Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Воробьев, Линеаризуемость пуассоновых структур на сингулярных симплектических листах, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 6, 825–837

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3360>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:43:17

УДК 514.7

ЛИНЕАРИЗУЕМОСТЬ ПУАССОНОВЫХ СТРУКТУР НА СИНГУЛЯРНЫХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ЛИСТАХ

Ю. М. Воробьев

Изучается задача о линеаризации пуассоновой структуры вблизи сингулярного симплектического листа ненулевой размерности. Получено следующее обобщение теоремы линеаризации Конна: если трансверсальная алгебра Ли листа полупроста и компактна, то пуассонова структура становится линеаризуемой при обращении в нуль некоторых кохомологических препятствий.

Библиография: 15 названий.

1. Введение

Задача о линеаризации [1], [2] пуассоновых структур вблизи сингулярных точек (симплектических листов нулевой размерности) изучалась в многочисленных работах; см., например, [3]–[6]. Известная теорема линеаризации, полученная в [3], гласит, что если трансверсальная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ некоторой сингулярной точки пуассонова многообразия проста и компактна, то пуассонова структура локально изоморфна структуре Ли–Пуассона на $\mathfrak{g}^*$.

Целью настоящей работы является изучение задачи о линеаризации данной пуассоновой структуры Ψ вблизи (сингулярного) симплектического листа B ненулевой размерности в рамках теории пуассоновых структур спаривания [7]–[10]. В работе [7] было введено понятие линеаризированной пуассоновой структуры для Ψ над симплектическим листом B . Здесь мы получаем следующее обобщение теоремы Конна: если трансверсальная алгебра Ли листа B полупроста и компактна, то ростки структуры Ψ на листе B и линеаризированная пуассонова структура являются изоморфными при обращении в нуль некоторых кохомологических препятствий. Эти препятствия связаны с понятием относительного коцикла Казимира, соответствующего паре пуассоновых структур спаривания [9]. Примеры нелинеаризуемых пуассоновых структур можно найти в [9], [11]. Различные аспекты задачи линеаризации в случае ненулевой размерности также обсуждаются в [12], [13].

2. Основные результаты

Чтобы сформулировать основные результаты, мы сначала напомним некоторые факты относительно пуассоновых тензоров спаривания (более подробно см. [7]–[10]).

Работа выполнена при частичной поддержке фонда CONACYT, грант № 43208.

© Ю. М. Воробьев, 2006

На протяжении всей статьи по повторяющимся индексам будет подразумеваться суммирование.

2.1. Пуассоновы тензоры спаривания. Пусть (M, Ψ) – пуассоново многообразие со скобкой Пуассона $\{F, G\}_\Psi = \langle dG, \Psi^\sharp dF \rangle$. Здесь $\Psi^\sharp: T^*M \rightarrow TM$ – морфизм векторных расслоений, порожденный тензором Пуассона $\Psi \in \chi^2(M)$. Предположим, что задан вложенный симплектический лист (B, ω) пуассоновой структуры Ψ .

Рассмотрим нормальное расслоение $\pi: E \rightarrow B$ листа B , $E = T_B E / TB$. Конормальное расслоение E^* несет естественную структуру локально тривиального расслоения алгебр Ли над B , индуцированного исходной пуассоновой структурой. Типичный слой $\mathfrak{g}$ этого расслоения называется *трансверсальной алгеброй Ли* симплектического листа B в (M, Ψ) . Тогда нормальное расслоение E становится локально тривиальным расслоением многообразий Ли–Пуассона с типичным слоем $\mathfrak{g}^*$.

Рассмотрим естественное разложение $T_B E = TB \oplus E$. Под *экспоненциальным отображением* будем понимать диффеоморфизм $f: E \rightarrow M$ из тотального пространства на окрестность листа B в M , удовлетворяющий следующим условиям:

$$f|_B = \text{id}_B \quad \text{и} \quad T_B M = TB \oplus d_B f(E).$$

Из теоремы о трубчатой окрестности следует, что для любого подрасслоения $\mathcal{L}$, являющегося дополнением к TB в $T_B M$, существует экспоненциальное отображение такое, что $\mathcal{L} = d_B f(E)$.

Пусть $f: E \rightarrow M$ и $\tilde{f}: E \rightarrow M$ – два экспоненциальных отображения. Тогда диффеоморфизм $\varphi = \tilde{f}^{-1} \circ f$ между двумя окрестностями B в E имеет следующие свойства:

$$\varphi|_B = \text{id}_B, \quad (2.1)$$

$$d_b \varphi|_{E_b} = \text{id}_{E_b} \quad \forall b \in B. \quad (2.2)$$

Группу ростков на B всех диффеоморфизмов φ , удовлетворяющих условиям (2.1), (2.2), будем обозначать через $\mathfrak{G}_B(E)$. Через $\mathfrak{G}_B^{\text{fb}}(E)$ обозначим подгруппу в $\mathfrak{G}_B(E)$, состоящую из ростков на B диффеоморфизмов, сохраняющих слои.

Зафиксируем экспоненциальное отображение f_0 . Ясно, что росток на B любого экспоненциального отображения f отличается от ростка заданного экспоненциального отображения f_0 на некоторый элемент из $\mathfrak{G}_B(E)$.

