)} \|T\|_{E_1(2^{-k\beta})}) \end{aligned} \quad (4)$$

при любом $m \in \mathbb{Z}$. Вычислив точную нижнюю грань по m в правой части (4), получим

$$\|T\|_{F(2^{-k\gamma})} \leq \tilde{C} \|T\|_{E_0(2^{-k\alpha})}^{1-\theta} \|T\|_{E_1(2^{-k\beta})}^{\theta}. \quad (5)$$

Лемма доказана.

Из леммы 1.5 моментально следует, что семейство пространств $E_\alpha(2^{-k\alpha})$ образует интерполяционную шкалу, соединяющую E_0 и $E_1(2^{-k})$ для произвольного семейства E_α инвариантных относительно сдвига идеальных пространств последовательностей.

ЛЕММА 1.6. Пусть $\{E_0(2^{-k\alpha}), E_1(2^{-k\beta})\}$ – такая же пара пространств последовательностей, что и в предыдущей лемме. Пусть $F(2^{-k\gamma})$ – интерполяционное пространство между $E_0(2^{-k\alpha})$ и $E_1(2^{-k\beta})$, удовлетворяющее условию

$$\|T\|_{F(2^{-k\gamma})} \leq C \|T\|_{E_0(2^{-k\alpha})}^{1-\theta} \|T\|_{E_1(2^{-k\beta})}^{\theta}, \quad (6)$$

где $\gamma = (1-\theta)\alpha + \theta\beta$. Тогда пространство F после эквивалентной перенормировки становится инвариантным относительно сдвига идеальным пространством последовательностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что F – идеальное пространство после эквивалентной перенормировки. Заметим, что вес $2^{-k\gamma}$ мы вставили для удобства формулировки леммы. Пусть $|\eta| \leq |\xi|$ и $\xi \in F(2^{-k\gamma})$, тогда $\eta = a\xi$, где $|a| \leq 1$. Оператор умножения на последовательность $|a|$ ограниченно действует в $E_0(2^{-k\alpha})$ и в $E_1(2^{-k\beta})$, потому что они являются идеальными пространствами последовательностей. Следовательно, по предположению леммы оператор умножения действует в $F(2^{-k\gamma})$ и, значит, $\eta = a\xi \in F(2^{-k\gamma})$. То есть пространство $F(2^{-k\gamma})$ идеально, если на нем ввести эквивалентную норму

$$\|\xi\| = \sup_{|\eta| \leq |\xi|} \|\eta\|_{F(2^{-k\gamma})}.$$

Заметим, что новая норма не испортит в принципе оценку (6). Может измениться лишь константа C .

Обозначим вновь через U_m оператор сдвига на m индексов вправо. Очевидно, что этот оператор ограничен в наших пространствах $E_0(2^{-k\alpha})$ и $E_1(2^{-k\beta})$, и его нормы мы уже вычисляли. А именно,

$$\|U_m\|_{E_0(2^{-k\alpha})} = 2^{-m\alpha} \quad \text{и} \quad \|U_m\|_{E_1(2^{-k\beta})} = 2^{-m\beta}.$$

По предположению леммы

$$\|U_m\|_{F(2^{-k\gamma})} \leq C(2^{-m\alpha})^{1-\theta}(2^{-m\beta})^\theta = C2^{-m\gamma}$$

при всех $m \in \mathbb{Z}$. То есть

$$\|U_m \xi\|_{F(2^{-k\gamma})} \leq C2^{-m\gamma} \|\xi\|_{F(2^{-k\gamma})},$$

или

$$\|2^{-k\gamma} \xi_{k-m}\|_F \leq C2^{-m\gamma} \|\xi_k 2^{-k\gamma}\|_F.$$

Обозначив $\eta_k = \xi_k 2^{-k\gamma}$, получим для любого $\eta \in F$ оценку

$$2^{-m\gamma} \|2^{-(k-m)\gamma} \xi_{k-m}\|_F \leq C2^{-m\gamma} \|\eta\|_F,$$

или $\|\eta_{k-m}\|_F \leq C\|\eta\|_F$ для всех $m \in \mathbb{Z}$. Причем C не зависит от m . Отсюда следует, что пространство F инвариантно относительно сдвига после эквивалентной перенормировки.

Действительно, на F можно теперь ввести эквивалентную норму

$$\|\eta\|_{\tilde{F}} = \sup_m \|U_m \eta\|_F,$$

которая не меняется при сдвиге. Лемма доказана.

2. Интерполяционные теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $X_0 = E_0(2^{-k\alpha})$ и $X_1 = E_1(2^{-k\beta})$, где E_j – инвариантное относительно сдвига идеальное пространство последовательностей. Пусть X_α – произвольная интерполяционная шкала, соединяющая X_0 и X_1 . Тогда для любых $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 \leq 1$ пространство X_α интерполяционно между X_{α_0} и X_{α_1} , и при этом семейство X_α образует интерполяционную шкалу между X_{α_0} и X_{α_1} , т.е.

$$\|T\|_{X_\alpha} \leq C \|T\|_{X_{\alpha_0}}^{1-\theta} \|T\|_{X_{\alpha_1}}^\theta,$$

где $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.6 пространство X_α имеет вид $F_\alpha(2^{-k\alpha})$, где F_α – инвариантное относительно сдвига идеальное пространство последовательностей с точностью до эквивалентности норм. Поэтому пара $\{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}$ имеет вид $\{F_{\alpha_0}(2^{-k\alpha_0}), F_{\alpha_1}(2^{-k\alpha_1})\}$. Значит, в силу леммы 1.5 пространство $F_\alpha(2^{-k\alpha})$ будет интерполяционно между $F_{\alpha_0}(2^{-k\alpha_0})$ и $F_{\alpha_1}(2^{-k\alpha_1})$ и будет иметь место нужная оценка для операторных норм. Теорема доказана.

Напомним, что *орбитой* элемента $x \in X_0 + X_1$ при действии операторов в паре $\{X_0, X_1\}$, обозначаемой $\text{Orb}(x, \{X_0, X_1\})$, называется пространство всех $y \in X_0 + X_1$, имеющих вид $y = Tx$, где T пробегает множество всех линейных ограниченных операторов, действующих в паре $\{X_0, X_1\}$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть X_α – интерполяционная шкала, соединяющая пространства $X_0 = E_0(2^{-k\alpha})$ и $X_1 = E_1(2^{-k\beta})$, где E_0 и E_1 – инвариантные относительно сдвига идеальные пространства последовательностей. Пусть X_{α_0} и X_{α_1} – два элемента этой шкалы. Тогда для каждого $\xi \in X_{\alpha_0} + X_{\alpha_1}$ выполнено равенство

$$\text{Orb}(\xi, \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}) = \text{Orb}(\xi, \{X_0, X_{\alpha_1}\}) + \text{Orb}(\xi, \{X_{\alpha_0}, X_1\}). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq 1$. Если оператор S ограничен в паре $\{X_0, X_{\alpha_1}\}$, то в силу теоремы 2.1 он ограничен в X_{α_0} . Поэтому

$$\text{Orb}(\xi, \{X_0, X_{\alpha_1}\}) \subset \text{Orb}(\xi, \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}).$$

Аналогично,

$$\text{Orb}(\xi, \{X_{\alpha_0}, X_1\}) \subset \text{Orb}(\xi, \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}).$$

Поэтому

$$\text{Orb}(\xi, \{X_0, X_{\alpha_1}\}) + \text{Orb}(\xi, \{X_{\alpha_0}, X_1\}) \subset \text{Orb}(\xi, \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}).$$

Значит, для доказательства (7) нам остается проверить вложение

$$\text{Orb}(\xi, \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}) \subset \text{Orb}(\xi, \{X_0, X_{\alpha_1}\}) + \text{Orb}(\xi, \{X_{\alpha_0}, X_1\}).$$

