Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Серовайский, Оптимальное управление в нелинейных бесконечномерных системах с двумя типами недифференцируемости, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 6, 885–901

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3364>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:03:14

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНЫХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ С ДВУМЯ ТИПАМИ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

С. Я. Серовайский

Рассматривается задача оптимального управления для системы, описываемой нелинейным уравнением эллиптического типа. Если нелинейный член уравнения является гладким, а скорость роста нелинейности сравнительно низкой, то необходимые условия оптимальности получаются известными методами. При малых значениях показателя нелинейности в гладком случае предлагается аппроксимация оператора состояния некоторым дифференцируемым оператором. Показывается, что решение аппроксимационной задачи, получаемое стандартными методами, обеспечивает близость критерия оптимальности для исходной задачи к его минимальному значению. При достаточно больших значениях показателя нелинейности зависимость функции состояния по управлению оказывается недифференцируемой даже в условиях гладкости оператора. Однако она оказывается расширенно дифференцируемой, что будет достаточным для получения необходимых условий оптимальности. Наконец, в отсутствие гладкости и ограничений на показатель нелинейности уравнения осуществляется гладкая аппроксимация оператора состояния. Затем устанавливаются необходимые условия оптимальности для аппроксимационной задачи на основе расширенной дифференцируемости решения аппроксимированного уравнения по управлению, после чего показывается, что оптимальное управление для аппроксимационной экстремальной задачи минимизирует исходный функционал с произвольной степенью точности.

Библиография: 23 названия.

1. Введение. Начиная с классического результата Ферма (необходимое условие экстремума функции), теория экстремума базируется на операции дифференцирования. Любое необходимое условие оптимальности первого порядка предполагает дифференцирование критерия оптимальности (см., например, [1], [2]).

Как известно, общая теория дифференцирования операторов излагается на объектах, обладающих смешанной (алгебраической и топологической) структурой, например, на линейных топологических пространствах (см., например, [3], [4]). Соответственно производные операторов обладают рядом алгебраических (точнее, линейных) и топологических свойств. В частности, “основная идея дифференциального исчисления ... локальное приближение функции линейной функцией” (см. [5; с. 170]). Тем самым, дифференцирование оператора предполагает его локальную аппроксимацию линейным оператором. Возможность перехода от нелинейного оператора к линейному связана с наличием некоторых алгебраических (линейных)

свойств оператора, а сам факт аппроксимации может быть выражен исключительно посредством некоторых топологических конструкций.

В свою очередь, отсутствие дифференцируемости обусловлено нарушением каких-либо свойств, лежащих в основе определения производной. При этом в задачах оптимального управления нелинейными бесконечномерными системами можно столкнуться с обоими типами потери дифференцируемости. Одну из них условно можно назвать алгебраической, а другую – топологической. Первый случай соответствует наличию негладких членов (например, модуль функции, максимум двух функций и т.п.) в уравнении состояния или (чаще) в критерии оптимальности, когда принципиально невозможно построить касательное пространство в некоторой точке для соответствующих объектов. Связанные с этим трудности преодолеваются с помощью ослабления алгебраических требований, предъявляемым к производным. Оптимизационные задачи с “алгебраической” недифференцируемостью решаются с помощью методов негладкой оптимизации, базирующихся на “алгебраических” обобщениях производной – субдифференциале [6], производной Кларка [7] и т.п. Характерно, что исходный оператор и соответствующий аналог производной в этом случае действуют на одних и тех же топологических пространствах, а степень их близости описывается на том же топологическом языке, что и в случае классических производных.

Второй тип недифференцируемости возможен даже при отсутствии в системе не гладких членов типа модуля. При этом функция состояния системы может оказаться недифференцируемой по управлению в связи с недостатком некоторых топологических свойств [8]. Тем не менее, соответствующий нелинейный оператор в ряде случаев может быть локально аппроксимирован линейным, но его “производная” действует уже в иных пространствах по сравнению с исходным оператором. Обобщение производной здесь осуществляется за счет ослабления некоторых топологических свойств, притом, что все алгебраические характеристики имеют ту же форму, что и для обычных операторных производных. Соответствующее понятие расширенной производной и его применение в задачах оптимального управления нелинейными бесконечномерными системами рассматривается в [8], [9].

В настоящей работе рассматривается оптимизационная задача при возможном наличии обоих типов недифференцируемости. Система описывается нелинейным уравнением эллиптического типа. Показывается, что при малых значениях показателя нелинейности функция состояния системы оказывается дифференцируемой по управлению. Если при этом нелинейный член является гладким (слабо нелинейный гладкий случай), то необходимые условия оптимальности могут быть получены классическими методами [1], [2]. В отсутствие гладкости при малых значениях показателя нелинейности (слабо нелинейный негладкий случай), в принципе, можно воспользоваться методами негладкой оптимизации [6], [7]. Однако поскольку негладкий член присутствует в уравнении состояния, а не в критерии оптимальности, представляется целесообразным осуществить гладкую аппроксимацию уравнения подобно тому, как это делается в [10]. При больших значениях показателя нелинейности функция состояния системы уже не будет дифференцируемой по управлению. В условиях гладкости нелинейного члена уравнения (сильно нелинейный гладкий случай) необходимые условия оптимальности получаются за счет применения аппарата расширенных производных [8], [9]. Наконец, при одновременном наличии обоих типов недифференцируемости (сильно нелинейный негладкий случай) желаемый результат достигается за счет сочетания обоих рассматриваемых

приемов. Нелинейный член уравнения аппроксимируется некоторым гладким выражением, а для функции состояния аппроксимированной системы устанавливается расширенная дифференцируемость по управлению.

2. Постановка задачи. Пусть задана открытая ограниченная область Ω пространства $\mathbb{R}^n$. В соответствии с теоремой Соболева имеют место непрерывные вложения $H_0^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $L_{q'}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, где $1/2 - 1/n = 1/q$, $n > 2$, q произвольно и конечно при $n = 2$; $1/q + 1/q' = 1$. Тогда существует такая положительная константа c , что имеют место оценки

$$\|y\|_q \leq c\|y\| \quad \forall y \in H_0^1(\Omega), \quad \|y\|_* \leq c\|y\|_{q'} \quad \forall y \in L_{q'}(\Omega),$$

где через $\|y\|$, $\|y\|_q$ и $\|y\|_*$, обозначены нормы функции y в пространствах $H_0^1(\Omega)$, $L_q(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$ соответственно.

Рассматривается уравнение

$$-\Delta y + g(y) = v \tag{1}$$

с однородным граничным условием (задача Дирихле), где v – управление, g – заданная функция от состояния системы y . Предполагается, что g принадлежит классу G непрерывных функций, удовлетворяющих стандартным условиям коэрцитивности, монотонности, степени роста:

$$g(\xi)\xi > a|\xi|^r, \quad [g(\xi) - g(\eta)](\xi - \eta) \geq 0, \quad |g(\xi)| \leq b|\xi|^{r-1} \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R},$$

где a и b – некоторые положительные константы, а показатель роста нелинейности r удовлетворяет неравенству $r > 1$. Естественным объектом класса G является степенная функция $g(\xi) = |\xi|^{r-2}\xi$. При данных ограничениях уравнение (1) допускает априорную оценку решения в пространстве $Y = H_0^1(\Omega) \cap L_r(\Omega)$. Управление v выбирается из выпуклого замкнутого ограниченного подмножества U пространства $V = Y'$ сопряженного с Y . Пользуясь теорией монотонных операторов (см., например, [11; с. 184]), можно показать, что для любого управления $v \in U$ задача Дирихле для уравнения (1) имеет единственное решение $y = y(v)$ из Y , причем отображение $y(\cdot): V \rightarrow Y$ непрерывно и слабо непрерывно.

Задается функционал

$$I(v) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} [y(v) - y_d]^2 + \frac{\gamma}{s} |v|^s \right\} dx,$$

где $y_d \in L_2(\Omega)$ – известная функция, $\gamma > 0$, $s = \min\{q', r'\}$. Ставится следующая оптимизационная задача.

Задача P. Найти такое управление v на множестве U , которое минимизирует на нем функционал I .

ЛЕММА 1. *Задача P разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу ограниченности снизу минимизируемого функционала существует минимизирующая последовательность допустимых управлений $\{v_k\}$ для задачи P, т.е. справедливы условия

$$v_k \in U, \quad k = 1, 2, \dots, \quad I(v_k) \rightarrow \inf I(U) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Эта последовательность ограничена в силу ограниченности множества допустимых управлений. Тогда после выделения подпоследовательности получаем сходимость $v_k \rightarrow v$ слабо в V , причем справедливо включение $v \in V$ в силу слабой замкнутости множества допустимых управлений. Пользуясь слабой непрерывностью отображения $y(\cdot): V \rightarrow Y$, установим, что $y(v_k) \rightarrow y(v)$ слабо в Y . Учитывая выпуклость и непрерывность функционала $J: L_s(\Omega) \times L_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, где

$$I(v, y) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}(y - y_d)^2 + \frac{\gamma}{s}|v|^s \right] dx,$$

заключаем, что $I(v) \leq \liminf I(v_k)$, а значит, управление v является решением задачи P . Лемма доказана.

Классическая техника получения необходимых условий оптимальности для систем с распределенными параметрами (см., например, [2]) предполагает дифференцирование критерия оптимальности. Для задач оптимального управления системами, описываемыми нелинейными уравнениями эллиптического типа, она используется, например, в [12], [13]. Как мы убедимся ниже, этот аппарат работает в случае гладкости функции g и достаточной малости показателя нелинейности r , что соответствует выполнению неравенства $r \leq q$ и условию $Y = H_0^1(\Omega)$ (слабо нелинейный гладкий случай). При достаточной малости показателя нелинейности в отсутствие гладкости необходимые условия оптимальности могли бы быть получены на основе методов негладкой оптимизации (см., например, [6], [7]), связанных с использованием таких обобщений производных функционалов, как субдифференциал, производная Кларка и т.д. Однако эти методы более эффективны в отсутствие гладкости критерия оптимальности, а не оператора состояния. В этой связи анализ слабо нелинейного негладкого случая для задачи P мы будем осуществлять на основе гладкой аппроксимации оператора состояния [10].

При достаточно больших значениях показателя нелинейности, когда пространство состояний Y существенно зависит от r , зависимость функции состояния от управления (отображение $y(\cdot): V \rightarrow Y$) оказывается недифференцируемой в классическом смысле даже в условиях гладкости функции g . Вследствие этого классические методы оптимизации типа [2] оказываются неприменимыми. Методы негладкой оптимизации [6], [7], [10] здесь также неэффективны в виду отсутствия в постановке задачи негладких членов. Из-за нарушения для уравнения состояния утверждений теорем об обратной функции [13] и Люстерника [14] здесь оказываются непригодными результаты общей теории экстремума (см., например, [1], [15]–[17]). Однако в этом (сильно нелинейном гладком) случае отображение $y(\cdot): V \rightarrow Y$ оказывается дифференцируемым в расширенном смысле [8], что является свидетельством справедливости некоторого ослабленного варианта теоремы об обратной функции [18]. Это позволяет получить необходимые условия оптимальности на основе классического подхода [2] с заменой обычных операторных производных на расширенные.

Наконец, остается еще негладкий сильно нелинейный случай, связанный с одновременным отсутствием гладкости функции g и малости параметра r , когда все описанные выше методы оказываются непригодными. Желаемый результат здесь достигается за счет сочетания техники гладкой аппроксимации оператора состояния и теории расширенной дифференцируемости операторов.

Отметим, что для рассматриваемой задачи (исключая ее простейший случай) оказываются непригодными и методы оптимизации сингулярных нелинейных бесконечномерных систем (см., в частности, [19]). В работах этого направления трудности

связаны с нарушением существования или единственности решения краевой задачи на всем множестве допустимых управлений, т.е. с сингулярностью уравнения. В то же время нелинейные члены там предполагаются гладкими и с достаточно малым показателем роста (когда функциональный класс состояния системы характеризуется исключительно линейными членами уравнения). В данном же случае, напротив, уравнение состояния является регулярным, а наблюдаемые сложности имеют качественно иную природу. Вследствие этого применяемый в [19] метод штрафа как альтернатива методу вариаций функционала для задачи P оказывается непригодным (за исключением слабо нелинейного гладкого случая), хотя он может быть использован при анализе слабо нелинейных негладких сингулярных систем [20].

3. Слабо нелинейный гладкий случай. Будем полагать, что показатель нелинейности уравнения r столь мал, что справедливо неравенство $r \leq q$, что соответствует слабо нелинейному случаю. Тогда справедливо равенство $Y = H_0^1(\Omega)$, т.е. пространство состояний системы не зависит от показателя нелинейности. При этом сопряженное к нему пространство управлений совпадает с $H^{-1}(\Omega)$. Пусть, кроме того, функция g непрерывно дифференцируема, причем ее производная удовлетворяет оценке $|g'(\xi)| \leq c|\xi|^{r-2}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$, что соответствует гладкому случаю. Указанному неравенству удовлетворяет, к примеру, упомянутая ранее степенная функция, причем слабо нелинейный случай соответствует малым значениям показателя степени. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Для слабо нелинейного гладкого случая отображение $y(\cdot): V \rightarrow Y$ дифференцируемо по Фреше в пространстве V , причем его производная $y'(v_0)$ в произвольной точке v_0 характеризуется соотношением*

$$-\Delta y'(v_0)h + g'(y(v_0))y'(v_0)h = h \quad \forall h \in V. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим оператор $A: Y \rightarrow V$, выбирая в качестве Ay левую часть равенства (1). Этот оператор в любой точке $y_0 \in Y$ имеет (в гладком случае) производную, характеризуемую равенством

$$A'(y_0)y = -\Delta y + g'(y_0)y \quad \forall y \in Y.$$

Рассмотрим линеаризованное уравнение

$$-\Delta y + g'(y_0)y = v. \quad (3)$$

Умножая это равенство на функцию y и интегрируя формально результат по области Ω , получаем соотношение

$$\int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx + \int_{\Omega} g'(y_0)y^2 dx = \int_{\Omega} vy dx. \quad (4)$$

В слабо нелинейном случае первый интеграл в равенстве (4) представляет собой квадрат нормы в пространстве Y . Учитывая неотрицательность производной функции g в силу ее монотонности и дифференцируемости, из условия (4) выводим оценку

$$\|y\|_Y \leq \|v\|_V.$$

Пользуясь классической теорией линейных уравнений эллиптического типа (см., например, [2; с. 31]), установим, что для любого $v \in V$ уравнение (3) однозначно

разрешимо в пространстве Y . Таким образом, производная $A'(y_0)$ оператора состояния A является биекцией. Применяя теорему об обратной функции (см., [14; с. 40]), получаем дифференцируемость по Фреше решения уравнения (1) по свободному члену.

Для нахождения явного вида производной оператора $y(\cdot)$ в некоторой точке v_0 рассмотрим следующее из уравнения (1) равенство

$$-\Delta[y(v_0 + \sigma h) - y(v_0)] + [g(y(v_0 + \sigma h)) - g(y(v_0))] = \sigma h. \quad (5)$$

При имеющихся ограничениях оператор Немыцкого $g(\cdot): L_r(\Omega) \rightarrow L_{r'}(\Omega)$ дифференцируем по Фреше (см. [21; с. 312]), откуда в слабо нелинейном случае следует аналогичное свойство отображения $g(\cdot): Y \rightarrow V$. Тогда справедливо равенство

$$g(y(v_0 + \sigma h)) = g(y(v_0)) + g'(y_0)[y(v_0 + \sigma h) - y(v_0)] + \eta(\sigma),$$

где $\|\eta(\sigma)\|_* = o(\|y(v_0 + \sigma h) - y(v_0)\|)$. После деления левой и правой части (5) на σ и перехода к пределу при $\sigma \rightarrow 0$ с учетом дифференцируемости $y(\cdot)$ и совпадения производных Фреше и Гато в случае существования первой из них получаем соотношение (2). Лемма доказана.

Теперь несложно установить следующий результат.

ЛЕММА 3. *В слабо нелинейном гладком случае функционал I в произвольной точке v_0 пространства V обладает производной Фреше*

$$I'(v_0) = \gamma|v_0|^{s-2}v_0 - p_0, \quad (6)$$

где p_0 есть решение однородной задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta p_0 + g'(y_0)p_0 = y_d - y_0, \quad (7)$$

причем $y_0 = y(v_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь леммой 1, установим, что функционал I в точке v_0 обладает производной Гато $I'(v_0)$, удовлетворяющей соотношению

$$I'(v_0)h = \int_{\Omega} (y_0 - y_d)y'(v_0)h \, dx + \gamma \int_{\Omega} |v_0|^{s-2}v_0 h \, dx \quad \forall h \in V.$$

Сопряженное уравнение (7) отличается от линейаризованного уравнения (3) только видом свободного члена, причем свободные члены обоих уравнений являются в условиях теоремы элементами одного и того же функционального пространства $H^{-1}(\Omega)$. Тогда уравнение (7) однозначно разрешимо в пространстве Y . Умножая равенство (2) на функцию p_0 и интегрируя результат по области Ω , будем иметь

$$-\int_{\Omega} \Delta p_0 y'(v_0)h \, dx + \int_{\Omega} p_0 g'(y_0)y'(v_0)h \, dx = \int_{\Omega} p_0 h \, dx \quad \forall h \in V.$$

Учитывая равенство (7), приходим к условию

$$\int_{\Omega} (y_d - y_0)y'(v_0)h \, dx = \int_{\Omega} p_0 h \, dx \quad \forall h \in V.$$

В результате для производной функционала I получаем соотношение

$$I'(v_0)h = \int_{\Omega} (\gamma|v_0|^{s-2}v_0 - p_0)h \, dx \quad \forall h \in V,$$

откуда следует равенство (6). Лемма доказана.

Теперь получение необходимых условий оптимальности не представляет особого труда.

ТЕОРЕМА 1. *В слабо нелинейном гладком случае решение v_0 задачи P удовлетворяет вариационному неравенству*

$$\int_{\Omega} (\gamma |v_0|^{s-2} v_0 - p_0)(u - v_0) dx \geq 0 \quad \forall u \in U. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, необходимым условием минимума дифференцируемого функционала является вариационное неравенство (см. [2; теорема 1.3, с. 18])

$$I'(v_0)(u - v_0) \geq 0 \quad \forall u \in U,$$

откуда в силу формулы (6) следует условие (8).

На основе теоремы 1 для нахождения оптимального управления требуется решить задачу Дирихле для системы нелинейных уравнений эллиптического типа (1) (при $v = v_0$), (7) и соотношение (8).

Понятно, что получение необходимых условий оптимальности в слабо нелинейном гладком случае полностью укладывается в стандартную схему решения задач оптимального управления (см., например, [1], [2], [6], [12], [13], [15], [16], [17]). Теорема 1 представляет интерес исключительно как стартовая точка для перехода к рассмотрению существенно более сложных задач в отсутствии ограничений на гладкость и степень роста нелинейного члена уравнения (1).

4. Слабо нелинейный негладкий случай. Рассмотрим задачу P в отсутствии использованного в теореме 1 свойства гладкости функции g , считая, однако, показатель нелинейности уравнения r по-прежнему удовлетворяющим условию $r \leq q$. В отсутствие гладкости определенного в лемме 2 оператора A мы не имеем возможности воспользоваться теоремой об обратной функции для доказательства дифференцируемости функции состояния системы по управлению с последующим применением стандартных методов оптимизации [2]. Если бы негладкий член входил не в уравнение состояния, а в критерий оптимальности, то мы смогли бы воспользоваться леммой 2 и установить необходимые условия оптимальности за счет использования более слабых форм производных функционалов – субдифференциала [6], производной Кларка [7] и т.п. Однако применение этого аппарата для нелинейных бесконечномерных управляемых систем наталкивается на значительные технические трудности в виду чрезвычайно сложного характера зависимости функции состояния системы от управления, который неизбежно проявляется в процессе варьирования управления. В этой связи для получения желаемого результата мы воспользуемся гладкой аппроксимацией оператора системы [10].

Рассмотрим последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\{g_n\}$ класса G , удовлетворяющих оценке $|g'_n(\xi)| \leq c|\xi|^{r-2}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$ и условию

$$g_n(y) \rightarrow g(y) \quad \text{в } L_{r'}(\Omega) \quad (9)$$

равномерно по y на ограниченных подмножествах $L_r(\Omega)$ при $n \rightarrow \infty$.

Определим функционал

$$I_n(v) = \int_{\Omega} \left\{ [y_n(v) - y_d]^2 + \frac{\gamma}{s} |v|^s \right\} dx,$$

где $y_n(v)$ – решение однородной задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta y_n(v) + g_n(y_n(v)) = v. \quad (10)$$

Рассматривается следующая экстремальная задача.

ЗАДАЧА P_n . Найти такое управление v из множества U , которое минимизирует на нем функционал I_n .

Пользуясь леммой 1 и теоремой 1, установим следующее утверждение.

ЛЕММА 4. В слабо нелинейном случае задача P_n имеет решение v_n , удовлетворяющее вариационному неравенству

$$\int_{\Omega} (\gamma |v_n|^{s-2} v_n - p_n)(u - v_n) dx \geq 0 \quad \forall u \in U, \quad (11)$$

где p_n есть решение однородной задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta p_n + g'_n(y_n) p_n = y_d - y_n,$$

причем $y_n = y_n(v_n)$.

Покажем справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 5. При $n \rightarrow \infty$ в слабо нелинейном негладком случае имеет место сходимость $y_n(u) \rightarrow y(u)$ в Y равномерно по $u \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо равенство

$$-\Delta[y_n(u) - y(u)] + g_n(y_n(u)) - g_n(y(u)) + g_n(y(u)) - g(y(u)) = 0.$$

Умножая его на разность $y_n(u) - y(u)$ и интегрируя результат по области Ω с учетом формулы Грина, будем иметь

$$\begin{aligned} & \|y_n(u) - y(u)\|^2 + \int_{\Omega} [g_n(y_n(u)) - g_n(y(u))][y_n(u) - y(u)] dx \\ & + \int_{\Omega} [g_n(y(u)) - g(y(u))][y_n(u) - y(u)] dx = 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу монотонности функции g_n (определение класса G) для слабо нелинейного случая получаем оценку

$$\|y_n(u) - y(u)\|^2 \leq \|y_n(u) - y(u)\|_r \|g_n(y(u)) - g(y(u))\|_{r'}.$$

Учитывая, что семейство функций $\{y(u) \mid u \in U\}$ ограничено в пространстве $L_r(\Omega)$ в силу ограниченности множества U , из последнего неравенства и условия (9) с учетом теоремы вложения Соболева следуют утверждения леммы.

Центральным результатом данного пункта является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. В слабо нелинейном негладком случае при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость $I(v_n) \rightarrow I(v_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь очевидным условием $I_n(v_n) \leq I_n(v_0)$, установим соотношение

$$I_n(v_n) - I(v_0) \leq I_n(v_0) - I(v_0) \leq \sup_{u \in U} |I_n(u) - I(u)|.$$

Аналогично из неравенства $I(v_0) \leq I(v_n)$ следует

$$I(v_0) - I_n(v_n) \leq I(v_n) - I_n(v_n) \leq \sup_{u \in U} |I_n(u) - I(u)|.$$

В результате получаем оценку

$$|I_n(v_n) - I(v_0)| \leq \sup_{u \in U} |I_n(u) - I(u)|.$$

Отсюда в силу леммы 5 следует, что $I_n(v_n) \rightarrow I(v_0)$. Справедлива оценка

$$|I(v_n) - I(v_0)| \leq |I(v_n) - I_n(v_n)| + |I_n(v_n) - I(v_0)| \leq \sup_{u \in U} |I_n(u) - I(u)| + |I_n(v_n) - I(v_0)|.$$

Теперь для получения желаемого результата достаточно воспользоваться леммой 5 и установленной ранее сходимостью минимумов функционалов. Теорема доказана.

Теорема 2 говорит о том, что определяемое из соотношения (11) решение задачи P_n при достаточно больших значениях параметра n оказывается таким допустимым управлением, значение функционала I на котором сколь угодно близко к минимуму последнего на множестве U . Тем самым, его можно понимать как приближенное решение задачи P . Естественно, мы не можем гарантировать близость самого управления v_n к оптимальному управлению v_0 . Однако вспомним, что даже в гладком случае (как и вообще для нелинейных задач оптимального управления, см. [1], [2]) мы не можем гарантировать оптимальности произвольного решения полученной согласно теореме 1 системы условий оптимальности, имея лишь их необходимость. Да и практическое решение полученной системы условий оптимальности представляется далеко не простой задачей. Кроме того, даже для нелинейных систем с сосредоточенными параметрами характерно отсутствие корректности экстремальной задачи в смысле Тихонова [22]. В этих условиях можно надеяться лишь на обеспечение близости приближенного решения задачи в смысле функционала, но не управления [23]. Таким образом, устанавливаемое с помощью теоремы 2 и соотношения (11) приближенное решение задачи P в слабо нелинейном негладком случае следует признать удовлетворительным. Отметим, что используемый выше способ гладкой аппроксимации оператора состояния использовался в [10] для оптимизационных задач с более узким пространством управлений и более регулярным критерием оптимальности. Понятно, что в условиях леммы 5 и теоремы 2 слово “негладкий” может быть опущено. Их утверждения остаются в силе и для гладкого случая, однако для него естественно воспользоваться более простой техникой, описанной ранее.

5. Сильно нелинейный гладкий случай. Предположим, что функция g удовлетворяет принятому ранее условию гладкости, однако ограничение на степень роста нелинейности r отсутствует. В этих условиях пространство состояний Y уже будет зависеть от параметра r , т.е. от нелинейного члена уравнения. На первый взгляд, в постановке задачи P отсутствуют негладкие выражения, а следовательно,

доказательство дифференцируемости минимизируемого функционала и обоснование необходимых условий оптимальности не должно вызывать каких-либо затруднений. Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 6. *В отсутствии вложения $H_0^1(\Omega) \subset L_r(\Omega)$ оператор $y(\cdot): V \rightarrow Y$ не дифференцируем по Гато.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве леммы 2, рассмотрим оператор состояния $A: Y \rightarrow V$, характеризуемый левой частью равенства (1). Определим его производную

$$A'(y_0)y = -\Delta y + g'(y_0)y \quad \forall y \in Y \quad (12)$$

в случае непрерывности функции y_0 . Учитывая непрерывную дифференцируемость функции g , заключаем, что правая часть равенства (12) (образ производной оператора A) для любого $y \in Y$ принадлежит пространству $V_* = H^{-1}(\Omega)$, более узкому, чем V при выполнении условий леммы. Тем самым, линеаризованное уравнение $A'(y_0)y = v$ не может быть разрешимо в пространстве Y , если его свободный член принадлежит дополнению $V_* \setminus V$. Таким образом, производная оператора A в точке y_0 уже не является биекцией, т.е. нарушаются условия теоремы об обратной функции [14], использованной при доказательстве дифференцируемости функции состояния системы по управлению в лемме 2. Отметим, что на основе классических результатов о гладкости решения нелинейного уравнения эллиптического типа с монотонным оператором [11] управление v_0 можно выбрать столь гладким, чтобы соответствующее ему решение $y_0 = y(v_0)$ однородной задачи Дирихле для уравнения (1) оказалось непрерывным. По крайней мере, в такой точке v_0 доказательство дифференцируемости отображения $y(\cdot): V \rightarrow Y$ наталкивается на принципиальные трудности. Предположим, однако, что оно все-таки дифференцируемо в этой точке хотя бы в смысле Гато, т.е. существует такой линейный непрерывный оператор $y'(v_0): V \rightarrow Y$, что для любого $h \in V$ при $\sigma \rightarrow 0$ имеем сходимость

$$\frac{y(v_0 + \sigma h) - y_0}{\sigma} \rightarrow y'(v_0)h$$

в смысле Y . Повторяя рассуждения из доказательства леммы 2 (деление равенства (5) на σ и предельный переход, когда σ стремится к нулю), получаем установленное ранее соотношение (2)

$$-\Delta y'(v_0)h + g'(y(v_0))y'(v_0)h = h \quad \forall h \in V.$$

Сравнивая это выражение с равенством (12), заключаем, что для любого $v \in V$ линеаризованное уравнение $A'(y_0)y = v$ имеет решение $y = y'(v_0)v$ из класса Y . Однако ранее было установлено, что это невозможно, по крайней мере, при $v \in V_* \setminus V$. Установленное противоречие завершает доказательство.

Итак, в сильно нелинейном случае мы не только не можем установить дифференцируемость функции системы по управлению. Соответствующее отображение вообще не является дифференцируемым в некоторых точках пространства управлений. Как видно из доказательства последнего утверждения, точки нарушения дифференцируемости указанного оператора обладают повышенной регулярностью (в действительности, функция y_0 не обязательно непрерывна), т.е. не являются типичными представителями пространства V . Однако мы не можем исключить возможность нахождения среди них оптимального управления. Вследствие этого используемая ранее техника доказательства леммы 3, а значит, и опирающаяся на

нее теоремы 1, оказывается неприменимой. Характерно, что отсутствие дифференцируемости функции системы по управлению реализуется в условиях гладкости нелинейного члена. Таким образом, используемая в слабо нелинейном негладком случае гладкая аппроксимация оператора состояния [10], а в равной степени, известные методы негладкой оптимизации [6], [7] оказываются здесь непригодными. Необходимые условия оптимальности в данном случае могут быть получены на основе качественно иного математического аппарата.

Отметим, что затруднения при попытке распространения утверждений леммы 2 на сильно нелинейный случай начались с исследования линеаризованного уравнения (3). Соответствующее ему энергетическое равенство (4) в отсутствии вложения $H_0^1(\Omega) \subset L_r(\Omega)$ уже не дает априорную оценку решения в пространстве Y , необходимую для доказательства однозначной разрешимости этого уравнения в данном пространстве. Отметим, однако, что левая часть указанного равенства

$$\int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx + \int_{\Omega} g'(y(v_0))y^2 dx = \int_{\Omega} vy dx$$

представляет собой квадрат нормы в гильбертовом пространстве

$$Y(v_0) = H_0^1(\Omega) \cap \{y \mid \sqrt{g'(y(v_0))}y \in L_2(\Omega)\}$$

со скалярным произведением

$$(y, z) = \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla z dx + \int_{\Omega} g'(y(v_0))yz dx \quad \forall y, z \in Y(v_0).$$

Тогда из приведенного выше энергетического равенства следует априорная оценка решения линеаризованного уравнения

$$\|y\|_{Y(v_0)} \leq \|v\|_{V(v_0)}, \quad \text{где } V(v_0) = Y(v_0)'.$$

Отсюда следует, что для любого $v \in V(v_0)$ линеаризованное уравнение (3), записанное в операторном виде $A'(y_0)y = v$, имеет единственное решение $y \in Y(v_0)$. Этого, естественно, не достаточно для справедливости условий теоремы об обратной функции, поскольку в отсутствии вложения $H_0^1(\Omega) \subset L_r(\Omega)$ требуется, чтобы при более слабых ограничениях на свободный член уравнения (пространство V более широкое, чем $V(v_0)$) решение уравнения обладало бы более сильными свойствами (пространство Y более узкое, чем $Y(v_0)$). Можно, однако, предположить, что вследствие наличия более слабой формы условий теоремы об обратной функции соответствующий обратный оператор (т.е. зависимость функции состояния от управления) будет удовлетворять некоторому свойству, близкому к дифференцируемости, хотя и более слабому. В результате мы приходим к понятию расширенной производной оператора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [8]. Оператор $L: V \rightarrow Y$ назовем $(V_0, Y_0; V_*, Y_*)$ -расширенно дифференцируемым по Гато в точке $v_0 \in V$, если существуют такие линейные нормированные пространства V_0, Y_0, V_*, Y_* , удовлетворяющие непрерывным вложениям $V_* \subset V_0 \subset V, Y \subset Y_0 \subset Y_*$, и линейный непрерывный оператор $D: V_0 \rightarrow Y_0$ (расширенная производная), что при $\sigma \rightarrow 0$ имеет место сходимость

$$\frac{L(v_0 + \sigma h) - