Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Вожжов, В. А. Ногин, Обращение некоторых операторов типа потенциала с символами, вырождающимися на гиперболоидах или параболоидах, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 6, 814–824

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 17:01:34

УДК 517.983

ОБРАЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА С СИМВОЛАМИ, ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ НА ГИПЕРБОЛОИДАХ ИЛИ ПАРАБОЛОИДАХ

Д. В. Вожжов, В. А. Ногин

Метод аппроксимативных обратных операторов применяется для обращения некоторых операторов типа потенциала с символами, вырождающимися на гиперболоидах или параболоидах. В рамках этого метода обращение строится как предел последовательности сверток с суммируемыми ядрами, которые выражаются через элементарные или специальные функции.

Библиография: 12 названий.

В статье методом аппроксимативных обратных операторов (АОО) строится обращение некоторых многомерных операторов типа потенциала в рамках пространств $L_p \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$. Символы рассматриваемых потенциалов вырождаются на гиперболоидах или параболоидах.

В настоящее время имеется ряд работ по применению метода АОО к обращению операторов типа потенциала

$$(K_\theta^\alpha \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta(x-t)}{|x-t|^{n-\alpha}} \varphi(t) dt, \quad (0.1)$$

$0 < \alpha < n$, с достаточно гладкими ограниченными характеристиками $\theta(t)$ в неэллиптическом случае. Обзор некоторых из этих работ дан в книге [1] и обзорных статьях [2], [3]. В частности, в [4] получена формула обращения потенциалов (0.1) в неэллиптическом случае, когда их символы вырождаются на произвольном, меры нуль, множестве в $\mathbb{R}^n$. Однако эта формула довольно громоздка и не позволяет эффективно строить обращение потенциалов в случае вырождения их символов на конкретных множествах. К настоящему времени известно только два случая такого более эффективного обращения (по сравнению с упомянутой общей формулой), когда символ рассматриваемого оператора вырождается на гиперплоскости или конусе (см. [5], [6]). При этом существенно использовалась однородность символа указанного оператора.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00862.

© Д. В. Вожжов, В. А. Ногин, 2006

Здесь рассматриваются операторы типа потенциала S^α и M^α , определяемые в образах Фурье равенствами

$$\widehat{S^\alpha \varphi}(\xi) = \frac{r^2(\xi) + a}{|\xi|^{\alpha+2}} \widehat{\varphi}(\xi), \quad 0 < \alpha < n - 2, \quad a > 0, \quad r^2(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2 - \dots - \xi_n^2, \quad (0.2)$$

$$\widehat{M^\alpha \varphi}(\xi) = \frac{\xi_n - |\xi'|^2}{|\xi|^{\alpha+2}} \widehat{\varphi}(\xi), \quad 0 < \alpha < n - 1, \quad (0.3)$$

$\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $\varphi \in \Phi$, где Φ – класс Лизоркина (см. [7; § 3]), состоящий из шварцевых функций, ортогональных многочленам.

Операторы S^α и M^α представимы в виде суммы риссовых потенциалов вида (0.1) с однородными характеристиками (разных порядков) и трактуются на функциях $\varphi \in L_p$ как сумма указанных операторов.

В рамках метода АОО разрабатывается новый подход, позволяющий построить обращение потенциалов $S^\alpha \varphi$, $M^\alpha \varphi$ с L_p -плотностями в виде предела последовательности сверток с суммируемыми ядрами, для которых получены явные выражения через элементарные или специальные функции. Это обстоятельство существенно используется при доказательстве формул обращения.

1. Вспомогательные сведения

1.1. Обозначения. Пусть $(W_\varepsilon \varphi)(x) = (w(\cdot, \varepsilon) * \varphi)(x)$ – интеграл Гаусса–Вейерштрасса, где $w(x, \varepsilon) = (4\pi\varepsilon)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4\varepsilon)}$ – ядро Гаусса–Вейерштрасса;

$$(F\varphi)(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{i\xi \cdot x} dx$$

– преобразование Фурье функции $\varphi(x)$;

$$(F^{-1}\varphi)(x) = \widetilde{\varphi} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{-ix \cdot \xi} d\xi$$

– обратное преобразование Фурье;

$$L_{p,\gamma} = \{f(x) : (1 + |x|^2)^{-\gamma/p} f(x) \in L_p\}, \quad \gamma > 0;$$

$$L_p + L_q = \{f : f = f_0 + f_1, \quad f_0 \in L_p, \quad f_1 \in L_q\}, \quad \|f\|_{L_p+L_q} = \inf\{\|f_0\|_p + \|f_1\|_q\},$$

где нижняя грань берется по всевозможным представлениям f в виде суммы $f_0 + f_1$; S – пространство Шварца быстро убывающих гладких функций.