Пусть оператор T действует в паре $\{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}$, которая в силу леммы 1.6 совпадает с парой $\{F_{\alpha_0}(2^{-k\gamma}), F_{\alpha_1}(2^{-k\delta})\}$ для некоторых F_{α_0} и F_{α_1} , являющихся инвариантными относительно сдвига идеальными пространствами последовательностей, и

$$\gamma = (1 - \alpha_0)\alpha + \alpha_0\beta, \quad \delta = (1 - \alpha_1)\alpha + \alpha_1\beta.$$

Тогда по лемме 1.4 $T = T^\sharp + T^\flat$, где

$$T^\sharp: F_{\alpha_0}(2^{-k\gamma}) \rightarrow F_{\alpha_0}(2^{-k\gamma}), \quad T^\flat: F_{\alpha_1}(2^{-k\delta}) \rightarrow F_{\alpha_1}(2^{-k\delta}).$$

Но тогда по лемме 1.3 оператор $T^\sharp$ действует в $E_0(2^{-k\alpha})$, поскольку $\alpha < \delta$. Оператор $T^\flat$ ограниченно действует в $E_1(2^{-k\beta})$ в силу леммы 1.2, поскольку $\beta > \gamma$. Значит,

$$T^\sharp: \{X_0, X_{\alpha_1}\} \rightarrow \{X_0, X_{\alpha_1}\}, \quad T^\flat: \{X_{\alpha_0}, X_1\} \rightarrow \{X_{\alpha_0}, X_1\}.$$

Следовательно, для любого $T\xi \in \text{Orb}(\xi, \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\})$, $T\xi = T^\sharp\xi + T^\flat\xi$, где $T^\sharp\xi \in \text{Orb}(\xi, \{X_0, X_{\alpha_1}\})$, а $T^\flat\xi \in \text{Orb}(\xi, \{X_{\alpha_0}, X_1\})$, т.е.

$$\text{Orb}(\xi, \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}) \subset \text{Orb}(\xi, \{X_0, X_{\alpha_1}\}) + \text{Orb}(\xi, \{X_{\alpha_0}, X_1\}).$$

Теорема доказана.

Обозначим через $\text{Int}(\{X_0, X_1\})$ множество всех интерполяционных пространств пары $\{X_0, X_1\}$.

ТЕОРЕМА 2.3. *Если пространства пары $\{X_0, X_1\}$ имеют вид $X_0 = E_0(2^{-k\alpha})$ и $X_1 = E_1(2^{-k\beta})$, где E_0 и E_1 – инвариантные относительно сдвига идеальные пространства последовательностей, то для любых $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq 1$ выполнено равенство*

$$\text{Int}(\{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}) = \text{Int}(\{X_0, X_{\alpha_1}\}) \cap \text{Int}(\{X_{\alpha_0}, X_1\}).$$

Эта теорема напоминает классический результат Арази и Цвикеля об описании интерполяционных пространств между L_p и L_q (см. [3]). На самом деле, как будет показано ниже, теорема Арази–Цвикеля вытекает из теоремы 2.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложение

$$\text{Int}(\{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}) \subset \text{Int}(\{X_0, X_{\alpha_1}\}) \cap \text{Int}(\{X_{\alpha_0}, X_1\})$$

очевидно, поскольку X_{α_0} интерполяционно между X_0 и X_{α_1} , а X_{α_1} интерполяционно между X_{α_0} и X_1 в силу теоремы 2.1.

Пусть $X \in \text{Int}(\{X_0, X_{\alpha_1}\}) \cap \text{Int}(\{X_{\alpha_0}, X_1\})$ и $\xi \in X$. Тогда $\text{Orb}(\xi, \{X_0, X_{\alpha_1}\}) \subset X$ и $\text{Orb}(\xi, \{X_{\alpha_0}, X_1\}) \subset X$. Поэтому

$$\text{Orb}(\xi, \{X_0, X_{\alpha_1}\}) + \text{Orb}(\xi, \{X_{\alpha_0}, X_1\}) \subset X,$$

и в силу теоремы 2.2 $\text{Orb}(\xi, \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}) \subset X$, т.е. X – интерполяционное пространство между X_{α_0} и X_{α_1} .