Пусть $\Pi = f_0^* \Psi$ – поднятие исходного тензора Пуассона Ψ при отображении f_0 на тотальное пространство E . Заметим, что B (как нулевое сечение расслоения π) является симплектическим листом пуассоновой структуры Π . Пусть $E_U \approx U \times \mathbb{R}^r$ – локальная тривиализация нормального расслоения π , где U является открытой картой листа B с локальными координатами $\xi = (\xi^i)$. Пусть $x = (x^\sigma)$ – координаты вдоль слоев π , соответствующие некоторому базису сечений расслоения E . Тогда B локально определяется уравнениями $x^1 = \dots = x^r = 0$. В терминах локальной системы координат $(\xi, x) = (\xi^i, x^\sigma)$, скобка Пуассона, соответствующая бивекторному полю Π , задается соотношениями

$$\{\xi^i, \xi^j\}_\Pi = -F^{ij}(\xi, x), \quad (2.3)$$

$$\{\xi^i, x^\sigma\}_\Pi = F^{is}(\xi, x) \Gamma_s^\sigma(\xi, x), \quad (2.4)$$

$$\{x^\alpha, x^\beta\}_\Pi = \mathcal{V}^{\alpha\beta}(\xi, x) - \Gamma_i^\alpha((\xi, x)) F^{ij}(\xi, x) \Gamma_j^\beta(\xi, x). \quad (2.5)$$

Здесь F^{ij}, Γ_i^α и $\mathcal{V}^{\alpha\beta}$ – гладкие (локальные) функции на E . Так как B является симплектическим листом структуры Π , то

$$\Gamma_s^\sigma(\xi, 0) = 0, \quad \mathcal{V}^{\alpha\beta}(\xi, 0) = 0. \quad (2.6)$$

Пусть

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{ij}(\xi) d\xi^i \wedge d\xi^j$$

– симплектическая форма на B . Ясно, что $F^{ij}(\xi, 0) = \omega^{ij}(\xi)$, где $\omega^{is}(\xi)\omega_{sj}(\xi) = \delta_j^i$. Так как матрица $(\omega^{ij}(\xi))$ является невырожденной, то для любой точки $b \in B$ можно зафиксировать открытую окрестность N_b точки b в E так, чтобы $N_b \subset E_U$ и

$$\det(F^{ij}(\xi, x)) \neq 0 \quad \forall (\xi, x) \in N_b. \quad (2.7)$$

Тогда $N = \bigcup_{b \in B} N_b$ является открытой окрестностью B в E .

Пусть $\mathbf{V} = \ker d\pi \subset TE$ – вертикальное подрасслоение, и пусть $\text{Ann } \mathbf{V}$ – аннулятор этого подрасслоения. Введем

$$\mathbf{H} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi^\sharp(\text{Ann } \mathbf{V}) \subset T_N E. \quad (2.8)$$

Из условия невырожденности (2.7) следует, что $\mathbf{H}$ является дополнением к $\mathbf{V}$,

$$T_N E = \mathbf{H} \oplus \mathbf{V}. \quad (2.9)$$

Таким образом, горизонтальное подрасслоение $\mathbf{H}$ определяет каноническую связность Эресмана, соответствующую пуассоновой структуре Π . Пусть Γ – соответствующая форма связности. В координатной записи имеем

$$\Gamma = (dx^\nu + \Gamma_i^\nu(\xi, x) d\xi^i) \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (2.10)$$

где коэффициенты Γ_i^ν задаются соотношением (2.4). Горизонтальный лифт базисного векторного поля $\partial/\partial \xi^i$ имеет вид

$$\text{hor}_i^\Gamma = \frac{\partial}{\partial \xi^i} - \Gamma_i^\nu(\xi, x) \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (2.11)$$

и $\text{hor}^\Gamma(u) = u^i(\xi) \text{hor}_i^\Gamma$ для любого векторного поля $u = u^i(\xi)(\partial/\partial \xi^i)$ на B .

Тензорное поле на N называется *горизонтальным* или *вертикальным*, если оно касательно соответственно к $\mathbf{H}$ или $\mathbf{V}$. С помощью функций $\mathcal{V}^{\alpha\beta}$, заданных в (2.5), вводится следующее вертикальное бивекторное поле $\mathcal{V}$ на N :

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^{\alpha\beta}(\xi, x) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial x^\beta}, \quad (2.12)$$

которое обращается в нуль вдоль B ,

$$\text{rank } \mathcal{V} = 0 \quad \text{на } B. \quad (2.13)$$

В силу (2.5) и тождества Якоби для переменных (x^α) легко увидеть, что $\mathcal{V}$ является тензором Пуассона. Для любой $\xi \in B$ сужение $\mathcal{V}$ на слой $N \cap E_\xi$ задает трансверсальную пуассонову структуру для Π в точке ξ [2]. Мы также будем говорить, что $\mathcal{V}$ – это *трансверсальная пуассонова структура* листа B .

В общем случае расщепление (2.9) индуцирует разложение любого бивекторного поля в сумму 2-тензорных полей типа $(2, 0)$, $(0, 2)$ и $(1, 1)$. Компоненты степени $(2, 0)$ и $(0, 2)$ соответствуют горизонтальному и вертикальному бивекторному полю соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *В окрестности N листа B пуассонов тензор Π допускает разложение*

$$\Pi = \Pi_H + \mathcal{V}, \quad (2.14)$$

где $\mathcal{V}$ – трансверсальный пуассонов тензор в (2.12) и Π_H – горизонтальное бивекторное поле, задаваемое соотношением

$$\Pi_H = -\frac{1}{2}F^{ij}(\xi, x) \operatorname{hor}_i^\Gamma \wedge \operatorname{hor}_j^\Gamma. \quad (2.15)$$

Кроме того, Π_H является пуассоновым тензором тогда и только тогда, когда кривизна связности Γ равна нулю.

