Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Абанин, О зонах устойчивости в задаче Уитни о продолжении для ультрадифференцируемых функций, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 2, 163–167

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm336>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:57:47

УДК 517.22

О ЗОНАХ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ УИТНИ О ПРОДОЛЖЕНИИ ДЛЯ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Д. А. Абанин

Устанавливается связь между скоростью роста весовых функций ω , порождающих неквазианалитические классы ультрадифференцируемых функций типа Бёрлинга и Румье, и справедливостью для этих классов аналога теоремы Уитни о продолжении.

Библиография: 4 названия.

В соответствии с разработанной в [1] модификацией известного подхода Бёрлинга–Бьорка неквазианалитические классы ультрадифференцируемых функций типа Бёрлинга и Румье ($\mathcal{E}_{(\omega)}$ и $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ соответственно) вводятся с помощью некоторой весовой функции ω . При этом непрерывная возрастающая функция $\omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ называется *весовой*, если она удовлетворяет следующим условиям (α) – (δ) :

(α) существует число $D > 1$ такое, что $\omega(2t) \leq D(\omega(t) + 1)$ для всех $t \geq 0$;

(β) $\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2} dt < \infty$;

(γ) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{\omega(t)} = 0$;

(δ) функция $\varphi_\omega: t \mapsto \omega(e^t)$ выпукла на $\mathbb{R}$.

В [2]–[4] исследовалось, при каких ω упомянутые выше классы допускают аналог теоремы Уитни о продолжении с компакта. Было установлено, что определяющим в этой задаче является следующее дополнительное свойство весовой функции ω :

(ε) существует число $K > 1$ такое, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega(Kt)}{\omega(t)} < K,$$

при этом удовлетворяющие ему ω называются *строгими*. Именно, строгость ω достаточна, а в случае специальных компактов и необходима для справедливости аналогов теоремы Уитни для $\mathcal{E}_{(\omega)}$ и $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$. В связи с этим представляет интерес задача о распределении строгих (или нестрогих) весовых функций в зависимости от их роста. В этом направлении в [2] было показано, что для всякой строгой ω найдется $\rho < 1$ такое, что $\omega(t) = O(t^\rho)$ при $t \rightarrow \infty$. Отметим попутно, что всегда $\omega(t) = o(t)$ при $t \rightarrow \infty$ (это легко следует из (β)). Отсюда заключаем, что всякая весовая функция, удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \omega(t)}{\ln t} = 1, \tag{1}$$

является нестрогой. Таким образом, имеется зона устойчивой нестрогости весовых функций относительно их роста. В частности, если ω_0 удовлетворяет (1) и σ такова, что $\omega_0 = O(\sigma)$, то σ непременно нестрогая.

Основной результат настоящей работы показывает, что имеется также и зона устойчивой строгости весовых функций, которая определяется точно: с одной стороны, любая весовая функция, растущая не быстрее, чем $\ln^2 t$, является строгой, а с другой, для всякой $\omega(t)$, растущей на бесконечности быстрее $\ln^2 t$, существует нестрогая весовая функция $\sigma(t) = O(\omega(t))$ при $t \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ω – весовая функция такая, что $\omega(t) = O(\ln^2 t)$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда ω строгая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $\omega(t) \leq \ln^2 t$ в некоторой окрестности бесконечности. Зафиксируем какое-либо $K \geq 4$. Существует $t_0 > 1$ такое, что для любого $t > t_0$ выполнены неравенства

$$2K \ln t \leq \omega(t) \leq \ln^2 t; \quad (2)$$

$$t^{K-1} \geq K. \quad (3)$$

Предположим, что ω нестрогая, т.е. условие (ε) нарушается. Тогда имеется $T > t_0$, для которого $\omega(KT)/\omega(T) > K - 1$. Обозначим $\xi := K - \omega(KT)/\omega(T)$. Из выпуклости $\varphi_\omega(t) := \omega(e^t)$ следует, что при любом $t \geq KT$ выполнена оценка

$$\omega(t) \geq C_1 \ln t + C_2, \quad (4)$$

где C_1 и C_2 определяются из системы

$$\begin{cases} C_1 \ln T + C_2 = \omega(T), \\ C_1 \ln(KT) + C_2 = \omega(KT). \end{cases}$$