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.4. *Пусть X_α – интерполяционная шкала, соединяющая пространства $X_0 = L_{p_0}(U_0)$ и $X_1 = L_{p_1}(U_1)$, где $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, а U_0, U_1 – какие-то веса. Тогда для любых $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 \leq 1$ пространство X_α интерполяционно между X_{α_0} и X_{α_1} , и*

$$\|T\|_{X_\alpha} \leq C_\alpha \|T\|_{X_{\alpha_0}}^{1-\theta} \|T\|_{X_{\alpha_1}}^\theta,$$

где $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, для любого линейного оператора T , действующего в паре $\{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Спарра [4] пара $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ является частичным ретрактом пары $\{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-k})\}$. Это значит, что для любого элемента $x \in L_{p_0}(U_0) + L_{p_1}(U_1)$ найдется такой элемент $\xi \in l_{p_0} + l_{p_1}(2^{-k})$ и ограниченные операторы

$$T: \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-k})\}, \quad S: \{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-k})\} \rightarrow \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\},$$

что

$$Tx = \xi, \quad S\xi = x. \quad (8)$$

Рассмотрим шкалу функторов $\mathcal{F}_\alpha$, порожденную интерполяционной шкалой X_α , соединяющей X_0 и X_1 . Обозначим $Y_\alpha = \mathcal{F}_\alpha(l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-k}))$. Интерполяционная шкала Y_α соединяет l_{p_0} и $l_{p_1}(2^{-k})$, и поэтому по теореме 2.1 пространство Y_α интерполяционно между Y_{α_0} и Y_{α_1} и имеет место степенная оценка нормы интерполируемого оператора.

Рассмотрим произвольный линейный оператор

$$U: \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\} \rightarrow \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}$$

и произвольный элемент $x \in X_\alpha \subset X_{\alpha_0} + X_{\alpha_1}$. Тогда соответствующая последовательность $\xi \in L_{p_0}(U_0) + L_{p_1}(U_1)$ будет принадлежать $X_{\alpha_0} + X_{\alpha_1}$. Обозначим $y = Ux$ и η – такой элемент из $l_{p_0} + l_{p_1}(2^{-k})$, что

$$K(t, \eta, \{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-k})\}) \asymp K(t, y, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}).$$

По теореме Спарра [4] найдутся линейные операторы

$$T_1: \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-k})\} \quad \text{и} \quad S_1: \{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-k})\} \rightarrow \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$$

такие, что $T_1 y = \eta$ и $S_1 \eta = y$.

Оператор

$$T_1 U S: \{Y_{\alpha_0}, Y_{\alpha_1}\} \rightarrow \{Y_{\alpha_0}, Y_{\alpha_1}\},$$

поэтому

$$T_1 U S: Y_\alpha \rightarrow Y_\alpha.$$

Следовательно, $\eta = T_1 U S \xi \in Y_\alpha$. Но тогда $y = Ux = S_1 \eta \in X_\alpha$ в силу интерполяционности функтора $\mathcal{F}_\alpha$.

Степенная оценка для нормы оператора U легко следует из соответствующей оценки нормы оператора $T_1 U S$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть пространства пары $\{X_0, X_1\}$ имеют вид $X_0 = L_{p_0}(U_0)$ и $X_1 = L_{p_1}(U_1)$. Тогда для любой интерполяционной шкалы, соединяющей X_0 и X_1 , справедливо равенство

$$\text{Orb}(x, \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}) = \text{Orb}(x, \{X_0, X_{\alpha_1}\}) + \text{Orb}(x, \{X_{\alpha_0}, X_1\})$$

для любых $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq 1$ и $x \in X_{\alpha_0} + X_{\alpha_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теми же обозначениями, что и в предыдущей теореме. Интерполяционная шкала Y_α соединяет l_{p_0} и $l_{p_1}(2^{-k})$, поэтому к ней можно применить теорему 2.2 и получить, что для каждого $\xi \in Y_{\alpha_0} + Y_{\alpha_1}$

$$\text{Orb}(\xi, \{Y_{\alpha_0}, Y_{\alpha_1}\}) = \text{Orb}(\xi, \{l_{p_0}, Y_{\alpha_1}\}) + \text{Orb}(\xi, \{Y_{\alpha_0}, l_{p_1}(2^{-k})\}). \quad (9)$$