Через $\sqrt{z}$ обозначается главная ветвь рассматриваемой двузначной функции, аналитическая в комплексной плоскости с разрезом по отрицательной вещественной полуоси.

1.2. Об аналитичности интеграла по параметру. Следующее утверждение хорошо известно.

ЛЕММА 1.1. Пусть функция $f(x, z)$ аналитична по z в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ и имеет суммируемую мажоранту: $|f(x, z)| \leq F(x) \in L_1$. Тогда интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} f(x, z) dx$ аналитичен по z в области D .

1.3. Равномерные оценки для функции Макдональда. В дальнейшем нам понадобятся равномерные оценки для функции Макдональда $K_\nu(z)$.

ЛЕММА 1.2 [8]. Пусть $|\operatorname{Re} \nu| \leq M$, $|\operatorname{Im} \nu| \leq N$, где M и N – произвольные положительные числа. Тогда справедливы оценки

$$|K_\nu(z)| \leq C(M) e^{7\pi |\operatorname{Im} \nu|/2} \begin{cases} C_\delta |z|^{-|\operatorname{Re} \nu|}, & \operatorname{Re} \nu \geq \delta, \delta \in (0, M), |z| < 1, \\ |z|^{-\operatorname{Re} \nu} \left(C(M) + \ln \frac{1}{|z|} \right), & |\operatorname{Re} \nu| \geq 0, |z| < 1, \\ e^{-\operatorname{Re} z} |z|^{-1/2}, & |z| > 1, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где постоянные $C(M)$ и C_δ не зависят от ν .

1.4. Об одном операторе свертки с функцией Макдональда в ядре. При обращении потенциалов $S^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p$, существенно используется следующая

ЛЕММА 1.3. Пусть $\varphi \in S$. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{\varphi}(\xi) e^{-i\xi \cdot x}}{r^2(\xi) + a + i\varepsilon |\xi|^2} d\xi \\ &= C_n(\varepsilon) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{K_{(n-2)/2}(\sqrt{a/(1+\varepsilon^2)} \sqrt{r^2(y) - i\varepsilon |y|^2})}{(r^2(y) - i\varepsilon |y|^2)^{(n-2)/4}} \varphi(x-y) dy, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$C_n(\varepsilon) = \frac{a^{(n-2)/4} (1+\varepsilon^2)^{(n-2)/4}}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{1+i\varepsilon} (-1+i\varepsilon)^{(n-1)/2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (1.2) будет следовать из более общей формулы

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\overline{\widehat{\varphi}(\xi)}}{(z + \sum_{k=1}^n \gamma_k \xi_k^2)^{\alpha/2}} d\xi \\ &= \frac{z^{(n-\alpha)/4}}{\prod_{k=1}^n \sqrt{\gamma_k} A_n(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{K_{(n-\alpha)/2}(\sqrt{z} \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2 / \gamma_k})}{(\sum_{k=1}^n x_k^2 / \gamma_k)^{(n-\alpha)/4}} \overline{\varphi(x)} dx, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $-\infty < \operatorname{Re} \gamma_k < +\infty$, $\operatorname{Im} \gamma_k > 0$, $k = 1, \dots, n$, $A_n(\alpha) = (2\pi)^{n/2} 2^{\alpha/2-1} \Gamma(\alpha/2)$.

Для доказательства (1.3) докажем вначале вспомогательное равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(z + i \sum_{k=1}^n \beta_k \xi_k^2 \right)^{-\alpha/2} e^{ix \cdot \xi} d\xi = \frac{(2\pi)^n z^{(n-\alpha)/4}}{\prod_{k=1}^n \sqrt{i\beta_k} A_n(\alpha)} \frac{K_{(n-\alpha)/2}(\sqrt{z} \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2 / (i\beta_k)})}{(\sum_{k=1}^n x_k^2 / (i\beta_k))^{(n-\alpha)/4}}, \quad (1.4)$$