Положим $\theta := (K - \xi - 1)/\ln K$. Очевидно, $C_1 = \theta\omega(T)$, а $C_2 = (1 - \theta \ln T)\omega(T)$. Учитывая (4) и правую часть (2), заключаем, что $C_1 \ln t + C_2 \leq \ln^2 t$ при любом $t \geq KT$. Отсюда при тех же t получаем

$$(1 - \theta \ln T)\omega(T) \leq \ln t(\ln t - C_1) = \ln t(\ln t - \theta\omega(T)). \quad (5)$$

Так как $\xi < 1$ и $K \geq 4$, то $\theta > 1$. Тогда в силу (3) и левой части (2)

$$\frac{\theta\omega(T)}{2} \geq K \ln T = \ln T^K \geq \ln(KT).$$

Поэтому $t_1 := \exp(\theta\omega(T)/2) \geq KT$ и для него верно неравенство (5), которое в данном случае принимает вид $1 - \theta \ln T \leq -\theta^2\omega(T)/4$. Отсюда, еще раз учитывая левую часть (2), имеем $\ln T\theta(\theta K/2 - 1) \leq -1$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следующий результат показывает, что указанная граница точная.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ω – весовая функция, для которой

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega(t)}{\ln^2 t} = \infty. \quad (6)$$

Тогда существует нестрогая весовая функция σ такая, что $\sigma(t) = O(\omega(t))$ при $t \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, не ограничивая общности, можно считать ω непрерывно дифференцируемой (более того, бесконечно дифференцируемой). Именно, с помощью стандартной процедуры ее можно заменить на бесконечно дифференцируемую весовую функцию того же порядка ω_1 (т.е. такую, что $\omega_1 = O(\omega)$ и $\omega = O(\omega_1)$) и провести доказательство для ω_1 вместо ω .

В последующем нам будет удобнее проводить рассуждения для φ_ω вместо ω и строить φ_σ вместо σ . Отметим, что (6) эквивалентно условию

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi_\omega(x)}{x^2} = \infty,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно тому, что

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi'_\omega(x)}{x} = \infty. \quad (7)$$

При $x \leq 0$ определим $\varphi_\sigma(x) = 0$. Выберем $x_0 > 1$ так, чтобы $\varphi_\omega(x_0) \geq x_0$ и $\varphi'_\omega(x_0) \geq x_0$ (это можно сделать в силу (7)), и положим $\varphi_\sigma(x) = x$ на $[0, x_0]$. Далее, из (7) следует, что имеется такая последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$, что при всех $n \geq 0$ выполнены неравенства

$$x_{n+1} > x_n + n + 4, \quad (8)$$

$$\varphi_\omega(x) \geq \varphi_\omega(x_n) e^{2n+1} (x - x_n - n + 1) \quad \forall x \geq x_{n+1}, \quad (9)$$

$$\varphi'_\omega(x_{n+1} + n + 1) \geq \varphi_\omega(x_n) e^{2n+1} (x_{n+1} - x_n - n + 1). \quad (10)$$

Положим при каждом $n \geq 0$

$$\varphi_\sigma(x) := \varphi_\sigma(x_n) e^n (x - x_n - n + 1) \quad \text{на } (x_n + n, x_{n+1}], \quad (11)$$

$$\varphi_\sigma(x) := \varphi_\sigma(x_{n+1}) e^{x-x_{n+1}} \quad \text{на } (x_{n+1}, x_{n+1} + n + 1]. \quad (12)$$