Пусть $x \in X_{\alpha_0} + X_{\alpha_1}$, тогда в силу (8) и интерполяционности функтора $\mathcal{F}_\alpha$ получим, что $\xi = Tx \in Y_{\alpha_0} + Y_{\alpha_1}$, и поэтому справедливо (9). Мы же хотим проверить равенство

$$\text{Orb}(x, \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}) = \text{Orb}(x, \{X_0, X_{\alpha_1}\}) + \text{Orb}(x, \{X_{\alpha_0}, X_1\}).$$

Как уже отмечалось, очевидно

$$\text{Orb}(x, \{X_0, X_{\alpha_1}\}) + \text{Orb}(x, \{X_{\alpha_0}, X_1\}) \subset \text{Orb}(x, \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\})$$

в силу интерполяционности шкалы X_α теоремы 2.4. Поэтому нужно доказать лишь вложение

$$\text{Orb}(x, \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}) \subset \text{Orb}(x, \{X_0, X_{\alpha_1}\}) + \text{Orb}(x, \{X_{\alpha_0}, X_1\}).$$

Пусть $y = Ax$, где

$$A: \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\} \rightarrow \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}.$$

Для элемента y найдем соответствующий элемент $\eta \in l_{p_0} + l_{p_1}(2^{-k})$ и операторы

$$T_1: \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-k})\} \quad \text{и} \quad S_1: \{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-k})\} \rightarrow \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$$

такие, что $T_1 y = \eta$ и $S_1 \eta = y$.

Оператор $T_1 A S$ действует в паре $\{Y_{\alpha_0}, Y_{\alpha_1}\}$ и переводит ξ в η . Тогда в силу (4) мы найдем операторы

$$B_0: \{l_{p_0}, Y_{\alpha_1}\} \rightarrow \{l_{p_0}, Y_{\alpha_1}\}, \quad B_1: \{Y_{\alpha_0}, l_{p_1}(2^{-k})\} \rightarrow \{Y_{\alpha_0}, l_{p_1}(2^{-k})\}$$

такие, что $\eta = B_0 \xi + B_1 \xi$. Но тогда

$$y = S_1 \eta = S_1 B_0 \xi + S_1 B_1 \xi = S_1 B_0 T x + S_1 B_1 T x.$$

Оператор $S_1 B_0 T$ действует в паре $\{X_0, X_{\alpha_1}\}$, а оператор $S_1 B_1 T$ действует в паре $\{X_{\alpha_0}, X_1\}$. Следовательно,

$$y \in \text{Orb}(x, \{X_0, X_{\alpha_1}\}) + \text{Orb}(x, \{X_{\alpha_0}, X_1\}),$$

что и требовалось.

Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{M}$ – пространство с мерой μ , а U – строго положительная измеримая функция (вес) на $\mathfrak{M}$. Через $L_p(U)$ мы будем обозначать пространство измеримых функций f таких, что

$$\int_{\mathfrak{M}} (|f|U)^p d\mu < \infty$$

при $1 \leq p < \infty$, и $fU \in L_\infty$, если $p = \infty$, с естественной нормой.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть пространства пары $\{X_0, X_1\}$ имеют вид $X_0 = L_{p_0}(U_0)$, $X_1 = L_{p_1}(U_1)$, где $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, а U_0, U_1 – какие-то веса. Тогда для любой интерполяционной шкалы, соединяющей X_0 и X_1 , справедливо равенство

$$\text{Int}(\{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}) = \text{Int}(\{X_0, X_{\alpha_1}\}) \cap \text{Int}(\{X_{\alpha_0}, X_1\})$$

для любых $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq 1$.

Эта теорема так же следует из теоремы 2.5, как теорема 2.3 следовала из теоремы 2.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если взять, в частности, комплексную шкалу, соединяющую L_∞ и L_1 , то получится теорема Арази–Цвикеля.

Более того, справедливо некоторое усиление теоремы 2.6.