$\operatorname{Re} \alpha > n$, $\beta_k > 0$, $k = 1, \dots, n$. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(z + i \sum_{k=1}^n \beta_k \xi_k^2 \right)^{-\alpha/2} e^{ix \cdot \xi} d\xi = \frac{e^{-\alpha\pi i/4}}{\prod_{k=1}^n \sqrt{\beta_k}} \int_{\mathbb{R}^n} (-iz + |t|^2)^{-\alpha/2} e^{i(x/\sqrt{\beta}) \cdot t} dt,$$

где обозначено

$$\frac{x}{\sqrt{\beta}} = \left(\frac{x_1}{\sqrt{\beta_1}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{\beta_n}} \right).$$

Применяя формулу Бохнера, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(z + i \sum_{k=1}^n \beta_k \xi_k^2 \right)^{-\alpha/2} e^{ix \cdot \xi} d\xi = \frac{e^{-\alpha\pi i/4}}{\prod_{k=1}^n \sqrt{\beta_k}} \frac{(2\pi)^{n/2}}{|x/\sqrt{\beta}|^{n/2-1}} \int_0^\infty \frac{\rho^{n/2} J_{n/2-1}(\rho|x/\sqrt{\beta}|)}{(-iz + \rho^2)^{\alpha/2}} d\rho.$$

Вычисляя интеграл в правой части с помощью формулы 2.12.4.28 из [9] (с учетом того, что $\operatorname{Re} \sqrt{-iz} > 0$), получаем (1.4).

Из (1.4) вытекает равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \left(z + \sum_{k=1}^n \gamma_k \xi_k^2 \right)^{-\alpha/2} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= \frac{(2\pi)^n z^{(n-\alpha)/4}}{\prod_{k=1}^n \sqrt{\gamma_k} A_n(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{K_{(n-\alpha)/2}(\sqrt{z} \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2/\gamma_k})}{(\sum_{k=1}^n x_k^2/\gamma_k)^{(n-\alpha)/4}} \overline{\varphi(x)} dx, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\operatorname{Re} \alpha > n$, $\gamma_k = i\beta_k$, $\beta_k > 0$. Заметим далее, что интегралы в обеих частях (1.5) аналитичны по α в полуплоскости $\operatorname{Re} \alpha > 0$. (Аналитичность интеграла в правой части проверяется с помощью леммы 1.1, применимой с учетом равномерных оценок (1.1); аналитичность интеграла в левой части очевидна). Тогда равенство (1.5) справедливо для всех α , $\operatorname{Re} \alpha > 0$.

Последовательным аналитическим продолжением по γ_k обеих частей (1.5) в полуплоскость $\operatorname{Im} \gamma_k > 0$, получаем (1.3).

Полагая в (1.3) $z = a$, $\gamma_1 = 1 + i\varepsilon$, $\gamma_k = -1 + i\varepsilon$, $k = 2, \dots, n$, где $0 < \varepsilon < 1$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{(r^2(\xi) + a + i\varepsilon|\xi|^2)^{\alpha/2}} d\xi \\ &= C_{n,\alpha}(\varepsilon) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{K_{(n-\alpha)/2}(\sqrt{a/(1+\varepsilon^2)} \sqrt{r^2(y) - i\varepsilon|y|^2})}{(r^2(y) - i\varepsilon|y|^2)^{(n-\alpha)/4}} \overline{\varphi(y)} dy, \end{aligned}$$

где $\operatorname{Re} \alpha > 0$,

$$C_{n,\alpha}(\varepsilon) = \frac{a^{(n-\alpha)/4} (1 + \varepsilon^2)^{(n-\alpha)/4}}{A_n(\alpha) \sqrt{1 + i\varepsilon} (-1 + i\varepsilon)^{(n-1)/2}},$$

откуда следует равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{\varphi}(\xi) e^{-ix \cdot \xi}}{(r^2(\xi) + a + i\varepsilon|\xi|^2)^{\alpha/2}} d\xi \\ &= C_{n,\alpha}(\varepsilon) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{K_{(n-\alpha)/2}(\sqrt{a/(1+\varepsilon^2)} \sqrt{r^2(y) - i\varepsilon|y|^2})}{(r^2(y) - i\varepsilon|y|^2)^{(n-\alpha)/4}} \varphi(x - y) dy. \end{aligned} \quad (1.6)$$

При $\alpha = 2$ (1.6) дает (1.2).