Будем отождествлять пространство горизонтальных k -форм на E с пространством $\Omega^k(B) \otimes C^\infty(E)$ векторнозначных k -форм на B . Напомним, что Γ -ковариантная внешняя производная

$$\partial^\Gamma : \Omega^k(B) \otimes C^\infty(E) \rightarrow \Omega^{k+1}(B) \otimes C^\infty(E)$$

определяется как

$$\begin{aligned} (\partial^\Gamma \Theta)(u_0, u_1, \dots, u_k) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^k (-1)^i L_{\operatorname{hor}^\Gamma(u_i)} \Theta(u_0, u_1, \dots, \widehat{u}_i, \dots, u_k) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \Theta([u_i, u_j], u_0, u_1, \dots, \widehat{u}_i, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_k). \end{aligned}$$

Пусть $\operatorname{Curv}^\Gamma$ – форма кривизны связности Γ . Введем горизонтальную 2-форму

$$F = \frac{1}{2}F_{ij}(\xi, x) d\xi^i \wedge d\xi^j$$

на N , где $F_{is}(\xi, x)F^{sj}(\xi, x) = \delta_i^j$ и $F^{sj}(\xi, x)$ заданы в (2.3). Тогда тождество Якоби для бивекторного поля (2.14) влечет следующие уравнения для данных $(\mathcal{V}, \Gamma, F)$ (см. [7]):

$$[\mathcal{V}, \mathcal{V}] = 0, \quad (2.16)$$

$$L_{\operatorname{hor}^\Gamma(v)} \mathcal{V} = 0, \quad (2.17)$$

$$\partial^\Gamma F = 0, \quad (2.18)$$

$$\operatorname{Curv}^\Gamma(v, u) = (\mathcal{V})^\sharp d(F(v, u)) \quad (2.19)$$

для любых $v, u \in \mathcal{X}(B)$. Здесь $[\cdot, \cdot]$ – скобка Схоутена на E [14], [15]. В частности, (2.17) означает, что горизонтальный лифт $\operatorname{hor}^\Gamma(v)$ является пуассоновым векторным полем вертикального пуассонова тензора $\mathcal{V}$.

Обратно, пусть задан триплет $(\mathcal{V}, \Gamma, F)$ удовлетворяющий уравнениям (2.16)–(2.19) и такой, что 2-форма F является невырожденной в смысле (2.7). Тогда

формула (2.14) определяет бивекторное поле Π , которое называется *пуассоновым тензором спаривания*, соответствующим данным $(\mathcal{V}, \Gamma, F)$. Форма F также называется *формой спаривания*. Таким образом, формула (2.14) является результатом спаривания F и $\mathcal{V}$ с помощью связности Γ .

Важным следствием предложения 2.1 является то, что каждая пуассонова структура на E в окрестности симплектического листа (B, ω) реализуется как пуассонов тензор спаривания.

2.2. Линеаризованные пуассоновы структуры. Чтобы определить линеаризованную пуассонову структуру пуассонова тензора Π на B , мы сначала применим процедуру линеаризации к данным $(\mathcal{V}, \Gamma, F)$. В результате, получим триплет $(\Lambda, \Gamma^{(1)}, F^{(1)})$, который снова удовлетворяет соотношениям (2.16)–(2.19) и, следовательно, определяет пуассонов тензор спаривания $\Pi^{(1)}$.

Принимая во внимание (2.6), мы получим следующие разложения Тейлора в точке $x = 0$:

$$F^{ij}(\xi, x) = -\omega^{ij}(\xi) - \omega^{is} \mathcal{R}_{sm\nu} \omega^{mj} x^\nu + O(x^2), \quad (2.20)$$

$$\Gamma_i^\sigma(\xi, x) = \theta_{i\nu}^\sigma(\xi) x^\nu + O(x^2), \quad (2.21)$$

$$\mathcal{V}^{\alpha\beta}(\xi, x) = \lambda_\gamma^{\alpha\beta}(\xi) x^\gamma + O(x^2). \quad (2.22)$$

Используя “инфинитезимальные” данные $\theta_{i\nu}^\sigma(\xi)$, $\lambda_\gamma^{\alpha\beta}(\xi)$, можно ввести

- связность Эресмана на E :

$$\Gamma^{(1)} = \theta_{i\alpha}^\nu(\xi) x^\alpha d\xi^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (2.23)$$

- вертикальное бивекторное поле Λ на E :

$$\Lambda = \frac{1}{2} \lambda_\gamma^{\alpha\beta}(\xi) x^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial x^\beta}. \quad (2.24)$$

Заметим, что связность $\Gamma^{(1)}$ является однородной в том смысле, что производная Ли вдоль $\Gamma^{(1)}$ -горизонтального лифта $\text{hor}^{\Gamma^{(1)}}(u)$ сохраняет пространство послонно линейных функций на E . Это означает, что $\Gamma^{(1)}$ однозначно определяется линейной связностью ∇ на E , которая задается соотношением $\nabla_{\partial/\partial \xi^i} X_\sigma = \theta_{i\sigma}^\nu X_\nu$. Здесь $\{X_\sigma\}$ – базис локальных сечений E , соответствующий координатам (x^σ) . Из тождества Якоби и разложения (2.22) следует, что Λ – это тензор Пуассона на E , называемый *линеаризованной трансверсальной пуассоновой структурой* листа B . Эта структура не зависит от выбора экспоненциального отображения. Сужение Λ на каждый слой E_ξ изоморфно структуре Ли–Пуассона типичного слоя $\mathfrak{g}^*$, а $\lambda_\gamma^{\alpha\beta}(\xi)$ являются структурными константами для E_ξ^* , соответствующими дуальному базису $\{\eta^\nu\}$, $\langle \eta^\nu, X_\sigma \rangle = \delta_\sigma^\nu$.