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть X_α – произвольная интерполяционная шкала, соединяющая весовые пространства L_p . Тогда для любых отрезков $[\alpha_0, \alpha_1] \subset [\beta_0, \beta_1] \subset [0, 1]$ справедливо равенство

$$\text{Int}(\{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}) = \text{Int}(\{X_{\beta_0}, X_{\alpha_1}\}) \cap \text{Int}(\{X_{\alpha_0}, X_{\beta_1}\}).$$

Утверждения, подобные теоремам 2.5–2.7, могут быть перенесены и на пары более сложной природы.

Напомним, что для произвольной банаховой пары $\{A_0, A_1\}$ пара пространств

$$\{(A_0, A_1)_{\theta_0, p_0}, (A_0, A_1)_{\theta_1, p_1}\}, \quad \text{где } 0 < \theta_0, \theta_1 < 1,$$

является частичным ретрактом пары $\{l_{p_0}(2^{-k\theta_0}), l_{p_1}(2^{-k\theta_1})\}$ (см., например, [5]). Это значит, что для любого $x \in (A_0, A_1)_{\theta_0, p_0} + (A_0, A_1)_{\theta_1, p_1}$ найдется $\xi \in l_{p_0}(2^{-k\theta_0}) + l_{p_1}(2^{-k\theta_1})$ и ограниченные операторы

$$\begin{aligned} T: \{(A_0, A_1)_{\theta_0, p_0}, (A_0, A_1)_{\theta_1, p_1}\} &\rightarrow \{l_{p_0}(2^{-k\theta_0}), l_{p_1}(2^{-k\theta_1})\}, \\ S: \{l_{p_0}(2^{-k\theta_0}), l_{p_1}(2^{-k\theta_1})\} &\rightarrow \{(A_0, A_1)_{\theta_0, p_0}, (A_0, A_1)_{\theta_1, p_1}\} \end{aligned}$$

такие, что $\xi = Tx$ и $x = S\xi$. (На самом деле $\xi = \{K(2^k, x, \{A_0, A_1\})\}$, где $K(t, x, \{A_0, A_1\})$ – K -функционал пары $\{A_0, A_1\}$.)

Таким образом, мы находимся в ситуации, аналогичной той, в которой находились перед теоремой 2.5. По этой причине мы можем теперь, не повторяя соответствующих доказательств, утверждать, что справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть X_α – интерполяционная шкала, соединяющая пространства $X_0 = (A_0, A_1)_{\theta_0, p_0}$ и $X_1 = (A_0, A_1)_{\theta_1, p_1}$. Тогда для любого $x \in X_{\theta_0} + X_{\theta_1}$

$$\text{Orb}(x, \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}) = \text{Orb}(x, \{X_0, X_{\alpha_1}\}) + \text{Orb}(x, \{X_{\alpha_0}, X_1\}).$$

ТЕОРЕМА 2.9. Пусть X_α – интерполяционная шкала, соединяющая пространства $X_0 = (A_0, A_1)_{\theta_0, p_0}$ и $X_1 = (A_0, A_1)_{\theta_1, p_1}$. Тогда для любых отрезков $[\alpha_0, \alpha_1] \subset [\beta_0, \beta_1] \subset [0, 1]$ выполнено равенство

$$\text{Int}(\{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}) = \text{Int}(\{X_{\beta_0}, X_{\alpha_1}\}) \cap \text{Int}(\{X_{\alpha_0}, X_{\beta_1}\}).$$

Авторы благодарны рецензенту за замечания, которые улучшили текст данной статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.
- [2] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [3] Y. Arazy, M. Cwikel, “A new characterization of the interpolation spaces between L_p and L_q ”, *Math. Scand.*, **55**:2 (1984), 253–270.
- [4] G. Sparr, “Interpolation of weighted L_p spaces”, *Studia Math.*, **62** (1978), 229–271.
- [5] V. I. Ovchinnikov, “The method of orbits in interpolation theory”, *Math. Rep. Ser. 1*, **1**:2 (1984), 349–515.

Ю. Н. Быков

Курский государственный университет

Поступило

27.07.2005

В. И. Овчинников

Воронежский государственный университет

Исправленный вариант

25.01.2006