Обозначим оператор в правой части (1.2) через $\mathbf{B}_\varepsilon$. Заметим, что ядро $b_\varepsilon(y)$ этого оператора принадлежит L_1 ; это следует из оценок (1.1). Тогда

$$\widehat{(\mathbf{B}_\varepsilon \varphi)}(\xi) = \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{r^2(\xi) + a + i\varepsilon|\xi|^2}, \quad \varphi \in S. \quad (1.7)$$

2. Действие операторов S^α и M^α в L_p -пространствах

С помощью формулы (32) из [10; с. 89] легко установить равенство

$$S^\alpha \varphi = K_\theta^\alpha \varphi + a K^{\alpha+2} \varphi, \quad (2.1)$$

$0 < \alpha < n - 2$, $\varphi \in \Phi$, где $K^{\alpha+2}$ – потенциал Рисса порядка $\alpha + 2$, K_θ^α – потенциал Рисса с однородной характеристикой

$$\begin{aligned} \theta(t') &= c_1 + c_2 r^2(t'), \quad \text{где} \quad t' = \frac{t}{|t|}, \quad c_1 = \frac{(\alpha + 2 - n)(n - 2)}{\gamma_n(\alpha + 2)}, \\ c_2 &= \frac{(\alpha + 2 - n)(n - \alpha)}{\gamma_n(\alpha + 2)}, \quad \gamma_n(\alpha) = \pi^{n/2} 2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{n - \alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

В соответствии со сказанным выше, потенциал S^α на функциях из L_p , $1 \leq p < n/(\alpha + 2)$, будем понимать, как оператор в правой части (2.1). Используя стандартный прием, основанный на применении оператора растяжения (см. [10; с. 139]), легко показать, что оператор S^α не ограничен из L_p в L_q ни для каких p и q , $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Однако в силу теоремы Соболева (см. [11]) этот оператор ограничен из L_p в $L_{p_\alpha} + L_{p_{\alpha+2}}$, где $1 < p < n/(\alpha + 2)$, $p_\alpha = np/(n - \alpha p)$. Кроме того, легко заметить, что оператор в правой части (2.1) ограничен из L_1 в $L_1 + L_q$, $q > n/(n - \alpha - 2)$.

Аналогично, оператор M^α на функциях из L_p понимается следующим образом:

$$M^\alpha \varphi = K_{\theta_1}^\alpha \varphi + K_{\theta_2}^\alpha \varphi,$$

где $0 < \alpha < n - 1$, $\varphi \in L_p$, $1 \leq p < n/(\alpha + 1)$, однородные характеристики $\theta_1(t')$ и $\theta_2(t')$, бесконечно дифференцируемые в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, выписываются явно. При такой трактовке оператор M^α ограничен из L_p в $L_{p_\alpha} + L_{p_{\alpha+1}}$, если $1 < p < n/(\alpha + 1)$ и из L_1 в $L_1 + L_q$, если $q > n/(n - \alpha - 1)$.

3. Обращение потенциалов $S^\alpha \varphi$ с L_p -плотностями

3.1. Общий случай. Обращение потенциалов $f = S^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p$, будем строить в виде

$$T^\alpha f = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(L_p) (L_2)} T_{\varepsilon, \delta}^\alpha f, \quad (3.1)$$

где

$$(T_{\varepsilon, \delta}^\alpha f)(x) = (R_\delta^\alpha \mathbf{B}_\varepsilon f)(x),$$

R_δ^α – оператор свертки с ядром

$$r_{\alpha, \delta}(|y|) = F^{-1}(|\xi|^{\alpha+2} e^{-\delta|\xi|^2})(|y|). \quad (3.2)$$

Применяя формулу Бохнера, а затем формулу 2.9.12.3 из [9], получаем

$$r_{\alpha, \delta}(|y|) = \frac{2^{-n} \Gamma((\alpha + n)/2)}{\pi^{n/2} \Gamma(n/2)} \delta^{-(\alpha+n)/2} {}_1F_1\left(\frac{\alpha + n}{2}, \frac{n}{2}; -\frac{|y|^2}{4\delta}\right),$$

где ${}_1F_1(a, b; z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

Заметим, что $r_{\alpha, \delta}(|y|) \in L_1$. Это следует из того, что ядро $r_{\alpha, \delta}(|y|)$ непрерывно в $\mathbb{R}^n$ и на бесконечности допускает оценку

$$\left| {}_1F_1\left(\frac{\alpha + n}{2}, \frac{n}{2}; -\frac{|y|^2}{4\delta}\right) \right| \leq C|y|^{-\alpha-n},$$

вытекающую из асимптотического разложения функции ${}_1F_1(a, b; z)$, $z \rightarrow -\infty$ (см. [12; с. 266]).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $0 < \alpha < n - 2$, $1 \leq p < n/(\alpha + 2)$, $p \leq 2$, $\varphi \in L_p$. Тогда справедлива формула обращения

$$(T^\alpha S^\alpha \varphi)(x) = \varphi(x), \quad (3.3)$$

где T^α – оператор (3.1). Предел по L_p -норме в (3.1) можно заменить пределом почти всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (3.3) будет следовать из представления

$$(T_{\varepsilon, \delta}^\alpha S^\alpha \varphi)(x) = (W_\delta \varphi)(x) - i\varepsilon (B_{\varepsilon, \delta} W_{\delta/2} \varphi)(x), \quad (3.4)$$

где $B_{\varepsilon, \delta}$ – ограниченный в L_2 оператор, порожденный 2-мультипликатором

$$\frac{|\xi|^2 e^{-\delta|\xi|^2/2}}{r^2(\xi) + a + i\varepsilon|\xi|^2}.$$

При $p > 1$ равенство (3.4) проверяется на плотном в L_p множестве Φ переходом к образам Фурье с учетом (1.7) и (3.2). Это равенство распространяется по ограниченности на все L_p , $1 < p < n/(\alpha + 2)$, в силу того, что операторы в обеих частях (3.4) ограничены из L_p в $L_{1, \gamma}$ при некотором $\gamma > 0$.

В случае $p = 1$ равенство (3.4) устанавливается вначале в смысле Φ' -распределений. Далее, как и при $p > 1$, замечаем, что функции в обеих частях (3.4) принадлежат $L_{1, \gamma}$ при некотором γ , $0 < \gamma < n$. Так как две локально интегрируемые функции (из S'), совпадающие в смысле Φ' , могут различаться разве лишь многочленом, а пространство $L_{1, \gamma}$ при $\gamma < n$ многочленов не содержит, то равенство (3.4) справедливо для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(L_2)} i\varepsilon B_{\varepsilon, \delta} W_{\delta/2} \varphi = 0, \quad (3.5)$$

$\varphi \in L_p$, $1 \leq p \leq 2$.

С учетом того, что $W_{\delta/2} \varphi \in L_2$ для $\varphi \in L_p$, $1 \leq p \leq 2$, в силу равенства Парсеваля имеем

$$\|i\varepsilon B_{\varepsilon, \delta} W_{\delta/2} \varphi\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varepsilon^2 |\xi|^4 e^{-\delta|\xi|^2/2} |(\widehat{W_{\delta/2} \varphi})(\xi)|^2}{(r^2(\xi) + a)^2 + \varepsilon^2 |\xi|^4} d\xi.$$

Переходя в интеграле в правой части к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ на основании мажорантной теоремы Лебега, получаем (3.5).

Так как $(W_\delta \varphi)(x) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \varphi(x)$ по норме L_p или почти всюду, то последующий предельный переход в (3.4) при $\delta \rightarrow 0$ дает (3.3).

3.2. Случай $n = 3$. В случае $n = 3$ обращение потенциалов $f = S^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p$, можно построить более эффективно (по сравнению с (3.1)).

Именно, левый обратный к S^α оператор будем строить в виде

$$T^\alpha f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon^\alpha f, \quad (3.6)$$

где

$$(T_\varepsilon^\alpha f)(x) = (R_{\varepsilon\eta}^\alpha \mathbf{B}_\varepsilon f)(x), \quad (3.7)$$

η – некоторое положительное число. Предел в (3.6) понимается по норме $L_p + L_s$ или почти всюду.

С учетом того, что $K_{1/2}(z) = \sqrt{\pi/(2z)}e^{-z}$, оператор $\mathbf{B}_\varepsilon$ представим в виде

$$(\mathbf{B}_\varepsilon \varphi)(x) = \tilde{C}_3(\varepsilon) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\sqrt{a/(1+\varepsilon^2)}\sqrt{r^2(y)-i\varepsilon|y|^2}}}{(r^2(y)-i\varepsilon|y|^2)^{1/2}} \varphi(x-y) dy, \quad (3.8)$$

