Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Демиденко, Критерий смежности вершин поли-
топов, порождаемых подмножествами симметрической
группы, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 6, 838–
855

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3361>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 02:50:48

УДК 512.25+519.1

КРИТЕРИЙ СМЕЖНОСТИ ВЕРШИН ПОЛИТОПОВ, ПОРОЖДАЕМЫХ ПОДМНОЖЕСТВАМИ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

В. М. Демиденко

Предложена характеристика смежности вершин в классе подстановочных политопов, порождаемых произвольными подмножествами симметрической группы. Указанному классу принадлежат политопы известных классических задач о назначениях, 2- и 3-сочетаниях, коммивояжере и их различных модификаций. До настоящего времени вопросы, связанные со смежностью вершин, исследовались в основном для отдельных политопов. В данной работе для подстановочного политопа общего вида получены необходимые и достаточные условия (не)смежности его вершин, которые сформулированы в терминах подстановок и разрешимости специального вида систем линейных уравнений. Известные критерии смежности вершин политопа задачи о назначениях являются простыми следствиями предложенных условий. На основе последних разработана общая алгоритмическая схема для распознавания смежности вершин подстановочного политопа общего вида и оценена ее трудоемкость.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Выявление достаточно быстро проверяемых условий смежности вершин политопов напрямую связано с их полиэдральным описанием, а также с разработкой эффективных алгоритмов, осуществляющих обходы вершин граф-остовов политопов, с целью нахождения приемлемых решений соответствующих оптимизационных задач. К алгоритмам такого типа относятся симплексные процедуры и процедуры локального поиска. Для последних эффективно проверяемый критерий смежности вершин политопа является универсальным правилом "выхода" из тупиковой ситуации (достижение локального оптимума), применение которого в конечном итоге приводит к нахождению глобального оптимума.

Обширный список литературы по исследованию остовов в основном трехмерных политопов представлен в монографии Грюнбаума [1]. В обзоре Хаусмана [2] приводятся интересные теоретические результаты о смежности вершин политопов, связанных с некоторыми комбинаторными оптимизационными задачами. Исследованию условий смежности вершин отдельных политопов, порождаемых подмножествами симметрической группы, посвящены работы [3]–[17]. Указанному классу принадлежат политопы известных классических задач о взвешенном 2- и 3-сочетании, назначении, коммивояжере и различных их модификаций.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS, грант № 03-50-5975.

© В. М. Демиденко, 2006

Наиболее изученным является политоп задачи о назначении. В 1974 г. Балинским и Руссаковым в теоретико-графовой терминологии [3] и, независимо, Падбергом и Рао в терминах подстановок [4] был описан критерий смежности вершин указанного политопа. Ранее в 1955 г. Хэллером [5], [6] были получены условия, определяющие множество вершин этого же политопа, смежных с вершиной, соответствующей тождественной подстановке. В частности, было установлено, что указанное множество вершин порождается всеми циклическими подстановками симметрической группы и только ими (в нашей работе установлено, что критерии смежности Падберга–Рао и условия Хэллера, по существу, идентичны с точностью до некоторого невырожденного линейного преобразования матричного пространства).

Вопросы, связанные с исследованием политопа задачи о коммивояжере, подробно изложены в монографиях [7], [8]. До настоящего времени не известен эффективно проверяемый критерий смежности вершин этого политопа. Известны лишь достаточные условия смежности, полученные в 1969 г. Мурти [9], считавшиеся и необходимыми до выхода в 1976 г. работы Рао [10], в которой установлена ошибочность результата Мурти и предложены новые достаточные условия смежности вершин политопа указанной задачи.

В работах Хаусмана [2], Балаша и Падберга [11] предложены критерии смежности для 0, 1-вершин политопа, определяемого целочисленной системой линейных уравнений, и рассмотрены его возможные теоретические и практические применения для описания отдельных классов смежных вершин политопа задачи о коммивояжере. Дополнительные классы смежных вершин с оценками их мощности приведены в [12]. В работе [13] предложена общая схема выделения классов как смежных, так и несмежных вершин, использующая специальные случаи задачи о коммивояжере с заранее известным оптимальным решением. Общий подход для выделения таких случаев предложен в работе [14]. Выход в 1978 г. работы Пападимитриу [15] о NP-полноте задачи распознавания несмежности заданной пары вершин указанного политопа делает маловероятной проверку смежности его вершин за полиномиальное время. Попытка характеристики отношения смежности в классе подстановочных политопов впервые предпринята в работах [16], [17].

В данной работе для политопов, порождаемых подмножествами симметрической группы, в терминах подстановок и разрешимости специального вида систем линейных уравнений сформулированы необходимые и достаточные условия смежности их вершин. Предложенные условия позволили построить общую алгоритмическую схему для распознавания смежности вершин подстановочного политопа произвольного вида, оценить ее трудоемкость и указать ситуации, когда реализации этой схемы являются сильно полиномиальными от n для конкретных подмножеств симметрической группы S_n . В частности, предложенная схема может использоваться для распознавания либо перечисления вершин, смежных с заданной вершиной политопа задачи о коммивояжере, который порождается множеством циклов длины n .

2. Предварительные сведения. Пусть S_n – симметрическая группа, действующая на множестве чисел $\mathbb{N}_{1,n} = \{1, 2, \dots, n\}$. Подстановка $\sigma \in S_n$ трактуется как взаимно однозначное отображение множества $\mathbb{N}_{1,n}$ на себя, которое переводит i в $\sigma(i)$, где $i \in \mathbb{N}_{1,n}$. Носитель подстановки σ множество $\text{Tr } \sigma = \{i \in \mathbb{N}_{1,n} \mid \sigma(i) \neq i\}$ действительно перемещаемых элементов из $\mathbb{N}_{1,n}$ и множество $\text{Fix } \sigma = \{j \in \mathbb{N}_{1,n} \mid \sigma(j) = j\}$ элементов из $\mathbb{N}_{1,n}$, оставляемых подстановкой σ на месте [18; с. 14], обра-

зуют разбиение $\mathbb{N}_{1,n}$, т.е.

$$\mathrm{Tr} \sigma \cup \mathrm{Fix} \sigma = \mathbb{N}_{1,n}, \quad \mathrm{Tr} \sigma \cap \mathrm{Fix} \sigma = \emptyset. \quad (1)$$

Известно [18; с. 17], что произвольная подстановка σ допускает разложение в произведение независимых циклов вида

$$\sigma = \omega_{i_1} \circ \omega_{i_2} \circ \cdots \circ \omega_{i_m}, \quad \text{где } i_1, i_2, \dots, i_m \in \mathbb{N}_{1,n}, \quad 1 \leq m \leq n, \quad (2)$$

которое в дальнейшем называется *циклическим*. Напомним, что *независимым циклом* ω_{i_ℓ} длины k подстановки σ называется ее ограничение на подмножестве $\{i_\ell, \sigma(i_\ell), \dots, \sigma^{k-1}(i_\ell)\} \subseteq \mathbb{N}_{1,n}$, где k – минимальный элемент в $\mathbb{N}_{1,n}$ такой, что $\sigma^k(i_\ell) = i_\ell$, а σ^k – k -я степень подстановки σ . Так как любая подстановка σ полностью определяется ограничением на своем носителе $\mathrm{Tr} \sigma$, который совпадает с объединением попарно не пересекающихся носителей циклов ω_{i_ℓ} неединичной длины, то, не ограничивая общности, можно считать, что в разложении (2) циклы длины 1 отсутствуют. Таким образом, если (2) – циклическое разложение σ , то при $m \geq 2$ имеет место

$$\mathrm{Tr} \sigma = \bigcup_{\ell=1}^m \mathrm{Tr} \omega_{i_\ell}, \quad |\mathrm{Tr} \omega_{i_\ell}| \geq 2, \quad \mathrm{Tr} \omega_{i_p} \cap \mathrm{Tr} \omega_{i_q} = \emptyset, \quad \text{где } 1 \leq p \neq q \leq m. \quad (3)$$

Пусть $\mathbb{R}^{n \times n}$ – пространство квадратных матриц порядка n над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Любой подстановке σ из S_n естественным образом ставится в соответствие бинарная матрица $\bar{\sigma} = (s_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ с ненулевыми элементами $s_{i,\sigma(i)} = 1$, $i \in \mathbb{N}_{1,n}$, которая называется *матрицей подстановки*.