Докажем по индукции, что всюду на $[x_0, \infty)$ выполнено неравенство $\varphi_\sigma(x) \leq \varphi_\omega(x)$. В силу выбора x_0 $\varphi_\sigma(x_0) = x_0 \leq \varphi_\omega(x_0)$. Далее, учитывая выпуклость φ_ω и (11) (при $n = 0$), получим для $x \in (x_0, x_1]$ неравенство

$$\varphi_\omega(x) \geq \varphi_\omega(x_0) + \varphi'_\omega(x_0)(x - x_0) \geq x_0 + x_0(x - x_0) = x_0(x - x_0 + 1) = \varphi_\sigma(x).$$

Из (9), (11) и (12) (при $n = 0$) имеем для $x \in (x_1, x_1 + 1]$ неравенство

$$\varphi_\omega(x) \geq \varphi_\omega(x_0) e(x - x_0 + 1) \geq \varphi_\sigma(x_0) e(x_1 - x_0 + 1) = \varphi_\sigma(x_1) e \geq \varphi_\sigma(x).$$

Предположим теперь, что $\varphi_\sigma(x) \leq \varphi_\omega(x)$ на $[x_0, x_n + n]$ ($n \geq 1$) и докажем это же неравенство на $(x_n + n, x_{n+1} + n + 1]$. Так как в силу (12) (для $n - 1$ вместо n) и (11)

$$\varphi_\sigma(x_n + n) = \varphi_\sigma(x_n)e^n = \varphi_\sigma(x_{n-1})e^{2n-1}(x_n - x_{n-1} - n + 2),$$

то для всех $x \in (x_n + n, x_{n+1}]$ из выпуклости φ_ω , (10) (для $n - 1$ вместо n), (11) и предположения индукции следует оценка

$$\begin{aligned} \varphi_\omega(x) &\geq \varphi_\omega(x_n + n) + \varphi'_\omega(x_n + n)(x - x_n - n) \\ &\geq \varphi_\sigma(x_n + n) + \varphi_\omega(x_{n-1})e^{2n-1}(x_n - x_{n-1} - n + 2)(x - x_n - n) \\ &\geq \varphi_\sigma(x_n + n) + \varphi_\sigma(x_n + n)(x - x_n - n) \\ &= \varphi_\sigma(x_n)e^n(x - x_n - n + 1) = \varphi_\sigma(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим $x \in (x_{n+1}, x_{n+1} + n + 1]$. По аналогии с предыдущим из (9), (11) и (12) имеем для таких x оценку

$$\begin{aligned} \varphi_\omega(x) &\geq \varphi_\omega(x_n)e^{2n+1}(x - x_n - n + 1) \\ &\geq \varphi_\sigma(x_n)e^{2n+1}(x_{n+1} - x_n - n + 1) = \varphi_\sigma(x_{n+1})e^{n+1} \geq \varphi_\sigma(x). \end{aligned}$$

Итак, мы установили, что при всех $x \geq x_0$ выполнено неравенство $\varphi_\sigma(x) \leq \varphi_\omega(x)$. Из только что доказанного неравенства следует, что $\sigma(t) := \varphi_\sigma(\ln t) \leq \omega(t)$ при $t \geq \exp x_0$ и, значит, σ удовлетворяет условию (β) весовых функций.

Далее, нетрудно видеть, что определенная нами выше функция φ_σ (а тогда и σ) непрерывна и не убывает на $\mathbb{R}$ (соответственно на $[0, \infty)$). Кроме того, φ_σ имеет производную всюду за исключением точек x_n , в которых в силу выбора x_0 , (11) и (12) выполнены оценки

$$\begin{aligned} \varphi'_\sigma(x_0 - 0) &= 1 \leq x_0 = \varphi'_\sigma(x_0 + 0); \\ \varphi'_\sigma(x_{n+1} - 0) &= \varphi_\sigma(x_n)e^n < \varphi_\sigma(x_n)e^n(x_{n+1} - x_n - n + 1) = \varphi'_\sigma(x_{n+1} + 0). \end{aligned}$$

На каждом из интервалов (x_n, x_{n+1}) φ'_σ , очевидно, не убывает. Отсюда заключаем, что φ_σ выпукла. То есть для σ выполнено условие (δ) . Более того, из только что сказанного следует, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'_\sigma(x - 0) = +\infty$, а тогда и $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi_\sigma(x)/x) = +\infty$. Следовательно, σ удовлетворяет условию (γ) . Чтобы установить, что σ — весовая функция, остается проверить, что для нее имеет место условие (α) , которое, очевидно, эквивалентно тому, что $\varphi_\sigma(x + \ln 2) = O(\varphi_\sigma(x))$ при $x \rightarrow +\infty$. В силу (8) достаточно рассмотреть всего четыре следующих случая, привлекая каждый раз (11) и (12).

- 1) Пусть $x_n \leq x < x + \ln 2 \leq x_n + n$. Тогда $\varphi_\sigma(x + \ln 2)/\varphi_\sigma(x) = 2$.
- 2) Пусть $n + x_n \leq x < x + \ln 2 \leq x_{n+1}$. Имеем

$$\frac{\varphi_\sigma(x + \ln 2)}{\varphi_\sigma(x)} = 1 + \frac{\ln 2}{x - x_n - n + 1} \leq 1 + \ln 2.$$

- 3) Пусть $x_n + n \leq x \leq x_{n+1} \leq x + \ln 2$. В этом случае

$$\frac{\varphi_\sigma(x + \ln 2)}{\varphi_\sigma(x)} \leq \frac{\varphi_\sigma(x_{n+1})e^{\ln 2}}{\varphi_\sigma(x_n)e^n(x_{n+1} - x_n - n + 1 - \ln 2)} \geq 2 \frac{x_{n+1} - x_n - n + 1}{x_{n+1} - x_n - n} \leq \frac{5}{2}.$$

4) Пусть $x_n \leq x \leq x_n + n \leq x + \ln 2$. Тогда

$$\frac{\varphi_\sigma(x + \ln 2)}{\varphi_\sigma(x)} = \frac{\varphi_\sigma(x_n)e^n(x - x_n - n + 1 + \ln 2)}{\varphi_\sigma(x_n)e^{x-x_n}} \leq \frac{1 + \ln 2}{e^{-\ln 2}} = 2(1 + \ln 2).$$

Итак, для любого $x \geq x_1$ выполнено неравенство $\varphi_\sigma(x + \ln 2) \leq 2(1 + \ln 2)\varphi_\sigma(x)$. То есть σ – весовая функция. Наконец проверим, что σ нестрогая. Пусть $M > 0$ произвольно. Если $n > M$, то $\varphi_\sigma(x_n + M)/\varphi_\sigma(x_n) = e^M$. Значит, для любого $M > 0$ выполнена оценка

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_\sigma(x + M)}{\varphi_\sigma(x)} \geq e^M,$$

а, следовательно, и для любого $K > 1$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma(Kt)}{\sigma(t)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_\sigma(x + \ln K)}{\varphi_\sigma(x)} \geq K.$$

Последнее и означает, что σ нестрогая. Доказательство закончено.

Автор благодарен А.В. Абанину за постановку задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Brown R. W., Meise R., Taylor B. A. Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results Math. 1990. V. 17. P. 206–237.
- [2] Meise R., Taylor B. A. Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type // Ark. Mat. 1988. V. 26. P. 265–287.
- [3] Bonet J., Meise R., Taylor B. A. Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Roumieu type // Proc. Royal Irish Acad. 1989. V. 89A. P. 53–66.
- [4] Bonet J., Brown R. W., Meise R., Taylor B. A. Whitney's extension theorem for nonquasianalytic classes of ultradifferentiable functions // Stud. Math. 1991. V. 99. P. 155–184.

Московский физико-технический институт

Поступило
10.09.1999