где

$$\tilde{C}_3(\varepsilon) = \frac{(1+\varepsilon^2)^{1/4}}{4\pi\sqrt{1+i\varepsilon}(-1+i\varepsilon)}.$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p < 3/(\alpha + 2)$, $2 < q < 3$,

$$0 < \eta < \frac{2(3/2 - 3/q)}{3/p + 3/q - 1}, \quad (3.9)$$

$\varphi \in L_p$. Тогда справедлива формула (3.3), где T^α – оператор (3.6); предел в (3.6) понимается в смысле “почти всюду” или по норме $L_p + L_s$, где $1/s = 1/p + 1/q - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (3.3) доказывается на основе представления

$$(T_\varepsilon^\alpha S^\alpha \varphi)(x) = (W_{\varepsilon\eta} \varphi)(x) + i\varepsilon(\mathbf{B}_\varepsilon(k_{\varepsilon,\eta} * \varphi))(x), \quad (3.10)$$

где

$$k_{\varepsilon,\eta}(|y|) = F^{-1}(|\xi|^2 e^{-\varepsilon^\eta |\xi|^2}(|y|)),$$

которое устанавливается так же, как (3.4). Для доказательства теоремы достаточно проверить, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon(\mathbf{B}_\varepsilon(k_{\varepsilon,\eta} * \varphi))(x) = 0, \quad (3.11)$$

где предел понимается по норме $L_p + L_s$ или почти всюду.

При доказательстве (3.11) используется равенство

$$\|k_{\varepsilon,\eta}\|_r = c\varepsilon^{-5\eta/2+3\eta/(2r)}, \quad 1 \leq r < \infty. \quad (3.12)$$

(Здесь и ниже, все константы, не зависящие от ε , будем обозначать одной буквой c). Действительно, как легко видеть, ядро $k_{\varepsilon,\eta}(x)$ представимо в виде

$$k_{\varepsilon,\eta}(|x|) = \varepsilon^{-\eta} \lambda^{-n} \psi\left(\frac{|x|}{\lambda}\right),$$

где $\psi \in S$, $\lambda = \varepsilon^{\eta/2}$, откуда и следует (3.12).

Докажем (3.11), понимая предел по норме $L_p + L_s$. Для этого оператор $\mathbf{B}_\varepsilon$ запишем в виде

$$(\mathbf{B}_\varepsilon \varphi)(x) = \tilde{C}_3(\varepsilon) \left(\int_{|y|<1} + \int_{|y|>1} \right) b_\varepsilon(y) \varphi(x-y) dy \equiv (\mathbf{B}_\varepsilon^0 \varphi)(x) + (\mathbf{B}_\varepsilon^\infty \varphi)(x).$$

С учетом равенства (3.12) при $r = 1$ имеем

$$\|\varepsilon \mathbf{B}_\varepsilon^0(k_{\varepsilon,\eta} * \varphi)\|_p \leq c\varepsilon^{1/2-\eta} \|\varphi\|_p \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (3.13)$$

Используя оценку

$$|e^{-\sqrt{a/(1+\varepsilon^2)}\sqrt{r^2(y)-i\varepsilon|y|^2}}| \leq e^{-(\sqrt{a}/4)\varepsilon|y|},$$

получаем

$$\begin{aligned} \|b_\varepsilon^\infty\|_q &\leq \varepsilon^{1/2-3/q} \left[\left\{ \int_{\varepsilon < |\tau| < 1} \frac{e^{-\sqrt{a}q\tau/4}}{|\tau|^q} d\tau \right\}^{1/q} + \left\{ \int_{|\tau|>1} \frac{e^{-\sqrt{a}q\tau/4}}{|\tau|^q} d\tau \right\}^{1/q} \right] \\ &\leq c\varepsilon^{1/2-3/q}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $b_\varepsilon^\infty(y)$ – ядро оператора $\mathbf{B}_\varepsilon^\infty$. (Заметим, что неравенство (3.14) справедливо для всех q , $1 \leq q < 3$). Применяя теперь к оператору $\mathbf{B}_\varepsilon^\infty$ теорему Юнга о свертках, с учетом (3.12) (при $r = 1$) и (3.14) будем иметь

$$\|\varepsilon \mathbf{B}_\varepsilon^\infty(k_{\varepsilon,\eta} * \varphi)\|_s \leq c\varepsilon^{3/2-3/q-\eta} \|\varphi\|_p \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (3.15)$$

(где η удовлетворяет условию (3.9)).

Из (3.13) и (3.15) следует (3.11), где предел понимается по норме $L_p + L_s$.