Теперь с помощью функций $\mathcal{R}_{sm\nu}$ в разложении (2.20) мы определим следующую векторнозначную 2-форму на B :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_\nu \otimes \eta^\nu, \quad \mathcal{R}_\nu = \frac{1}{2} \mathcal{R}_{ij\nu}(\xi) d\xi^i \wedge d\xi^j. \quad (2.25)$$

Линеаризованная 2-форма спаривания

$$F^{(1)} = \frac{1}{2} F_{ij}^{(1)}(\xi, x) d\xi^i \wedge d\xi^j$$

на E задается соотношением

$$F_{ij}^{(1)}(\xi, x) = \omega_{ij}(\xi) - \mathcal{R}_{ij\sigma}(\xi)x^\sigma. \quad (2.26)$$

Ясно, что можно выбрать окрестность N так, чтобы матрица $(F_{ij}^{(1)}(\xi, x))$ была невырожденной для всех $(\xi, x) \in N$. Напомним, что через $(F^{(1)})^{ij}$ мы обозначаем элементы матрицы, обратной к $(F_{ij}^{(1)}(\xi, x))$, и

$$\text{hor}_i^{\Gamma^{(1)}} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} - \theta_{i\alpha}^\nu(\xi)x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (2.27)$$

– это $\Gamma^{(1)}$ -горизонтальный лифт векторного поля $\partial/\partial \xi^i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. (а) *Инфинитезимальные данные $(\Lambda, \Gamma^{(1)}, F^{(1)})$ порождают следующий пуассонов тензор спаривания на N :*

$$\Pi^{(1)} = \Pi_H^{(1)} + \Lambda, \quad (2.28)$$

где

$$\Pi_H^{(1)} = -\frac{1}{2}(F^{(1)})^{ij}(\xi, x) \text{hor}_i^{\Gamma^{(1)}} \wedge \text{hor}_j^{\Gamma^{(1)}}. \quad (2.29)$$

(б) *Росток тензора $\Pi^{(1)}$ на B не зависит от выбора экспоненциального отображения с точностью до некоторого диффеоморфизма в $\mathfrak{G}_B(E)$.*

Пункт (а) этого предложения 2.2 доказывается проверкой [7] того факта, что тройка $(\Lambda, \Gamma^{(1)}, F^{(1)})$ удовлетворяет соотношениям (2.16)–(2.19). Заметим, что в терминах линейной связности ∇ условия (2.17)–(2.19) можно переформулировать следующим образом: линейная связность ∇ сохраняет послонную структуру Ли–Пуассона нормального расслоения π , $\nabla^* \mathcal{R} = 0$ и $\text{Curv}^\nabla = -\text{ad}^* \circ \mathcal{R}$. Здесь $\text{Curv}^\nabla = d\theta + \theta \wedge \theta$ – это форма кривизны связности ∇ , а ad^* обозначает косопрямленный оператор на слоях расслоения π . Пуассонов тензор спаривания $\Pi^{(1)}$ в (2.28), соответствующий данным $(\Lambda, \Gamma^{(1)}, F^{(1)})$, называется *линеаризированной пуассоновой структурой* поля Π на B .

На самом деле, можно показать, что $\Pi^{(1)}$ зависит только от дополнения $\mathcal{L} = d_B f_0(E)$ к TB . Из пункта (б) предложения 2.2 следует, что корректно определено понятие линеаризированной пуассоновой структуры исходного пуассонова тензора Ψ на B : ростки на B линеаризированных пуассоновых структур, параметризованных трансверсальными подрасслоениями $\mathcal{L}$, являются изоморфными, но естественного представителя для этой линеаризированной структуры не существует. В разделе 3 мы даем набросок доказательства пункта (б); более подробно см. [7].

2.3. Задача о линеаризации. Теперь мы можем сформулировать задачу о пуассоновой линеаризации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пуассонова структура Ψ называется *линеаризируемой* на симплектическом листе B , если существует экспоненциальное отображение f такое, что

$$f^* \Psi = \Pi^{(1)}. \quad (2.30)$$

Итак, линейризуемость пуассоновой структуры Ψ на B означает, что ростки структур Ψ и $\Pi^{(1)}$ изоморфны при некотором экспоненциальном отображении. Условие эквивалентности (2.30) можно переформулировать следующим образом: для заданного экспоненциального отображения f_0 , прообраз $\Pi = f_0^* \Psi$ изоморфен $\Pi^{(1)}$ при некотором диффеоморфизме в $\mathfrak{G}_B(E)$,

$$\varphi^* \Pi = \Pi^{(1)}, \quad \varphi \in \mathfrak{G}_B(E). \quad (2.31)$$

В этом случае можно выбрать f в (2.30) в виде $f = f_0 \circ \varphi$.

Первый шаг решения задачи о линейризации – это проверка эквивалентности трансверсальных пуассоновых структур $\mathcal{V}$ и Λ . Выберем точку $\xi^0 \in B$ и рассмотрим слой E_{ξ^0} . Через $\text{Diif}_0(E_{\xi^0})$ обозначим группу ростков в точке 0 диффеоморфизмов на E_{ξ^0} , переводящих 0 в 0. Рассмотрим сужения $\mathcal{V}_{\xi^0} = \mathcal{V}|_{E_{\xi^0}}$ и $\Lambda_{\xi^0} = \Lambda|_{E_{\xi^0}}$. Напомним, что $\mathcal{V}_{\xi^0}$ обращается в нуль в точке $0 \in E_{\xi^0}$. В соответствии со стандартным определением [2], [3] будем говорить, что пуассонова структура $\mathcal{V}_{\xi^0}$ *линеаризуема* в сингулярной точке, если ростки сужений $\mathcal{V}_{\xi^0}$ и Λ_{ξ^0} в 0 изоморфны при некотором диффеоморфизме в $\text{Diif}_0(E_{\xi^0})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Если $\mathcal{V}_{\xi^0}$ линеаризуемо в 0, то существует диффеоморфизм $g \in \mathfrak{G}_B^{\text{fib}}(E)$ такой, что*

$$g^* \mathcal{V} = \Lambda. \quad (2.32)$$

Другими словами, это утверждение гласит, что из линейризуемости трансверсальной пуассоновой структуры в точке ξ^0 следует линейризуемость вертикальной компоненты пуассонова тензора Π на B . Доказательство предложения 2.4 основано на следующих двух фактах:

- (i) трансверсальная структура $\mathcal{V}$ локально изоморфна прямому произведению нулевой пуассоновой структуры и $\mathcal{V}_{\xi^0}$ [2];
- (ii) каждый диффеоморфизм в $\text{Diif}_0(E_{\xi^0})$ может быть включен в поток некоторого векторного поля, зависящего от времени и обращающегося в нуль в 0.