Согласно [18; с. 24] любая подстановка σ определяет левый сдвиг симметрической группы S_n , при котором любому подмножеству $H \subseteq S_n$ соответствует его левый σ -сдвиг $\sigma H = \{\sigma \circ \eta \in S_n \mid \eta \in H\}$, где $\sigma \circ \eta$ – произведение подстановок σ, η , действие которого на S_n определяется равенствами $\sigma \circ \eta(i) = \sigma(\eta(i))$, $i \in \mathbb{N}_{1,n}$. С помощью матрицы подстановки $\bar{\sigma}$ естественным образом определяется правый сдвиг пространства $\mathbb{R}^{n \times n}$, при котором любому подмножеству матриц $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ соответствует его правый σ -сдвиг $\mathcal{A}^\sigma = \{A^\sigma = A \cdot \bar{\sigma} \mid A \in \mathcal{A}\}$. Матрицы вида A^σ принято называть *перенумерованными*, так как они получаются перестановкой столбцов исходных матриц с помощью обратной к σ подстановки σ^{-1} , т.е. для любой матрицы $A = (a_{i,j})$ ее перенумерованный аналог имеет вид $A^\sigma = (a_{i,\sigma^{-1}(j)})$.

При доказательстве промежуточных и основных результатов, касающихся свойств подстановочных политопов, существенно используются свойства матриц подстановок и перенумерованных матриц, а именно равенства

$$\overline{\sigma \circ \rho} = \bar{\rho} \cdot \bar{\sigma}, \quad \overline{\sigma^{-1}} = \bar{\sigma}^{-1}, \quad (4)$$

$$(A, B) = (A^\sigma, B^\sigma), \quad (A^\sigma)^\rho = A^{\rho \circ \sigma}, \quad \mathrm{rank} \mathcal{A} = \mathrm{rank} \mathcal{A}^\sigma, \quad (5)$$

где $\sigma, \rho \in S_n$, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$.

Выберем в S_n произвольное подмножество H . *Подстановочным политопом* P_H , порожденным H , называется выпуклая оболочка множества матриц подстановок $\bar{H} = \{\bar{\eta} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \eta \in H\}$. Выбор подмножества $H \subseteq S_n$ определяет вид подстановочного политопа. Например, при $H = S_n$ имеем политоп P_{S_n} классической задачи

о назначениях. Если H совпадает с множеством T_n всех циклов длины n , то P_{T_n} – политоп известной задачи о коммивояжере. Известно, что при любом $H \subseteq S_n$ политоп P_H является вырожденным в $\mathbb{R}^{n \times n}$, т.е. принадлежит минимальному аффинному пространству $\text{aff } P_H$, размерность которого не превосходит $\dim(\text{aff } P_{S_n}) = (n-1)^2$. Известно, что множество вершин политопа P_H совпадает с $\overline{H}$. Далее, две вершины политопа P_H называются *смежными*, если они принадлежат одному и тому же ребру (грани политопа P_H размера 1).

При выборе основных понятий и обозначений, связанных с исследованием отношения смежности вершин подстановочных политопов, мы придерживаемся терминологии монографий [19] и [20]. При этом наряду с выпукло и аффинно независимыми множествами пространства $\mathbb{R}^{n \times n}$ [19; с. 14] рассматриваются конически независимые. Любая матрица каждого такого множества не может быть выражена в виде неотрицательной линейной комбинации его остальных матриц. В дальнейшем такие линейные комбинации матриц называются *коническими*.

Введем в рассмотрение множество $\mathcal{E} = \{E_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid i, j \in \mathbb{N}_{1,n}\}$ бинарных матриц, в каждой из которых единственный ненулевой элемент стоит на пересечении i -й строки и j -го столбца. Из (1) и определения матриц подстановок непосредственно следуют равенства вида

$$\bar{\sigma} = \sum_{i \in \text{Tr } \sigma} E_{i, \sigma(i)} + \sum_{j \in \text{Fix } \sigma} E_{j,j}, \quad \bar{\sigma} - \bar{\varepsilon} = \sum_{i \in \text{Tr } \sigma} E_{i, \sigma(i)} - \sum_{i \in \text{Tr } \sigma} E_{i,i}, \quad (6)$$

которые задают разложение по базису $\mathcal{E}$ матриц подстановок $\bar{\sigma}$ и $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$, где σ – произвольная, а ε – тождественная подстановки из S_n .

В данной работе формулируется критерий (не)смежности вершин политопов вида $P_{\eta^{-1}H}$, где $H \subseteq S_n$ и $\eta \in H$, которые образуют некоторый подкласс в классе всех подстановочных политопов. Однако наличие взаимно однозначного соответствия между гранями политопов $P_{\eta^{-1}H}$ и P_H позволяет расширить предлагаемый критерий на весь класс подстановочных политопов. Свойства этого соответствия (η^{-1} -сдвига матричного пространства), касающиеся подстановочных политопов, описываются в п. 3.

3. Грани политопов $P_{\eta^{-1}H}$ и P_H и смежность их вершин. При изучении отношения смежности вершин подстановочных политопов будем рассматривать не сам политоп P_H , а его правый η^{-1} -сдвиг $P_{\eta^{-1}H} = (P_H)^{\eta^{-1}}$, где η – произвольно выбранная в H подстановка. Покажем, что полученный политоп $P_{\eta^{-1}H}$ полностью идентичен P_H в смысле строения граней.

Пусть $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\sigma \in S_n$. Введем в рассмотрение систему линейных неравенств

$$\text{sli } \mathcal{A} = \{(A, X) \leq b_A \mid A \in \mathcal{A}, b_A \in \mathbb{R}\},$$

допускающую включение неявных либо явных равенств, где $X = (x_{i,j})$ – матрица переменных $x_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{N}_{1,n}$, а

$$(A, X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_{i,j}$$

– скалярное произведение матриц A и X . Систему линейных уравнений, которая получается из $\text{sli } \mathcal{A}$ заменой всех знаков ' $\leq$ ' на ' $=$ ', обозначим $\text{sle } \mathcal{A}$. Перенумерованной системой $\text{sli } \mathcal{A}$ посредством σ назовем систему

$$\text{sli } \mathcal{A}^\sigma = \{(A^\sigma, X) \leq b_A \mid A \in \mathcal{A}, b_A \in \mathbb{R}\}.$$

Связь между гранями политопов P_H и $P_{\eta^{-1}H}$ устанавливает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Семейство подмножеств $\mathcal{F} = \{F_\ell \subset P_H \mid \ell \in J\}$, где J – конечное множество индексов, является семейством граней политопа P_H тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_{\eta^{-1}} = \{F_\ell^{\eta^{-1}} \subset P_{\eta^{-1}H} \mid \ell \in J\}$ – семейство граней политопа $P_{\eta^{-1}H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение 1 является прямым следствием следующего утверждения: подмножество F политопа P_H является его k -мерной гранью тогда и только тогда, когда $F^{\eta^{-1}}$ – k -мерная грань политопа $P_{\eta^{-1}H}$.

Докажем вначале необходимость условий сформулированного утверждения. Согласно [20; с. 136] любой конечно порожденный политоп совпадает с множеством решений некоторой системы линейных неравенств, допускающей включение неявных либо явных равенств. Пусть, для определенности, политоп P_H – множество решений системы линейных неравенств

$$\text{sli } \mathcal{A} = \{(A, X) \leq b_A \mid A \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n \times n}, b_A \in \mathbb{R}\}.$$

Используя равенства (4) и (5), нетрудно проверить, что $P_{\eta^{-1}H} = (P_H)^{\eta^{-1}}$ – множество решений перенумерованной системы вида

$$\text{sli } \mathcal{A}^{\eta^{-1}} = \{(A^{\eta^{-1}}, X) \leq b_A \mid A \in \mathcal{A}, b_A \in \mathbb{R}\}.$$

Далее, согласно [19; с. 33] непустое подмножество F политопа P_H является его k -мерной гранью, если оно совпадает с множеством решений системы уравнений $\text{sle } \mathcal{A}_1$, определяемой некоторой подсистемой $\text{sli } \mathcal{A}_1 \subset \text{sli } \mathcal{A}$ ранга $n^2 - k$. Таким образом, если k -мерная грань F – решение системы уравнений $\text{sle } \mathcal{A}_1$ ранга $n^2 - k$, то, используя равенства (4) и (5), нетрудно убедиться в том, что непустое подмножество $F^{\eta^{-1}}$ политопа $P_{\eta^{-1}H}$ является решением перенумерованной системы уравнений $\text{sle } \mathcal{A}_1^{\eta^{-1}}$. Эта система в силу последнего равенства (5) имеет ранг $n^2 - k$ и, очевидно, определяется подсистемой $\text{sli } \mathcal{A}_1^{\eta^{-1}}$ системы $\text{sli } \mathcal{A}^{\eta^{-1}}$, множество решений которой совпадает с $P_{\eta^{-1}H}$. Таким образом, $F^{\eta^{-1}}$ является k -мерной гранью политопа $P_{\eta^{-1}H}$.

Убедимся теперь в справедливости обратного утверждения. Так как имеет место равенство $P_{\eta^{-1}H} = (P_H)^{\eta^{-1}}$, то любая k -мерная грань политопа $P_{\eta^{-1}H}$ имеет вид $F^{\eta^{-1}}$, где F – некоторое непустое подмножество политопа P_H . Далее, так как $P_{\eta^{-1}H}$ – решение системы $\text{sli } \mathcal{A}^{\eta^{-1}}$, то грань $F^{\eta^{-1}}$ является решением системы уравнений $\text{sle } \mathcal{A}_1^{\eta^{-1}}$ ранга $n^2 - k$, где $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$. В силу первых двух равенств (5) перенумерованное подмножество $(F^{\eta^{-1}})^\eta = F$ совпадает с множеством решений системы уравнений

$$\text{sle}(\mathcal{A}_1^{\eta^{-1}})^\eta = \text{sle } \mathcal{A}_1,$$

которая определяется подсистемой $\text{sli } \mathcal{A}_1$ системы $\text{sli } \mathcal{A}$ и имеет в силу последнего равенства (5) ранг $n^2 - k$. Так как $\text{sli } \mathcal{A}$ определяет политоп P_H , то F – его k -мерная грань. Таким образом, предложение 1 доказано.

Ранее отмечалось, что $\overline{H}$ – множество вершин подстановочного политопа P_H . Следовательно, множество вершин политопа $P_{\eta^{-1}H}$ в силу предложения 1 совпадает с множеством перенумерованных матриц подстановок $\overline{H}^{\eta^{-1}}$. Ниже формулируются утверждения, устанавливающие связь между смежными вершинами политопов P_H и $P_{\eta^{-1}H}$.

ТЕОРЕМА 1. *Вершины $\overline{\eta}$ и $\overline{v}$ политопа P_H являются смежными тогда и только тогда, когда смежны вершины $\overline{\varepsilon}$ и $\overline{v \cdot \eta^{-1}}$ политопа $P_{\eta^{-1}H}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению две вершины политопа *смежны*, если они принадлежат одному и тому же ребру, т.е. грани размера 1. В силу предложения 1 каждой грани F размера 1 политопа P_H соответствует грань $F^{\eta^{-1}}$ той же размерности политопа $P_{\eta^{-1}H}$. Следовательно, чтобы доказать теорему 1, достаточно убедиться в справедливости двух утверждений: если $\overline{\eta}, \overline{v} \in F$, то $\overline{\varepsilon}, \overline{v \cdot \eta^{-1}} \in F^{\eta^{-1}}$, и если $\overline{\varepsilon}, \overline{v \cdot \eta^{-1}} \in F^{\eta^{-1}}$, то $\overline{\eta}, \overline{v} \in F$.

Убедимся в справедливости первого утверждения. Пусть система неравенств

$$\text{sli } \mathcal{A} = \{(A, X) \leq b_A \mid A \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n \times n}, b_A \in \mathbb{R}\}$$

определяет политоп P_H . Согласно [19; с. 33] 1-мерная грань F политопа P_H является множеством решений системы

$$\text{sle } \mathcal{A}_1 = \{(A, X) = b_A \mid A \in \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}, b_A \in \mathbb{R}\}$$

ранга $n^2 - 1$, которая порождается некоторой подсистемой $\text{sli } \mathcal{A}_1 \subset \text{sli } \mathcal{A}$. Из предложения 1 и двух первых равенств (5) следует, что 1-мерная грань $F^{\eta^{-1}} \subset P_{\eta^{-1}H}$ определяется системой

$$\text{sle } \mathcal{A}_1^{\eta^{-1}} = \{(A^{\eta^{-1}}, X) = b_A \mid A \in \mathcal{A}_1, b_A \in \mathbb{R}\},$$

ранг которой в силу третьего равенства (5) равен $n^2 - 1$.

Пусть $\overline{\eta}, \overline{v} \in F$, тогда для всех $A \in \mathcal{A}_1$ должны выполняться равенства $(A, \overline{\eta}) = b_A$, $(A, \overline{v}) = b_A$, из которых и (4), (5) вытекают цепочки равенств

$$\begin{aligned} b_A &= (A, \overline{\eta}) = (A^{\eta^{-1}}, \overline{\eta}^{\eta^{-1}}) = (A^{\eta^{-1}}, \overline{\eta \cdot \eta^{-1}}) = (A^{\eta^{-1}}, \overline{\eta^{-1} \circ \eta}) = (A^{\eta^{-1}}, \overline{\varepsilon}), \\ b_A &= (A, \overline{v}) = (A^{\eta^{-1}}, \overline{v}^{\eta^{-1}}) = (A^{\eta^{-1}}, \overline{v \cdot \eta^{-1}}) = (A^{\eta^{-1}}, \overline{v \cdot \eta^{-1}}), \end{aligned}$$

имеющие место для всех A из $\mathcal{A}_1$. Следовательно, $\overline{\varepsilon}$ и $\overline{v \cdot \eta^{-1}}$ – решения системы $\text{sle } \mathcal{A}_1^{\eta^{-1}}$ ранга $n^2 - 1$, что влечет $\overline{\varepsilon}, \overline{v \cdot \eta^{-1}} \in F^{\eta^{-1}}$. Таким образом, доказано, что $\overline{\varepsilon}$ и $\overline{v \cdot \eta^{-1}}$ – смежные вершины политопа $P_{\eta^{-1}H}$.

Пусть теперь $\overline{\varepsilon}$ и $\overline{v \cdot \eta^{-1}}$ – смежные вершины политопа $P_{\eta^{-1}H}$ и они принадлежат $F^{\eta^{-1}}$. Тогда они являются решениями системы уравнений $\text{sle } \mathcal{A}_1^{\eta^{-1}}$ и для всех $A \in \mathcal{A}_1$ имеет место

$$(A^{\eta^{-1}}, \overline{\varepsilon}) = (A^{\eta^{-1}}, \overline{v \cdot \eta^{-1}}) = b_A.$$

Следовательно, в силу (4) и первых двух равенств (5) должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} b_A &= (A^{\eta^{-1}}, \overline{\varepsilon}) = ((A^{\eta^{-1}})^{\eta}, \overline{\varepsilon}^{\eta}) = (A^{\eta \circ \eta^{-1}}, \overline{\varepsilon \circ \eta}) = (A, \overline{\eta}), \\ b_A &= (A^{\eta^{-1}}, \overline{v \cdot \eta^{-1}}) = ((A^{\eta^{-1}})^{\eta}, \overline{(v \cdot \eta^{-1})^{\eta}}) = (A^{\eta \circ \eta^{-1}}, \overline{\eta \circ \eta^{-1} \circ v}) = (A, \overline{v}) \end{aligned}$$

для всех A из $\mathcal{A}_1$. Таким образом, матрицы $\bar{\eta}$ и $\bar{v}$ – решения системы $\text{sle } \mathcal{A}_1$, т.е. являются смежными вершинами политопа P_H . Теорема 1 доказана.

4. Необходимые условия несмежности вершин политопа $P_{\eta^{-1}H}$. При доказательстве необходимых и достаточных условий несмежности вершин подстановочных политопов, представленных в последующих пунктах, существенно используется критерий смежности [16], сформулированный в терминах подстановок и специального вида конических разложений соответствующих им матриц.

Зафиксируем в множестве вершин $\bar{H}$ политопа P_H любую вершину $\bar{\eta}_0$ и обозначим $\bar{H}_{\eta_0}$ подмножество смежных с $\bar{\eta}_0$ вершин. Очевидно, $\bar{H}_{\eta_0} \subseteq \bar{H}$ определяет в H соответствующее подмножество подстановок H_{η_0} . Ниже приводятся необходимые и достаточные условия принадлежности подстановок подмножеству $H \setminus H_{\eta_0}$. Эти условия, по существу, задают в терминах подстановок критерий несмежности вершин политопа P_H с вершиной $\bar{\eta}_0$.

ТЕОРЕМА 2. *При заданных $H \subseteq S_n$ и $\eta_0, \eta \in H$, где $|H| \geq 4$, подстановка η принадлежит подмножеству $H \setminus H_{\eta_0}$ тогда и только тогда, когда найдется подмножество $\Upsilon \subseteq H \setminus \{\eta_0, \eta\}$ мощности $|\Upsilon| \geq 2$ и набор чисел $0 < \lambda_v \in \mathbb{R}$, где $v \in \Upsilon$, такие, что для произвольной матрицы $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ выполняется равенство*

$$(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0, X) = \sum_{v \in \Upsilon} \lambda_v (\bar{v} - \bar{\eta}_0, X).$$

Из теорем 1, 2 вытекает критерий несмежности вершин политопа $P_{\eta^{-1}H}$ с вершиной $\bar{\varepsilon}$, соответствующей тождественной подстановке.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $H \subseteq S_n$, $\eta \in H$ и $v_0 \in \eta^{-1}H$. Вершины $\bar{v}_0$ и $\bar{\varepsilon}$ политопа $P_{\eta^{-1}H}$ несмежны тогда и только тогда, когда матрица $\bar{v}_0 - \bar{\varepsilon}$ является конической комбинацией множества матриц $\{\bar{v} - \bar{\varepsilon} \mid v \in \Upsilon\}$, где $\Upsilon \subseteq \eta^{-1}H \setminus \{v_0, \varepsilon\}$ и $|\Upsilon| \geq 2$.*