Докажем (3.11), понимая предел в смысле “почти всюду”. Применяя теорему 2 из [10; с.77], получаем

$$|(k_{\varepsilon,\eta} * \varphi)(x)| \leq c\varepsilon^{-\eta} (M\varphi)(x),$$

где M – максимальный оператор Харди–Литтлвуда. Повторное применение указанной теоремы дает

$$|\varepsilon [\mathbf{B}_\varepsilon^0(k_{\varepsilon,\eta} * \varphi)](x)| \leq c\varepsilon^{1/2-\eta} (M^2\varphi)(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Далее, после применения неравенства Гёльдера с учетом оценки (3.14) имеем

$$|\varepsilon [\mathbf{B}_\varepsilon^\infty(k_{\varepsilon,\eta} * \varphi)](x)| \leq c\varepsilon^{3/2-3/q} \|k_{\varepsilon,\eta} * \varphi\|_{q'}, \quad \frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q}.$$

Применяя затем теорему Юнга о свертках к оператору $\varphi \rightarrow k_{\varepsilon,\eta} * \varphi$, получаем

$$\|k_{\varepsilon,\eta} * \varphi\|_{q'} \leq \|k_{\varepsilon,\eta}\|_r \|\varphi\|_p, \quad \frac{1}{r} = 2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

откуда с учетом (3.12) будем иметь

$$|\varepsilon [\mathbf{B}_\varepsilon^\infty(k_{\varepsilon,\eta} * \varphi)](x)| \leq c\varepsilon^{3/2-3/q-(\eta/2)(3/p+3/q-1)} \|\varphi\|_p \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу (3.9).

4. Обращение потенциалов $M^\alpha \varphi$ с L_p -плотностями

Обращение потенциалов $f = M^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p$, будем строить в виде

$$N^\alpha f = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(L_p) (L_2)} N_{\varepsilon, \delta}^\alpha f, \quad (4.1)$$

где

$$(N_{\varepsilon, \delta}^\alpha f)(x) = (R_\delta^\alpha H_\varepsilon f)(x),$$

H_ε – оператор свертки с ядром

$$h_\varepsilon(y) = \frac{e^{-\pi i/2}}{(4\pi)^{(n-1)/2}} \cdot (\varepsilon + iy_n)^{-(n-1)/2} \cdot e^{-\varepsilon y_n - |y'|^2/(4(\varepsilon + iy_n))} \theta(y_n),$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда.

Для доказательства формулы обращения нам понадобится следующая

ЛЕММА 4.1. *Ядро $h_\varepsilon(y)$ принадлежит L_1 , и его преобразование Фурье вычисляется по формуле*

$$\widehat{h}_\varepsilon(\xi) = \frac{e^{-\varepsilon|\xi'|^2}}{\xi_n - |\xi'|^2 + i\varepsilon}. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\|h_\varepsilon\|_1 = \frac{1}{(4\pi)^{(n-1)/2}} \int_0^\infty e^{-\varepsilon y_n} (\varepsilon^2 + y_n^2)^{-(n-1)/4} dy_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |e^{-|y'|^2/(4(\varepsilon + iy_n))}| dy'.$$

Совершив замены переменных $y_n = \varepsilon t$, $y' = \sqrt{\varepsilon} \tau$ и затем $\tau = u\sqrt{1+t^2}$, получаем

$$\begin{aligned} \|h_\varepsilon\|_1 &= \frac{1}{(4\pi)^{(n-1)/2}} \varepsilon \int_0^\infty e^{-\varepsilon^2 t} (1+t^2)^{(n-1)/4} dt \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|u|^2/4} du \\ &= \varepsilon \int_0^\infty e^{-\varepsilon^2 t} (1+t^2)^{(n-1)/4} dt < \infty. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \widehat{h}_\varepsilon(\xi) &= \frac{e^{-\pi i/2}}{(4\pi)^{(n-1)/2}} \int_0^\infty (\varepsilon + iy_n)^{-(n-1)/2} e^{-\varepsilon y_n + i\xi_n \cdot y_n} dy_n \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|y'|^2/(4(\varepsilon + iy_n)) + i\xi' \cdot y'} dy'. \end{aligned}$$

После применения формулы Бохнера к интегралу по $\mathbb{R}^{n-1}$ получаем

$$\begin{aligned} \widehat{h}_\varepsilon(\xi) &= \frac{e^{-\pi i/2}}{2^{(n-1)/2}} \frac{1}{|\xi'|^{(n-1)/2-1}} \int_0^\infty (\varepsilon + iy_n)^{-(n-1)/2} e^{-\varepsilon t + i\xi_n \cdot y_n} dy_n \\ &\quad \times \int_0^\infty \rho^{(n-1)/2} e^{-\rho^2/(4(\varepsilon + iy_n))} J_{(n-1)/2-1}(\rho|\xi'|) d\rho. \end{aligned}$$

Вычисляя внутренний интеграл с помощью формулы 2.9.12.3 из [9], будем иметь

$$\widehat{h}_\varepsilon(\xi) = e^{-\pi i/2} e^{-\varepsilon|\xi'|^2} \int_0^\infty e^{(-\varepsilon + i\xi_n - i|\xi'|^2)t} dt,$$

откуда следует (4.2).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $0 < \alpha < n - 1$, $1 \leq p < n/(\alpha + 1)$, $p \leq 2$, $\varphi \in L_p$. Тогда

$$(N^\alpha M^\alpha \varphi)(x) = \varphi(x), \quad (4.3)$$

где N^α – оператор (4.1). Предел в (4.1) по L_p -норме можно заменить пределом почти всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (4.3) будет следовать из представления

$$(N_{\varepsilon, \delta}^\alpha M^\alpha \varphi)(x) = (W_{\varepsilon, x'} W_\delta \varphi)(x) + i\varepsilon (D_{\varepsilon, \delta} W_{\delta/2} \varphi)(x), \quad (4.4)$$

где

$$(W_{\varepsilon, x'} \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} w(\tau, \varepsilon) \varphi(x' - \tau, x_n) d\tau,$$

$D_{\varepsilon, \delta}$ – ограниченный в L_2 оператор, порожденный 2-мультипликатором

$$\frac{e^{-\varepsilon|\xi'|^2}}{\xi_n - |\xi'|^2 + i\varepsilon}.$$

Представление (4.4) устанавливается аналогично (3.4) (с учетом (3.2) и (4.2)). Так же, как и (3.5), доказывается равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(L_2)} i\varepsilon (D_{\varepsilon, \delta} W_{\delta/2} \varphi)(x) = 0,$$

где $\varphi \in L_p$, $1 \leq p \leq 2$. Кроме того, очевидно, что

$$(W_{\varepsilon, x'} (W_\delta \varphi))(x) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{(L_2)} (W_\delta \varphi)(x).$$

Последующий предельный переход при $\delta \rightarrow 0$ по L_p -норме или почти всюду дает (4.3).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. G. Samko, “Hypersingular integrals and their applications”, *Analytical Methods and Special Functions*, **5**, Taylor & Francis, London–New York, 2002, 358–373.
- [2] V. A. Nogin, S. G. Samko, “Some applications of potentials and approximative inverse operators in multi-dimensional fractional calculus”, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **2**:2 (1999), 205–228.
- [3] V. A. Nogin, S. G. Samko, “Method of approximating inverse operators and its applications to the inversion of potential-type integral transforms”, *Integral Transform. Spec. Funct.*, **8**:1–2 (1999), 89–104.
- [4] М. М. Заволженский, В. А. Ногин, “Аппроксимативный подход к обращению обобщенных потенциалов Рисса”, *Докл. РАН*, **324**:4 (1992), 738–741.
- [5] Э. Д. Алисултанова, В. А. Ногин, *Обращение некоторых потенциалов Рисса с символами, линейно вырождающимися на гиперплоскости*, Деп. в ВИНТИ № 2271-B91, ВИНТИ, Ростов-на-Дону, 1991.
- [6] Э. Д. Алисултанова, В. А. Ногин, “Обращение и описание обобщенного потенциала Рисса с квадратичными характеристиками”, *Изв. вузов. Матем.*, 1993, № 2 (369), 3–11.

- [7] С. Г. Самко, *Гиперсингулярные интегралы и их приложения*, Изд-во Ростовского университета, Ростов-на-Дону, 1984.
- [8] В. Rubin, “Hypersingular integrals of Marchaud type and the inversion problem for potentials”, *Math. Nachr.*, **165** (1994), 245–321.
- [9] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, М., 1983.
- [10] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.
- [11] С. Л. Соболев, “Об одной теореме функционального анализа”, *Матем. сб.*, **4:3** (1938), 471–497.
- [12] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, **1**, Наука, М., 1973.

Д. В. Вожжов

Ростовский государственный университет

E-mail: dima_vozhzhov@mail.ru

Поступило

20.07.2005

Исправленный вариант

10.05.2006

В. А. Ногин

Ростовский государственный университет

E-mail: vnogin@math.rgu.ru