2.4. 2-коциклы Казимира. Здесь мы введем понятие 2-коцикла Казимира симплектического листа B , которое играет важную роль в наших рассуждениях. Это понятие является корректным при некоторых дополнительных предположениях о трансверсальной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ листа B . Предположим, что

$$\mathfrak{g} \text{ полупроста и компактна.} \quad (2.33)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Если выполнено условие (2.33), то трансверсальная пуассонова структура $\mathcal{V}$ линеаризуема на B в смысле (2.32).*

Доказательство этого утверждения получается комбинированием предложения 2.4 и теоремы линейризации Конна [3].

Теперь выберем диффеоморфизм $g \in \mathfrak{G}_B^{\text{fib}}(E)$ в (2.32) и рассмотрим тензор Пуассона $\tilde{\Pi} = g^* \Pi$. Тогда имеем $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}_H + \Lambda$, где $\tilde{\Pi}_H = g^* \Pi_H$. Можно показать [7], [9], [10], что $\tilde{\Pi}$ является пуассоновым тензором спаривания, соответствующим данным $(\Lambda, \tilde{\Gamma}, \tilde{F})$, где $\tilde{\Gamma} = g^* \Gamma$ и $\tilde{F} = g^* F$ – это поднятие связности Γ и формы спаривания F с помощью диффеоморфизма g .

В соответствии с [3] при условии (2.33) каждое пуассоново векторное поле структуры Ли–Пуассона коалгебры $\mathfrak{g}^*$ на замкнутом шаре с центром в начале координат

является гамильтоновым. Кроме того, существует оператор гомотопии комплекса Схоутена–Лихнеровича на $\mathfrak{g}^*$ для тензорных полей степеней 1 и 2. Через $\mathfrak{F}_B$ обозначим пространство ростков на B всех гладких функций, обращающихся в нуль на B . В силу вышеизложенного, принимая во внимание тот факт, что $\text{hor}^{\tilde{\Gamma}}(u)$ и $\text{hor}^{\Gamma^{(1)}}(u)$ являются пуассоновыми векторными полями для Λ , мы получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Существует 1-форма $Q \in \Omega^1(B) \otimes \mathfrak{F}_B$ такая, что*

$$\text{hor}^{\tilde{\Gamma}}(u) = \text{hor}^{\Gamma}(u) + \Lambda^{\sharp} dQ(u) \quad (2.34)$$

для любого $u \in \mathfrak{X}(B)$.

Через $\text{Casim}_B(\Lambda)$ обозначим пространство всех функций Казимира для Λ , обращающихся в нуль на B . Соответствующее пространство ростков на B элементов в $\text{Casim}_B(\Lambda)$ будем обозначать через $\mathfrak{Casim}_B(\Lambda)$.

Рассмотрим ковариантную внешнюю производную $\partial^{\Gamma^{(1)}}$, соответствующую линеаризованной связности $\Gamma^{(1)}$. Так как $\text{hor}^{\Gamma^{(1)}}(u)$ – это пуассоново векторное поле для Λ , сужение $\partial^{\Gamma^{(1)}}$ на $\Omega^k(B) \otimes \mathfrak{Casim}_B(\Lambda)$ определено корректно и порождает оператор

$$\partial_0: \Omega^k(B) \otimes \mathfrak{Casim}_B(\Lambda) \rightarrow \Omega^{k+1}(B) \otimes \mathfrak{Casim}_B(\Lambda).$$

Из (2.34) и стандартного соотношения между $(\partial^{\Gamma^{(1)}})^2$ и $\text{Curv}^{\Gamma^{(1)}}$ [7], [9] следует, что ∂_0 является кограничным оператором, $\partial_0^2 = 0$. Можно показать, что при изменении экспоненциального отображения f_0 связность $\Gamma^{(1)}$ будет меняться в соответствии с правилом перехода, аналогичным (2.34). Это означает, что ∂_0 не зависит от выбора f_0 . Фиксируя 1-форму Q в (2.34), введем следующую горизонтальную 2-форму на B :

$$C = C_{\tilde{\Pi}\Pi^{(1)}} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F} - F^{(1)} + \left(\partial^{\Gamma^{(1)}} Q + \frac{1}{2} \{Q \wedge Q\}_{\Lambda} \right). \quad (2.35)$$

Здесь $\{\cdot, \cdot\}_{\Lambda}$ обозначает скобку Пуассона для Λ . Из тождества (2.19) для $\tilde{F}$ и $F^{(1)}$ следует, что $C \in \Omega^2(B) \otimes \mathfrak{Casim}_B(\Lambda)$.

2.5. Основные результаты. В предположении, что (2.33) выполняется, имеет место следующий важный результат.

ТЕОРЕМА 2.7. (а) *Форма C в (2.35) является 2-коциклом, $\partial_0 C = 0$.*

(б) *Класс ∂_0 -когомологий $[C]$ не зависит от выбора диффеоморфизмов f_0 , g и 1-формы Q в (2.34).*

Таким образом, класс когомологий $[C]$ является канонической характеристикой симплектического листа B исходной пуассоновой структуры Ψ . Будем говорить, что C – это 2-коцикл Казимира пары $(\tilde{\Pi}, \Pi^{(1)})$.

Теперь мы переходим к теореме о линеаризации.

ТЕОРЕМА 2.8. *Если трансверсальная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ симплектического листа B полупроста и компактна, то пуассонова структура Ψ линеаризуема на B тогда и только тогда, когда класс ∂_0 -когомологий 2-коцикла Казимира C нулевой,*

$$[C] = 0. \quad (2.36)$$

Если условие (2.36) не выполняется, то будем говорить, что Ψ *нелиinearизуема* на B .

ПРИМЕР 2.9. Пусть B – ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^3$ с формой площади $\omega = ds \wedge d\tau$. Рассмотрим следующую скобку Пуассона на $E = B \times \mathbb{R}^3$:

$$\{s, \tau\} = \frac{1}{1 + \|x\|^2}, \quad \{s, x_\alpha\} = \{\tau, x_\alpha\} = 0, \quad \{x_\alpha, x_\beta\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma. \quad (2.37)$$

Можно интерпретировать E как тривиальное векторное расслоение над B . Тогда (B, ω) является симплектическим листом для (2.37) с трансверсальной алгеброй Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$. Линеаризованная пуассонова структура совпадает с пуассоновой структурой прямого произведения на $B \times \mathfrak{so}^*(3)$. Кограничный оператор ∂_0 порождается оператором $d_B \otimes \text{id}$ на $\Omega^k(B) \otimes C^\infty([0, \infty))$, где d_B – внешняя производная на B . Коцикл Казимира задается как $C = \|x\|^2 \omega$. В случае, когда B компактна, применяя теорему 2.8, мы заключаем, что пуассонова структура нелиinearизуема.

Другие примеры нелиinearизуемых пуассоновых структур можно найти в [9], [11]. Рассмотрим 2-коцикл Казимира (2.35)

$$C = \frac{1}{2} C_{ij}(\xi, x) d\xi^i \wedge d\xi^j.$$

Тогда C имеет нуль второго порядка на B , т.е. $C_{ij} = O(x^2)$. Введем деформированную форму спаривания $F_C^{(1)} = F^{(1)} + C$. Легко видеть, что данные $(\Lambda, \Gamma^{(1)}, F_C^{(1)})$ удовлетворяют условиям (2.16)–(2.19) и, следовательно, порождают пуассонов тензор спаривания Π_C .

ТЕОРЕМА 2.10. *При условии (2.33) ростки на B пуассоновых структур Ψ и $\Pi_C^{(1)}$ изоморфны.*

3. Метод гомотопии

Здесь мы приведем доказательство основных результатов, сформулированных в разделе 2.

Пусть $\text{Coupr}(E, \Lambda)$ – множество всех пуассоновых тензоров спаривания Π , определенных на некоторой окрестности N листа B в E и удовлетворяющих условиям

$$(B, \omega) \text{ – симплектический лист для } \Pi, \quad (3.1)$$

$$\Pi_V = \Lambda. \quad (3.2)$$

Через $\mathfrak{Coupr}_B(E, \Lambda)$ обозначим множество ростков на B бивекторных полей в $\text{Coupr}(E, \Lambda)$. Предположим, что задана гладкая кривая, состоящая из тензоров Пуассона

$$[0, 1] \ni t \mapsto \Pi_t \in \mathfrak{Coupr}_B(E, \Lambda).$$

Для любого t тензор Π_t является пуассоновым тензором спаривания, соответствующим данным (Λ, Γ_t, F_t) , которые гладко меняются вместе с t . Напомним, что горизонтальные лифты hor^{Γ_t} и hor^{Γ_0} являются пуассоновыми векторными полями

для Λ и, следовательно, $\text{hor}^{\Gamma_t} - \text{hor}^{\Gamma_0}$ является вертикальным пуассоновым векторным полем. Из предложения 2.6 следует, что существует зависящая от t 1-форма $Q_t \in \Omega^1(B) \otimes \mathfrak{F}_B$ такая, что

$$\text{hor}^{\Gamma_t}(u) = \text{hor}^{\Gamma_0}(u) + \Lambda^{\sharp} dQ_t(u). \quad (3.3)$$

Для любого $t \in [0, 1]$ имеем разложение

$$T_N E = \mathbf{H}_t \oplus \mathbf{V}, \quad (3.4)$$

где $\mathbf{H}_t$ – горизонтальное подрасслоение, соответствующее связности Γ_t .

Пусть ∂^{Γ_t} и ∂^{Γ_0} – ковариантные внешние производные, соответствующие связностям Γ_t и Γ_0 соответственно. В силу (3.3) имеем

$$\partial^{\Gamma_t} \Theta = \partial^{\Gamma_0} \Theta + \{Q_t \wedge \Theta\}_{\Lambda} \quad (3.5)$$

для $\Theta \in \Omega^k(B) \otimes \mathfrak{F}_B$.

Нас интересует следующее уравнение:

$$L_{Z_t} \Pi_t + \frac{\partial \Pi_t}{\partial t} = 0 \quad (3.6)$$

для зависящего от времени векторного поля Z_t на N , обращающегося в нуль на B . В соответствии с (3.4) имеем разложение

$$Z_t = X_t + Y_t, \quad (3.7)$$

где $X_t = X_t^i(\xi, x) \text{hor}_i^{\Gamma_t}$ – это Γ_t -горизонтальное векторное поле и $Y_t = Y_t^i(\xi, x)(\partial/\partial x^i)$ – вертикальное векторное поле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Зависящее от времени векторное поле Z_t является решением уравнения (3.6) тогда и только тогда, когда*

$$Y_t = \Lambda^{\sharp} dh_t, \quad (3.8)$$

$$\partial^{\Gamma_t}(\mathbf{i}_{X_t} F_t) + (\partial^{\Gamma_t})^2 h_t + \frac{\partial F_t}{\partial t} = 0, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{i}_{X_t} F_t = \frac{\partial Q_t}{\partial t} - \partial^{\Gamma_t} h_t + \beta_t \quad (3.10)$$

для некоторых $h_t \in \mathfrak{F}_B$ и $\beta_t \in \Omega^1(B) \otimes \mathfrak{Casim}_B(\Lambda)$.

Это утверждение доказывается непосредственным вычислением [9] с использованием предложения 3.1 и стандартных свойств скобки Схоутена и ковариантной внешней производной [14], [15].

В силу (3.3) для любого t сужение ∂^{Γ_t} на $\Omega^k(B) \otimes \mathfrak{Casim}_B(\Lambda)$ совпадает с кограничным оператором ∂_0 . Рассмотрим ∂_0 -коцикл Казимира $C_t \in \Omega^2(B) \otimes \mathfrak{Casim}_B(\Lambda)$, соответствующий паре (Π_t, Π_0) ,

$$C_t = F^t - F^0 + (\partial^{\Gamma_0} Q_t + \frac{1}{2} \{Q_t \wedge Q_t\}_{\Lambda}). \quad (3.11)$$

Заметим, что Q_t однозначно определяется условием (3.3) с точностью до преобразования $Q_t \mapsto Q_t + \kappa_t$ при $\kappa_t \in \Omega^1(B) \otimes \mathfrak{Casim}_B(\Lambda)$. Тогда $C_t \mapsto C_t + \partial_0 \kappa_t$ и, следовательно, класс ∂_0 -когомологий $[C_t]$ не зависит от выбора Q_t .

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Если уравнение (3.6) допускает решение Z_t , то

$$[C_t] = 0 \quad \forall t. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что условия (3.8)–(3.10) выполнены. Применяя оператор ∂^{Γ_t} к обеим частям равенства (3.10), получаем

$$\partial^{\Gamma_t}(\mathbf{i}_{X_t}F_t) + (\partial^{\Gamma_t})^2 h_t = \partial^{\Gamma_t} \left(\frac{\partial Q_t}{\partial t} \right) + \partial^{\Gamma_t} \beta_t.$$

Подстановка этого тождества в (3.9) дает

$$\partial^{\Gamma_t} \left(\frac{\partial Q_t}{\partial t} \right) + \partial^{\Gamma_t} \beta_t + \frac{\partial F_t}{\partial t} = 0. \quad (3.13)$$

Из (3.5) следует, что

$$\partial^{\Gamma_t} \beta_t = \partial^{\Gamma_0} \beta_t = \partial_0 \beta_t, \quad \partial^{\Gamma_t} \left(\frac{\partial Q_t}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\partial^{\Gamma_0} Q_t + \frac{1}{2} \{Q_t \wedge Q_t\}_\Lambda \right].$$

Применяя эти формулы, выводим из (3.13), что

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\partial^{\Gamma_0} Q_t + \frac{1}{2} \{Q_t \wedge Q_t\}_\Lambda \right] - \partial^{\Gamma_0} \beta_t$$

и, следовательно,

$$C_t = -\partial_0 \left(\int_0^t \beta_\tau d\tau \right).$$

Это доказывает (3.12).

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Предположим, что (3.12) выполняется. Тогда уравнение (3.6) допускает решение Z_t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если (3.12) выполняется, то можно выбрать Q_t в (3.3) так, чтобы $C_t = 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} = - \left[\partial^{\Gamma_0} \left(\frac{\partial Q_t}{\partial t} \right) + \left\{ Q_t \wedge \frac{\partial Q_t}{\partial t} \right\}_\Lambda \right] = -\partial^{\Gamma_t} \left(\frac{\partial Q_t}{\partial t} \right).$$

Тогда условие (3.9) принимает вид

$$\partial^{\Gamma_t}(\mathbf{i}_{X_t}F_t) + (\partial^{\Gamma_t})^2 h_t - \partial^{\Gamma_t} \left(\frac{\partial Q_t}{\partial t} \right) = 0.$$

В силу невырожденности F_t существует единственное Γ_t -горизонтальное векторное поле X_t такое, что

$$\mathbf{i}_{X_t}F_t = \frac{\partial Q_t}{\partial t}. \quad (3.14)$$

Полагая $h_t = 0$, $\beta_t = 0$ и $Z_t = X_t$, мы видим, что уравнения (3.8)–(3.10) удовлетворяются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.7. Заметим, что для любых двух тензоров спаривания Π' и Π'' в $\mathfrak{Coupr}_B(E, \Lambda)$ можно определить относительный коцикл Казимира $C(\Pi', \Pi'')$ с помощью (2.35). При этом имеем следующие свойства:

$$\begin{aligned} [C(\Pi', \Pi'')] &= -[C(\Pi'', \Pi')], \\ [C(\Pi', \Pi'')] + [C(\Pi'', \Pi''')] + [C(\Pi''', \Pi')] &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Зафиксируем экспоненциальное отображение f_0 и диффеоморфизм g в (2.32) и рассмотрим пуассонов тензор спаривания $\tilde{\Pi} = (f_0 \circ g)^* \Psi$, соответствующий данным $(\Lambda, \tilde{\Gamma}, \tilde{F})$. Предположим, что задан диффеоморфизм $\varphi \in \mathfrak{G}_B(E)$ такой, что $(\varphi^* \tilde{\Pi})_V = \Lambda$. Заметим, что из последнего условия не следует, что φ сохраняет слои и является автоморфизмом для Λ . Таким образом, $\varphi^* \tilde{\Pi} \in \mathfrak{Coupr}_B(E, \Lambda)$, и мы должны показать, что

$$[C(\tilde{\Pi}, \Pi^{(1)})] = [C(\varphi^* \tilde{\Pi}, \Pi^{(1)})]. \quad (3.16)$$

Для каждого $t \in [0, 1]$ рассмотрим послойно сохраняющее отображение

$$m_t: E \rightarrow E, \quad m_t(\xi, x) = (\xi, tx).$$

Можно предположить, что φ корректно определен в окрестности N листа B в E так, что $N \cap E_\xi$ является звездной областью при любом $\xi \in B$. Рассмотрим семейство диффеоморфизмов $\Phi_t = m_t^{-1} \circ \varphi \circ m_t \in \mathfrak{G}_B(E)$. Имеем $\Phi_0 = \text{id}$, $\Phi_1 = \varphi$. Далее, $\Phi_t|_B = \text{id}_B$ и, следовательно, можно выбрать окрестность N листа B в E так, чтобы Φ_t было корректно определено на N при всех $t \in [0, 1]$. Следовательно, Φ^t является фазовым потоком зависящего от времени векторного поля

$$Z_t = \left(\frac{d\Phi_t}{dt} \right) \circ \Phi_t^{-1}, \quad (3.17)$$

обращающегося в нуль на B . Рассмотрим гладкую кривую

$$t \mapsto \Pi_t = (\Phi^t)^* \tilde{\Pi} \in \mathfrak{Coupr}_B(E, \Lambda),$$

соединяющую $\tilde{\Pi}$ и $\varphi^* \tilde{\Pi}$. Ясно, что Z_t в (3.17) является решением (3.6). Тогда в силу следствия 3.2 условие (3.12) выполняется. В частности, $[C_1] = [C(\varphi^* \tilde{\Pi}, \tilde{\Pi})] = 0$. Наконец, применяя свойство (3.15), мы получаем (3.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.8. Достаточность. Предположим, что (2.36) выполнено. Тогда можно выбрать $Q \in \Omega^1(B) \otimes \mathfrak{F}_B$ в (2.34) так, чтобы получить $C = 0$. Нужно построить диффеоморфизм φ , удовлетворяющий условию $\varphi^* \tilde{\Pi} = \Pi^{(1)}$. Для любого $t \in [0, 1]$ определим связность Эресмана $\Gamma_t = \Gamma - t\Lambda^\sharp dQ$ и 2-форму

$$F_t = F^{(1)} - \left(t\partial^{\Gamma^{(1)}} Q + \frac{t^2}{2} \{Q \wedge Q\}_\Lambda \right). \quad (3.18)$$

Стягивая при необходимости окрестность N листа B , мы можем считать, что для любого t форма F_t является горизонтально невырожденной (условие (2.7)). Можно показать, что данные (Λ, Γ^t, F^t) удовлетворяют соотношениям (2.16)–(2.19) и, следовательно, порождают зависящий от времени пуассонов тензор спаривания Π_t , который определяет гладкий путь в $\mathfrak{Coupr}_B(E, \Lambda)$, соединяющий $\Pi^{(1)}$ и $\tilde{\Pi}$. Из (3.18)

следует, что $C_t = 0$. Применяя следствие 3.3, заключаем, что существует зависящее от времени векторное поле $X_t = X_t^i(\xi, x) \text{hor}_i^{\Gamma_t}$, удовлетворяющее (3.6). В нашем случае X_t однозначно определяется уравнением $i_{X_t}F^t = Q$. Так как X_t обращается в нуль вдоль B , можно снова стянуть N так, чтобы поток Φ^t поля X_t был корректно определен на N для всех $t \in [0, 1]$. Таким образом, $(\Phi^t)^*P_t = P_0$ и можно положить $\varphi = \Phi^1$.

Необходимость следует из теоремы 2.7.

Доказательство теоремы 2.10 проводится аналогично.

Автор благодарен М. В. Карасеву за полезные обсуждения при подготовке этой статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974.
- [2] A. Weinstein, “The local structure of Poisson manifolds”, *J. Differential Geom.*, **18**:3 (1983), 523–557.
- [3] J. Conn, “Normal forms for smooth Poisson structures”, *Ann. of Math.* (2), **121**:3 (1985), 565–593.
- [4] J.-P. Dufour, “Linéarisation de certaines structures de Poisson”, *J. Differential Geom.*, **32**:2 (1990), 415–428.
- [5] N. T. Zung, *arXiv: math.SG/0207263*, 2002.
- [6] R. L. Fernandes, P. Monnier, “Linearization of Poisson brackets”, *Lett. Math. Phys.*, **69** (2004), 89–114.
- [7] Yu. Vorobjev, “Coupling tensors and Poisson geometry near a single symplectic leaf”, *Lie Algebroids and related topics in differential geometry*, Banach Center Publ., **54**, Warszawa, 2001, 249–274.
- [8] Ю. М. Воробьев, “О линеаризованных пуассоновых структурах”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 486–493.
- [9] Yu. Vorobjev, *arXiv: math.SG/0503628v1*, 2005.
- [10] I. Vaisman, “Coupling Poisson and Jacobi structures on foliated manifolds”, *J. Geom. Method. Mod. Phys.*, **1**:5 (2004), 607–637.
- [11] B. L. Davis, A. Wade, “Nonlinearizability of certain Poisson structures near a symplectic leaf”, *E-print math.SG/0406611*, 2005.
- [12] O. Brahic, *arXiv: math.SG/0403136*, 2004.
- [13] M. Crainic, R. L. Fernandes, *arXiv: math.DG/0503145v1*, 2005.
- [14] М. В. Карасев, В. П. Маслов, *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование*, Наука, М., 1991.
- [15] I. Vaisman, *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*, Progress in Math., **118**, Birkhäuser, Boston, 1994.

Ю. М. Воробьев

Университет Соноры,

Московский институт электроники и математики

E-mail: pm@miem.edu.ru

Поступило

28.06.2005