Условия следствия 1 предполагают выполнение матричного равенства

$$\bar{v}_0 - \bar{\varepsilon} = \sum_{v \in \Upsilon} \lambda_v (\bar{v} - \bar{\varepsilon}), \quad \text{где } 0 < \lambda_v \in \mathbb{R}, \quad \Upsilon \subseteq \eta^{-1}H \setminus \{v_0, \varepsilon\}. \quad (7)$$

Ниже рассматриваются свойства подстановок из $\Upsilon \subseteq \eta^{-1}H \setminus \{v_0, \varepsilon\}$, входящих в (7). Эти свойства определяют в силу теоремы 1 и следствия 1 необходимые условия несмежности вершин подстановочных политопов и представляют определенный теоретический и практический интерес.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $H \subseteq S_n$ и $\eta \in H$ таковы, что для подстановки $v_0 \in \eta^{-1}H$ и подмножества $\Upsilon \subseteq \eta^{-1}H \setminus \{v_0, \varepsilon\}$, где $|\Upsilon| \geq 2$, имеет место матричное равенство (7). Тогда для любой подстановки $v \in \Upsilon$ имеет место*

$$\text{Tr } v \subset \text{Tr } v_0, \quad \bigcup_{v \in \Upsilon} \text{Tr } v = \text{Tr } v_0 \quad \text{и} \quad v(i) = v_0(i), \quad \text{где } i \in \text{Tr } v.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В начале убедимся в том, что равенства $v(i) = v_0(i)$, где $i \in \text{Tr } v$, выполняются для любой подстановки $v \in \Upsilon$. Для этого достаточно доказать невозможность противоположного утверждения, т.е. отсутствие в Υ такой

подстановки v' , что $v'(\ell) \neq v_0(\ell)$ для некоторого элемента ℓ из $\text{Tr } v'$. Предположим наличие в Υ подстановки v' и выделим подмножество Υ' всех таких подстановок $v \in \Upsilon$, что $\ell \in \text{Tr } v$ и $v(\ell) = v'(\ell)$. Очевидно, $\Upsilon' \neq \emptyset$ ввиду того, что $v' \in \Upsilon'$. Далее, так как для матриц, соответствующих подстановкам $v_0, \varepsilon, v \in \Upsilon$, справедливо равенство (7), то скалярное произведение обеих его частей на матрицу $E_{\ell, v'(\ell)}$ должно дать верное числовое равенство.

Скалярно умножая левую часть (7) на $E_{\ell, v'(\ell)}$ и используя первое равенство (6), получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} (\bar{v}_0 - \bar{\varepsilon}, E_{\ell, v'(\ell)}) &= (\bar{v}_0, E_{\ell, v'(\ell)}) - (\bar{\varepsilon}, E_{\ell, v'(\ell)}) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}_{1,n}} (E_{i, v_0(i)}, E_{\ell, v'(\ell)}) - \sum_{i \in \mathbb{N}_{1,n}} (E_{i, i}, E_{\ell, v'(\ell)}) \\ &= (E_{\ell, v_0(\ell)}, E_{\ell, v'(\ell)}) - (E_{\ell, \ell}, E_{\ell, v'(\ell)}) = 0. \end{aligned}$$

Действительно, при $i \neq \ell$ имеем $(E_{i, v_0(i)}, E_{\ell, v'(\ell)}) = 0$ и $(E_{i, i}, E_{\ell, v'(\ell)}) = 0$. Далее равенство $(E_{\ell, v_0(\ell)}, E_{\ell, v'(\ell)}) = 0$ выполняется в силу $v_0(\ell) \neq v'(\ell)$, а $(E_{\ell, \ell}, E_{\ell, v'(\ell)}) = 0$, так как имеет место $\ell \neq v'(\ell)$ ввиду того, что $\ell \in \text{Tr } v$.

Скалярное умножение правой части матричного равенства (7) на матрицу $E_{\ell, v'(\ell)}$ с учетом первого равенства (6) приводит к цепочке равенств

$$\begin{aligned} \left(\sum_{v \in \Upsilon} \lambda_v (\bar{v} - \bar{\varepsilon}), E_{\ell, v'(\ell)} \right) &= \sum_{v \in \Upsilon} \lambda_v (\bar{v} - \bar{\varepsilon}, E_{\ell, v'(\ell)}) \\ &= \sum_{v \in \Upsilon} \lambda_v \left(\sum_{i \in \mathbb{N}_{1,n}} (E_{i, v(i)}, E_{\ell, v'(\ell)}) \right) - \sum_{v \in \Upsilon} \lambda_v \left(\sum_{i \in \mathbb{N}_{1,n}} (E_{i, i}, E_{\ell, v'(\ell)}) \right) \\ &= \sum_{v \in \Upsilon} \lambda_v (E_{\ell, v(\ell)}, E_{\ell, v'(\ell)}), \end{aligned}$$

так как $(E_{i, v(\ell)}, E_{\ell, v'(\ell)}) = 0$ для всех $i \neq \ell \in \mathbb{N}_{1,n}$, а $(E_{i, i}, E_{\ell, v'(\ell)}) = 0$ для всех $i \in \mathbb{N}_{1,n}$, так как ввиду того, что $\ell \in \text{Tr } v'$, имеет место $\ell \neq v'(\ell)$.

Далее из $\Upsilon = \Upsilon' \cup (\Upsilon \setminus \Upsilon')$, $\Upsilon' \cap (\Upsilon \setminus \Upsilon') = \emptyset$, $(E_{\ell, v(\ell)}, E_{\ell, v'(\ell)}) = 1$ при $v \in \Upsilon'$ и $(E_{\ell, v(\ell)}, E_{\ell, v'(\ell)}) = 0$ при $v \in \Upsilon \setminus \Upsilon'$ следует справедливость равенств

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \Upsilon} \lambda_v (E_{\ell, v(\ell)}, E_{\ell, v'(\ell)}) &= \sum_{v \in \Upsilon'} \lambda_v (E_{\ell, v(\ell)}, E_{\ell, v'(\ell)}) + \sum_{v \in \Upsilon \setminus \Upsilon'} \lambda_v (E_{\ell, v(\ell)}, E_{\ell, v'(\ell)}) \\ &= \sum_{v \in \Upsilon'} \lambda_v (E_{\ell, v(\ell)}, E_{\ell, v'(\ell)}) = \sum_{v \in \Upsilon'} \lambda_v > 0. \end{aligned}$$

Сравнение вычисленных скалярных произведений дает противоречие

$$0 = (\bar{v}_0 - \bar{\varepsilon}, E_{\ell, v'(\ell)}) = \left(\sum_{v \in \Upsilon} \lambda_v (\bar{v} - \bar{\varepsilon}), E_{\ell, v'(\ell)} \right) = \sum_{v \in \Upsilon'} \lambda_v > 0,$$

что доказывает справедливость равенств $v(i) = v_0(i)$, где $i \in \text{Tr } v$, $v \in \Upsilon$.

Убедимся теперь в справедливости строгого включения $\text{Tr } v \subset \text{Tr } v_0$ для любой подстановки $v \in \Upsilon$. Очевидно, $\text{Tr } v \neq \text{Tr } v_0$, так как в противном случае из доказанных выше равенств и $\text{Tr } v = \text{Tr } v_0$ следует $v = v_0$, что противоречит выбору Υ .

Если $\text{Tr } v_0 \subset \text{Tr } v$, то в $\text{Tr } v$ должен существовать такой элемент ℓ , что $\ell \notin \text{Tr } v_0$, т.е. в силу (1) $\ell \in \mathbb{N}_{1,n} \setminus \text{Tr } v_0 = \text{Fix } v_0$, откуда следует $v_0(\ell) = \ell \neq v(\ell)$. Полученное противоречие с выше установленным свойством подстановок v из Υ ($v(i) = v_0(i)$, где $i \in \text{Tr } v$ и $v \in \Upsilon$) доказывает выполнение требуемых включений $\text{Tr } v \subset \text{Tr } v_0$ для всех $v \in \Upsilon$. Следствием последних является включение

$$\bigcup_{v \in \Upsilon} \text{Tr } v \subseteq \text{Tr } v_0.$$

Таким образом, для завершения доказательства предложения 2 осталось убедиться в справедливости обратного включения

$$\text{Tr } v_0 \subseteq \bigcup_{v \in \Upsilon} \text{Tr } v,$$

из которого и предыдущего будет следовать требуемое равенство

$$\text{Tr } v_0 = \bigcup_{v \in \Upsilon} \text{Tr } v.$$

Предположим, что

$$\text{Tr } v_0 \not\subseteq \bigcup_{v \in \Upsilon} \text{Tr } v.$$

Тогда найдется элемент $\ell \in \text{Tr } v_0$ такой, что $\ell \notin \text{Tr } v$ для всех $v \in \Upsilon$ и, следовательно, в силу (1) для всех $v \in \Upsilon$ имеет место $\ell \in \text{Fix } v$, что равносильно $v(\ell) = \ell$. Покажем, что при сделанных предположениях скалярное умножение левой и правой части равенства (7) на $E_{\ell, v_0(\ell)}$ не равны. Так как $(E_{i, v_0(i)}, E_{\ell, v_0(\ell)}) = 0$ для всех $i \neq \ell \in \mathbb{N}_{1,n}$, а $(E_{\ell, \ell}, E_{\ell, v_0(\ell)}) = 0$, ввиду $\ell \in \text{Tr } v_0$ и $(E_{\ell, v_0(\ell)}, E_{\ell, v_0(\ell)}) = 1$, то скалярное умножение левой части (7) на $E_{\ell, v_0(\ell)}$ дает цепочку равенств

$$(\bar{v}_0 - \bar{\varepsilon}, E_{\ell, v_0(\ell)}) = \sum_{i \in \mathbb{N}_{1,n}} (E_{i, v_0(i)}, E_{\ell, v_0(\ell)}) - \sum_{i \in \mathbb{N}_{1,n}} (E_{i, i}, E_{\ell, v_0(\ell)}) = (E_{\ell, v_0(\ell)}, E_{\ell, v_0(\ell)}) = 1.$$

Умножая скалярно правую часть равенства (7) на $E_{\ell, v_0(\ell)}$, получим

$$\begin{aligned} \left(\sum_{v \in \Upsilon} \lambda_v (\bar{v} - \bar{\varepsilon}), E_{\ell, v_0(\ell)} \right) &= \sum_{v \in \Upsilon} \lambda_v \left(\sum_{i \in \mathbb{N}_{1,n}} (E_{i, v(i)} - E_{i, i}, E_{\ell, v_0(\ell)}) \right) \\ &= \sum_{v \in \Upsilon} \lambda_v ((E_{\ell, v(\ell)}, E_{\ell, v_0(\ell)}) - (E_{\ell, \ell}, E_{\ell, v_0(\ell)})) = 0, \end{aligned}$$

так как $(E_{i, v(i)}, E_{\ell, v_0(\ell)}) = (E_{i, i}, E_{\ell, v_0(\ell)}) = 0$ при $i \neq \ell \in \mathbb{N}_{1,n}$, $(E_{\ell, v(\ell)}, E_{\ell, v_0(\ell)}) = (E_{\ell, \ell}, E_{\ell, v_0(\ell)}) = 0$, так как для ℓ , в силу определения, должны выполняться соотношения $v(\ell) = \ell$ и $v_0(\ell) \neq \ell$. Полученное противоречие доказывает справедливость включения

$$\text{Tr } v_0 \subseteq \bigcup_{v \in \Upsilon} \text{Tr } v.$$

Предложение 2 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $H \subseteq S_n$, $\eta \in H$ и для подстановки $v_0 \in \eta^{-1}H$ с множеством независимых циклов $\Omega_{v_0} = \{\omega_i \mid i \in \mathbb{N}_{1,m}\}$, где $2 \leq m \leq \lfloor n/2 \rfloor$, существует такое подмножество $\Upsilon \subseteq \eta^{-1}H \setminus \{v_0, \varepsilon\}$ мощности $|\Upsilon| \geq 2$, что выполняется матричное равенство (7). Тогда для любой подстановки $v \in \Upsilon$ существует такое подмножество $J_v \subset \mathbb{N}_{1,m}$, что

$$v = \prod_{j \in J_v} \omega_j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы убедиться в справедливости предложения 3, достаточно показать невозможность противоположного вывода при заданных условиях. Предположим существование в Υ такой подстановки v' , что

$$v' \neq \prod_{j \in J} \omega_j$$

для любого подмножества $J \subset \mathbb{N}_{1,m}$, где $\omega_j \in \Omega_{v_0}$. В этом случае среди независимых циклов подстановки v' должен найтись такой цикл ω' , что $\omega' \neq \omega_i$ для всех $i \in \mathbb{N}_{1,m}$ (в противном случае все независимые циклы подстановки v' принадлежат Ω_{v_0}). Из приведенных соотношений следует существование для каждого цикла ω_i из Ω_{v_0} элемента $\ell_i \in \text{Tr } \omega'$ такого, что $\omega'(\ell_i) \neq \omega_i(\ell_i)$ (в противном случае $\omega' = \omega_i$). Далее, в силу предложения 2 и имеющих место включений $v' \in \Upsilon$, $\text{Tr } \omega' \subseteq \text{Tr } v'$ и $\text{Tr } \omega_i \subseteq \text{Tr } v_0$, должны выполняться равенства

$$\omega'(\ell_i) = v'(\ell_i) = v_0(\ell_i) \quad \text{и} \quad \omega_i(\ell_i) = v_0(\ell_i),$$

из которых и доказанного выше соотношения $\omega'(\ell_i) \neq \omega_i(\ell_i)$ следует цепочка

$$v_0(\ell_i) = \omega'(\ell_i) \neq \omega_i(\ell_i) = v_0(\ell_i).$$

Полученное противоречие доказывает справедливость предложения 3.

5. Достаточные условия несмежности вершин политопа $P_{\eta^{-1}H}$. При доказательстве результатов этого пункта понадобятся следующие утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть $\sigma, \rho \in S_n$ и $\text{Tr } \sigma \cap \text{Tr } \rho = \emptyset$. Тогда справедливы равенства $(\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}, \bar{\rho} - \bar{\varepsilon}) = 0$ и $(\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}) \cdot (\bar{\rho} - \bar{\varepsilon}) = O$, где O – нулевая матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственное вычисление скалярного произведения с учетом второго равенства (6) приводит к цепочке равенств

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}, \bar{\rho} - \bar{\varepsilon}) &= \left(\sum_{i \in \text{Tr } \sigma} E_{i, \sigma(i)} - \sum_{i \in \text{Tr } \sigma} E_{i, i}, \sum_{j \in \text{Tr } \rho} E_{j, \rho(j)} - \sum_{j \in \text{Tr } \rho} E_{j, j} \right) \\ &= \sum_{i \in \text{Tr } \sigma} \sum_{j \in \text{Tr } \rho} ((E_{i, \sigma(i)}, E_{j, \rho(j)}) - (E_{i, \sigma(i)}, E_{j, j}) - (E_{i, i}, E_{j, \rho(j)}) + (E_{i, i}, E_{j, j})) = 0, \end{aligned}$$

так как $i \neq j$ для всех $i \in \text{Tr } \sigma$ и $j \in \text{Tr } \rho$ ввиду $\text{Tr } \sigma \cap \text{Tr } \rho = \emptyset$, что влечет равенство нулю всех слагаемых указанной выше двойной суммы.

Докажем справедливость матричного равенства. Из свойств операции умножения матриц и второго равенства (6) следует цепочка равенств

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}) \cdot (\bar{\rho} - \bar{\varepsilon}) &= \left(\sum_{i \in \text{Tr } \sigma} E_{i, \sigma(i)} - \sum_{i \in \text{Tr } \sigma} E_{i, i} \right) \cdot \left(\sum_{j \in \text{Tr } \rho} E_{j, \rho(j)} - \sum_{j \in \text{Tr } \rho} E_{j, j} \right) \\ &= \sum_{i \in \text{Tr } \sigma} \sum_{j \in \text{Tr } \rho} E_{i, \sigma(i)} \cdot E_{j, \rho(j)} - \sum_{i \in \text{Tr } \sigma} \sum_{j \in \text{Tr } \rho} E_{i, \sigma(i)} \cdot E_{j, j} \\ &\quad - \sum_{i \in \text{Tr } \sigma} \sum_{j \in \text{Tr } \rho} E_{i, i} \cdot E_{j, \rho(j)} + \sum_{i \in \text{Tr } \sigma} \sum_{j \in \text{Tr } \rho} E_{i, i} \cdot E_{j, j}. \end{aligned}$$

Докажем совпадение с нулевой матрицей O всех слагаемых полученных двойных сумм. Проверка показывает, что соотношения $E_{p,q} \cdot E_{r,s} \neq O$ выполняются для $p, q, r, s \in \mathbb{N}_{1,n}$ только при $q = r$. В случае $\text{Tr } \sigma \cap \text{Tr } \rho = \emptyset$ для любых $i \in \text{Tr } \sigma$ и $j \in \text{Tr } \rho$, очевидно, имеет место $i \neq j$, что влечет выполнение равенств $E_{i,i} \cdot E_{j, \rho(j)} = O$ и $E_{i,i} \cdot E_{j,j} = O$. По той же причине должны выполняться равенства $E_{i, \sigma(i)} \cdot E_{j, \rho(j)} = O$ и $E_{i, \sigma(i)} \cdot E_{j,j} = O$ в случае $\sigma(i) \neq j$. Следовательно, для завершения доказательства леммы 1 осталось убедиться в том, что $\sigma(i) \neq j$ при $i \in \text{Tr } \sigma$ и $j \in \text{Tr } \rho$ в случае $\text{Tr } \sigma \cap \text{Tr } \rho = \emptyset$.

Предположим справедливость противоположного утверждения, т.е. существование таких $i' \in \text{Tr } \sigma$ и $j' \in \text{Tr } \rho$, что $\sigma(i') = j'$. Тогда из $j' \in \text{Tr } \rho$, $\text{Tr } \sigma \cap \text{Tr } \rho = \emptyset$ и (1) имеем включение $j' \in \text{Fix } \sigma$, т.е. равенство $\sigma(j') = j'$. Из последнего с учетом $\sigma(i') = j'$ следует равенство $\sigma(i') = \sigma(j')$, которое, очевидно, равносильно $i' = j'$. С другой стороны, из $i' \in \text{Tr } \sigma$ и $\sigma(i') = j'$ следует справедливость соотношений $i' \neq \sigma(i') = j'$, что влечет $i' \neq j'$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 1.

Пусть $\mathbb{N}_{1r} = \{1, 2, \dots, r\}$ и $\mathcal{J}_r$ – семейство непустых подмножеств из $\mathbb{N}_{1r}$. Следующее утверждение описывает свойство матриц подстановок, которое понадобится при доказательстве основного результата этого пункта.

ЛЕММА 2. Пусть $\varepsilon, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r \in S_n$, где ε – тождественная подстановка, $\sigma = \sigma_r \circ \sigma_{r-1} \circ \dots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ и $r \geq 2$. Тогда для соответствующих матриц имеет место разложение

$$\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon} = \sum_{J \in \mathcal{J}_r} \prod_{j \in J} (\bar{\sigma}_j - \bar{\varepsilon}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $r = 2$ лемма 2 очевидна. Действительно, в этом случае $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$, откуда с учетом первого равенства (4) имеем $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2$ и, как показывает проверка,

$$\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon} = \bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2 - \bar{\varepsilon} = (\bar{\sigma}_1 - \bar{\varepsilon}) \cdot (\bar{\sigma}_2 - \bar{\varepsilon}) + (\bar{\sigma}_1 - \bar{\varepsilon}) + (\bar{\sigma}_2 - \bar{\varepsilon}).$$

Далее доказательство леммы проводится индукцией по r . Предположим, что требуемое разложение имеет место для $\bar{\rho} = \bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2 \cdot \dots \cdot \bar{\sigma}_{r-2} \cdot \bar{\sigma}_{r-1}$ и убедимся в наличии такого разложения для $\bar{\sigma} = \bar{\rho} \cdot \bar{\sigma}_r$. По индуктивному предположению имеем разложение

$$\bar{\rho} - \bar{\varepsilon} = \sum_{J \in \mathcal{J}_{r-1}} \prod_{j \in J} (\bar{\sigma}_j - \bar{\varepsilon}),$$

где $\mathcal{J}_{r-1}$ – семейство непустых подмножеств множества $\mathbb{N}_{1,r-1}$. Из равенства $\bar{\sigma} = \bar{\rho} \cdot \bar{\sigma}_r$ и указанного для матрицы $\bar{\rho} - \bar{\varepsilon}$ разложения следует цепочка равенств

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} - \bar{\varepsilon} &= (\bar{\rho} - \bar{\varepsilon}) \cdot (\bar{\sigma}_r - \bar{\varepsilon}) + (\bar{\rho} - \bar{\varepsilon}) + (\bar{\sigma}_r - \bar{\varepsilon}) = \left(\sum_{J \in \mathcal{J}_{r-1}} \prod_{j \in J} (\bar{\sigma}_j - \bar{\varepsilon}) \right) \cdot (\bar{\sigma}_r - \bar{\varepsilon}) \\ &= \sum_{J \in \mathcal{J}_{r-1}} \prod_{j \in J \cup \{r\}} (\bar{\sigma}_j - \bar{\varepsilon}) + \sum_{J \in \mathcal{J}_{r-1}} \prod_{j \in J} (\bar{\sigma}_j - \bar{\varepsilon}) + (\bar{\sigma}_r - \bar{\varepsilon}) = \sum_{J \in \mathcal{J}_r} \prod_{j \in J} (\bar{\sigma}_j - \bar{\varepsilon}), \end{aligned}$$

так как $\mathcal{J}_r = \{J, J \cup \{r\}, \{r\} \mid J \in \mathcal{J}_{r-1}\}$. Таким образом, лемма 2 доказана.

Ниже приводятся достаточные условия несмежности вершин из $P_{\eta^{-1}H}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть при заданных $H \subseteq S_n$ и $\eta \in H$ вершины $\bar{v}, \bar{\varepsilon}$ политопа $P_{\eta^{-1}H}$ удовлетворяют соотношениям:

- 1) $\bar{v} = \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 \cdots \bar{v}_r$, где $r \geq 2$ и $v_i \in \eta^{-1}H \setminus \{v, \varepsilon\}$ для всех $i \in \mathbb{N}_{1,r}$;
- 2) $(\bar{v}_i - \bar{\varepsilon}) \cdot (\bar{v}_j - \bar{\varepsilon}) = O$ для всех $i \neq j \in \mathbb{N}_{1,r}$, где O – нулевая матрица.

Тогда $\bar{v}$ и $\bar{\varepsilon}$ – несмежные вершины политопа $P_{\eta^{-1}H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 и пункта 2) предложения 4 следует

$$\bar{v} - \bar{\varepsilon} = \sum_{J \in \mathcal{J}_r} \prod_{j \in J} (\bar{v}_j - \bar{\varepsilon}) = \sum_{i \in \mathbb{N}_{1,r}} (\bar{v}_i - \bar{\varepsilon}),$$

так как произведения $\prod_{j \in J} (\bar{v}_j - \bar{\varepsilon})$ равны нулевой матрице для подмножеств $J \subseteq \mathbb{N}_{1,r}$ мощности $|J| \geq 2$. Следовательно, $\bar{v} - \bar{\varepsilon}$ является конической комбинацией матриц $\bar{v}_i - \bar{\varepsilon}$, где $v_i \in \eta^{-1}H \setminus \{v, \varepsilon\}$, $i \in \mathbb{N}_{1,r}$, откуда с учетом следствия 1 вытекает смежность вершин $\bar{v}$ и $\bar{\varepsilon}$ политопа $P_{\eta^{-1}H}$.

Из предложения 4 и леммы 1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $H \subseteq S_n$, $\eta \in H$ и $v \in \eta^{-1}H$ – произведение не менее двух подстановок из $\eta^{-1}H \setminus \{v, \varepsilon\}$, носители которых попарно не пересекаются. Тогда $\bar{v}$ и $\bar{\varepsilon}$ – несмежные вершины политопа $P_{\eta^{-1}H}$.

6. Критерий несмежности вершин и его следствия. Зафиксируем в S_n произвольное подмножество H , выберем подстановку $\eta \in H$ и введем понятие допустимой матрицы по отношению к подстановке $v_0 \in \eta^{-1}H$. Пусть $\Omega_{v_0} = \{\omega_i \mid i \in \mathbb{N}_{1,m}\}$ – множество независимых циклов подстановки v_0 . Тогда $(k \times m)$ -матрица $A = (a_{i,j})$, где $2 \leq k \leq 2^m - 2$ и $2 \leq m \leq \lfloor n/2 \rfloor$, называется *допустимой по отношению к v_0* , если выполняются следующие условия:

- 1) существует покрытие $J_1, J_2, \dots, J_k$ множества $\mathbb{N}_{1,m}$ такое, что для любого подмножества J_i имеет место $\prod_{j \in J_i} \omega_j \in \eta^{-1}H$, где $i \in \mathbb{N}_{1,k}$;
- 2) i -я строка матрицы $A = (a_{i,j})$ совпадает с характеристическим вектором подмножества J_i , т.е. $a_{i,j} = 1$, если $j \in J_i$, и $a_{i,j} = 0$, если $j \notin J_i$, где $i \in \mathbb{N}_{1,k}$ и $j \in \mathbb{N}_{1,m}$;
- 3) бинарная система линейных уравнений $xA = 1$ совместна при дополнительном ограничении $x \geq 0$, где x – k -мерный вектор.

Ниже формулируется основной результат данной статьи, а именно, необходимые и достаточные условия несмежности вершин $\bar{v}_0, \bar{\varepsilon}$ политопа $P_{\eta^{-1}H}$.

ТЕОРЕМА 3. При заданных $H \subseteq S_n$ и $\eta \in H$ вершины $\bar{v}_0$ и $\bar{\varepsilon}$ политопы $P_{\eta^{-1}H}$ несмежны тогда и только тогда, когда для подстановки v_0 существует допустимая $(k \times m)$ -матрица $A = (a_{i,j})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся в необходимости данных условий. Для этого выберем в $P_{\eta^{-1}H}$ несмежные вершины $\bar{v}_0, \bar{\varepsilon}$, где v_0 – подстановка с множеством независимых циклов $\Omega_{v_0} = \{\omega_i \mid i \in \mathbb{N}_{1,m}\}$, и построим для v_0 допустимую матрицу $A = (a_{i,j})$.

Так как для любой подстановки число независимых циклов в разложении вида (2) не превосходит $\lfloor n/2 \rfloor$, то $m \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Далее, в силу следствия 1 и предложения 3 для $\bar{v}_0 - \bar{\varepsilon}$ выполняется матричное равенство

$$\bar{v}_0 - \bar{\varepsilon} = \sum_{v \in \Upsilon} \lambda_v (\bar{v} - \bar{\varepsilon}),$$

в котором $0 < \lambda_v \in \mathbb{R}$, $\Upsilon \subseteq \eta^{-1}H \setminus \{v_0, \varepsilon\}$, $|\Upsilon| \geq 2$ и любая подстановка $v \in \Upsilon$ определяется некоторым подмножеством $J_v \subset \mathbb{N}_{1,m}$, т.е.

$$v = \prod_{j \in J_v} \omega_j.$$

Так как $|\Upsilon| \geq 2$, то $m \geq 2$ (в противном случае при $m = 1$ подмножество Υ может включать только один цикл ω_1 , который совпадает с v_0 , что влечет $\Upsilon = \emptyset$). Следовательно, $2 \leq m \leq \lfloor n/2 \rfloor$ и подмножество подстановок Υ определяется некоторым набором собственных подмножеств $J_1, J_2, \dots, J_k \subset \mathbb{N}_{1,m}$, где $2 \leq k \leq 2^m - 2$, т.е. Υ состоит из подстановок

$$v_i = \prod_{j \in J_i} \omega_j, \quad \text{где } i \in \mathbb{N}_{1,k}, \quad \omega_j \in \Omega_{v_0}.$$

Из первого равенства (4) независимости циклов, входящих в Ω_{v_0} , и полученных разложений для подстановок из Υ , следует, что соответствующие им матрицы имеют вид

$$\bar{v}_i = \prod_{j \in J_i} \bar{\omega}_j, \quad \text{где } i \in \mathbb{N}_{1,k}.$$

Следовательно, коническое разложение матрицы $\bar{v}_0 - \bar{\varepsilon}$ с учетом

$$\bar{v}_0 = \prod_{j \in \mathbb{N}_{1,m}} \bar{\omega}_j$$

имеет вид

$$\prod_{j=1}^m \bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(\prod_{j \in J_i} \bar{\omega}_i - \bar{\varepsilon} \right). \quad (8)$$

Так как циклы $\omega_i \in \Omega_{v_0}$ независимы, то $\text{Tr } \omega_i \cap \text{Tr } \omega_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$ из $\mathbb{N}_{1,m}$, откуда с учетом лемм 1, 2 следует справедливость равенств

$$\prod_{j=1}^m \bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon} = \sum_{j=1}^m (\bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}), \quad \prod_{j \in J_i} \bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon} = \sum_{j \in J_i} (\bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}). \quad (9)$$

Пусть $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,m})$ – характеристический вектор подмножества J_i . Тогда второе равенство (9) равносильно

$$\prod_{j \in J_i} \bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon} = \sum_{j=1}^m a_{i,j} (\bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}), \quad \text{где } i \in \mathbb{N}_{1,k}.$$

Подставляя найденные выражения для матриц $\prod_{j=1}^m \bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}$ и $\prod_{j \in J_i} \bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}$ в (8) и проведя преобразования, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m (\bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}) &= \sum_{j=1}^k \lambda_i \left(\sum_{j=1}^m a_{i,j} (\bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}) \right) \\ \iff \sum_{j=1}^m (\bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}) &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{i,j} (\bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}) \\ \iff \sum_{j=1}^m (\bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}) &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i a_{i,j} \right) (\bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}) \\ \iff \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i a_{i,j} - 1 \right) (\bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}) &= O, \end{aligned} \quad (10)$$

где O – нулевая матрица. Так как циклы ω_j , где $j \in \mathbb{N}_{1,m}$, независимы, что влечет $\text{Tr } \omega_i \cap \text{Tr } \omega_j = \emptyset$ при $i \neq j \in \mathbb{N}_{1,m}$, то в силу леммы 1 скалярные произведения $(\bar{\omega}_i - \bar{\varepsilon}, \bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon})$ равны нулю для всех $i \neq j \in \mathbb{N}_{1,m}$. Таким образом, матрицы $\bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}$, где $j \in \mathbb{N}_{1,m}$, попарно ортогональны, что влечет их линейную независимость и, следовательно, равенство нулю всех коэффициентов последнего матричного равенства из (10), т.е. справедливость числовых равенств

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i a_{i,j} = 1, \quad \text{где } i \in \mathbb{N}_{1,k}.$$

Следствием последних является совместность бинарной системы линейных уравнений $xA = 1$ при ограничении $x \geq 0$, так как $0 < \lambda_i \in \mathbb{R}$ для всех $i \in \mathbb{N}_{1,k}$. Так как i -й строкой матрицы A является характеристический вектор подмножества J_i , обладающего свойством

$$\prod_{j \in J_i} \omega_j \in \Upsilon \subseteq \eta^{-1}H \setminus \{v_0, \varepsilon\}, \quad \text{где } i \in \mathbb{N}_{1,k},$$

то $(k \times m)$ -матрица $A = (a_{i,j})$ является допустимой матрицей к подстановке v_0 .

Покажем, что рассматриваемые условия достаточны, т.е. обеспечивают смежность вершин $\bar{v}_0, \bar{\varepsilon}$ политопа $P_{\eta^{-1}H}$. Пусть для подстановки v_0 с множеством независимых циклов $\Omega_{v_0} = \{\omega_j \mid j \in \mathbb{N}_{1,m}\}$ существует допустимая $(k \times m)$ -матрица $A = (a_{i,j})$. Тогда $2 \leq m \leq \lfloor n/2 \rfloor$, $2 \leq k \leq 2^m - 2$ и в силу совместности системы уравнений $xA = 1$ при $x \geq 0$ должен существовать такой набор чисел $0 \leq \lambda_i \in \mathbb{R}$, где $i \in \mathbb{N}_{1,k}$, что

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i a_{i,j} - 1 = 0$$

для всех $j \in \mathbb{N}_{1,m}$. Следовательно, должно выполняться матричное равенство

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i a_{i,j} - 1 \right) (\bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}) = O,$$

которое в силу (10) равносильно равенству

$$\sum_{j=1}^m (\bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(\sum_{j=1}^m a_{i,j} (\bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}) \right).$$

Так как $A = (a_{i,j})$ допустимая, то ее i -я строка $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,m})$ — характеристический вектор подмножества $J_i \subset \mathbb{N}_{1,m}$, где $i \in \mathbb{N}_{1,k}$. Следовательно, имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^m (\bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(\sum_{j \in J_i} (\bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon}) \right).$$

В силу независимости циклов из Ω_{v_0} выполняются равенства (9), из которых и последнего равенства следует равенство

$$\prod_{j=1}^m \bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(\prod_{j \in J_i} \bar{\omega}_j - \bar{\varepsilon} \right),$$

которое равносильно

$$\bar{v}_0 - \bar{\varepsilon} = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\bar{v}_i - \bar{\varepsilon}),$$

где $0 \leq \lambda_i \in \mathbb{R}$ и подстановки вида $v_i = \prod_{j \in J_i} \omega_j$ принадлежат $\eta^{-1}H \setminus \{v_0, \varepsilon\}$ в силу допустимости матрицы A . Так как не все λ_i равны нулю (в противном случае нулевой вектор являлся бы решением системы уравнений $xA = 1$, что невозможно), то, оставляя в правой части последнего матричного равенства только ненулевые слагаемые, будем иметь требуемое следствием 1 коническое разложение матрицы $\bar{v}_0 - \bar{\varepsilon}$, из которого следует несмежность вершин $\bar{v}_0$ и $\bar{\varepsilon}$ политопы $P_{\eta^{-1}H}$. Теорема 3 доказана.

Так как для любых вершин $\bar{v}_0, \bar{\varepsilon}$ политопы $P_{\eta^{-1}H}$ возможны только две альтернативы: либо они смежны, либо не смежны, — то отрицание условий теоремы 3 дает критерий смежности указанной пары вершин.

СЛЕДСТВИЕ 3. При заданных $H \subseteq S_n$ и $\eta \in H$ вершины $\bar{v}_0$ и $\bar{\varepsilon}$ политопы $P_{\eta^{-1}H}$ являются смежными тогда и только тогда, когда для подстановки v_0 не существует допустимой матрицы A .

Теоремы 1, 3 и следствие 3 позволяют сформулировать критерий как смежности, так и несмежности вершин η, v политопы P_H , порожденного произвольным подмножеством H симметрической группы S_n .

СЛЕДСТВИЕ 4. При заданном $H \subseteq S_n$ вершины $\bar{\eta}$ и $\bar{v}$ политопы P_H являются несмежными (смежными) тогда и только тогда, когда для подстановки $\eta^{-1} \circ v$ существует допустимая матрица A (не существует допустимой матрицы A).

Сформулированные Хэллером [5] и значительно позже Подбергом и Рао [4] критерии смежности соответственно для пар вершин $\bar{\varepsilon}, \bar{v}_0$ и $\bar{\eta}, \bar{v}$ политопа задачи о назначениях P_{S_n} являются прямыми следствиями предложенных новых условий смежности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 (Хэллер [5]). *Если $\bar{\varepsilon}$ – вершина политопа P_{S_n} , соответствующая тождественной подстановке ε , то множество всех смежных с $\bar{\varepsilon}$ вершин из P_{S_n} совпадает в точности с множеством вершин, соответствующих циклам длины, большей единицы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного цикла ω длины большей 1, очевидно, не существует допустимой матрицы, так как в этом случае $m = 1$. Следовательно, в силу следствия 3 вершина $\bar{\omega}$ политопа P_{S_n} смежна с $\bar{\varepsilon}$. Далее, простая проверка показывает, что для любой подстановки v_0 , представимой в виде произведения $m \geq 2$ независимых циклов, единичная матрица порядка m является допустимой, что влечет в силу теоремы 3 несмежность вершин $\bar{v}_0$ и $\bar{\varepsilon}$ политопа P_{S_n} , т.е. справедливость предложения 5 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 (Падберг–Рао [4]). *Две различные вершины $\bar{\eta}, \bar{v}$ политопа P_{S_n} являются смежными тогда и только тогда, когда существует такая подстановка ω , что $v = \eta \circ \omega$, и ω состоит из единственного цикла длины, большей 1, и, возможно, некоторых циклов длины 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 и равенства $\eta^{-1}S_n = S_n$ вершины $\bar{\eta}$ и $\bar{v}$ политопа P_{S_n} являются смежными тогда и только тогда, когда смежны вершины $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{v} \cdot \bar{\eta}^{-1}$ политопа $P_{\eta^{-1}S_n} = P_{S_n}$. Из предложения 5 следует, что $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{v} \cdot \bar{\eta}^{-1}$ смежны тогда и только тогда, когда подстановка $\eta^{-1} \circ v$ – цикл неединичной длины. Таким образом, предложение 6 доказано.

Предложенные критерии позволяют алгоритмически решать задачу распознавания (не)смежности произвольной пары вершин $\bar{v}, \bar{\eta}$ политопа P_H , порожденного произвольным подмножеством подстановок H . Общая схема алгоритма состоит из следующих этапов.

Этап 1. Найти независимые циклы ω_j , где $j \in \mathbb{N}_{1,m}$, подстановки $\eta^{-1} \circ v$, где η и v определяются выбранными вершинами $\bar{\eta}$ и $\bar{v}$ политопа P_H .

Этап 2. В случае $m \geq 2$ (в противном случае вершины $\bar{v}, \bar{\eta}$ смежны) вычислить бинарную матрицу $A = (a_{i,j})$, i -я строка которой является характеристическим вектором i -го по счету собственного подмножества $J_i \subset \mathbb{N}_{1,m}$ такого, что подстановка $\prod_{j \in J_i} \omega_j$ принадлежит множеству $\eta^{-1}H$.

Этап 3. Определить, совместна ли смешанная линейная система вида

$$\left\{ \sum_{i=1}^k a_{i,j} x_i = 1, x_i \geq 0 \mid j \in \mathbb{N}_{1,m} \right\},$$

где $2 \leq k \leq 2^m - 2$ – число собственных подмножеств, вычисленных на этапе 2.

Из описания схемы видно, что наиболее трудоемкими являются два последних этапа, так как время выполнения этапа 1 составляет $O(n \log_2 n)$ битовых операций. Если затраты на проверку принадлежности подстановки $\prod_{j \in J_i} \omega_j$ множеству $\eta^{-1}H$ считать также равными $O(n \log_2 n)$, то нетрудно проверить, что этап 2 включает $O((2^m - 2)n^2 \log_2^2 n)$ битовых операций, где $2 \leq m \leq \lfloor n/2 \rfloor$ – число независимых

циклов подстановки $\eta^{-1} \circ v$ в разложении вида (2). Трудоемкость этапа 3, очевидно, определяется временем, затрачиваемым на выявление совместности бинарной системы линейных уравнений вида $xA = 1$ при ограничении $x \geq 0$. Указанная система включает m уравнений, зависящих от k переменных, где $2 \leq k \leq 2^m - 2$.

Согласно [20; с. 297] определение совместности смешанной системы

$$\left\{ \sum_{i=1}^k a_{i,j} x_i = 1, x_i \geq 0 \mid j \in \mathbb{N}_{1,m} \right\}$$

методом Кармаркара требует $O(k^{4/5} \log_2 k)$ операций над $O(k \log_2 k)$ разрядными числами, что равносильно выполнению $O(k^{9/5} \log_2^2 k)$ битовых операций. Следовательно, с учетом неравенства $k \leq 2^m - 2$ число битовых операций этапа 3 не превосходит $O((2^m - 2)^{9/5} m^2)$, а общее время выполнения предложенной алгоритмической схемы составляет $O((2^m - 2)^{9/5} m^2 + (2^m - 2)n^2 \log_2^2 n + n \log_2 n)$. Таким образом, в случае $m = O(1)$ эта схема имеет полиномиальную от n трудоемкость для любого фиксированного подмножества H симметрической группы S_n .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, Wiley, London, 1967.
- [2] D. Hausmann, *Adjacency on Polytopes in Combinatorial Optimization*, Math. Systems in Economics, **49**, Meisenheim am Glan, Haim, 1980.
- [3] M. L. Balinski, A. Russakoff, "On the assignment polytope", *SIAM Rev.*, **16**:4 (1974), 516–525.
- [4] M. W. Padberg, M. R. Rao, "The travelling salesman problem and a class of polyhedra of diameter two", *Math. Programming*, **7** (1974), 32–45.
- [5] I. Heller, "On the traveling salesman problem", *Proc. Second Symp. Linear Programming*, **2**, Washington, 1955, 643–665.
- [6] I. Heller, "Neighbor relations on the convex of cyclic permutations", *Pacific J. Math.*, **6**:3 (1956), 467–477.
- [7] E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, D. B. Shmoys, *The Traveling Salesman Problem*, Wiley, Chichester, 1985.
- [8] G. Gutin, A. P. Punnen, *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*, Kluwer, Dordrecht, 2002.
- [9] K. G. Murty, "On the tours of a traveling salesman", *SIAM J. Control. Optim.*, **7**:1 (1969), 122–131.
- [10] M. R. Rao, "Adjacency of the traveling salesman tours and 0 – 1 vertices", *SIAM J. Appl. Math.*, **30**:2 (1976), 191–198.
- [11] E. Balas, M. W. Padberg, "Adjacent vertices of the all 0 – 1 programming polytope", *RAIRO Rech. Opér.*, **13**:1 (1979), 3–12.
- [12] В. И. Сарванов, *О многогранниках, связанных с оптимизацией на подстановках*, Препринт № 7 (23), Ин-т матем. АН БССР, Минск, 1977.
- [13] В. М. Демиденко, В. А. Шлык, "О смежности вершин многогранников задач комбинаторной оптимизации", *Докл. АН БССР*, **33**:9 (1989), 773–776.
- [14] В. М. Демиденко, "Условия сильной разрешимости оптимизационных задач на подстановках и их применение", *Докл. НАН Беларуси*, **45**:4 (2001), 9–12.
- [15] C. H. Papadimitriou, "The adjacency relation on the traveling salesman polytope is NP-complete", *Math. Programming*, **14**:3 (1978), 312–324.
- [16] В. М. Демиденко, *Критерий смежности вершин на выпуклой оболочке матриц подстановок (многогранник задачи о коммивояжере)*, Препринт № 28 (338), Ин-т матем. АН БССР, Минск, 1988.

- [17] V. M. Demidenko, "Vertices adjacency criterion for polytope of the traveling salesman problem", *Proceeding of the International Conference on Operation Research* (ETH Zürich, 31 August–3 September 1998), Annual Meeting: GOR, ÖGOR, SIGOPT, Zürich, 1998, 54–55.
- [18] Д. А. Супруненко, *Группы подстановок*, Наука і техніка, Минск, 1996.
- [19] В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов, *Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников)*, Наука, М., 1981.
- [20] А. Схрейвер, *Теория линейного и целочисленного программирования*, **1**, Мир, М., 1991.

В. М. Демиденко

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск

E-mail: demidenko@bas-net.by

Поступило

03.05.2005

Исправленный вариант

12.12.2005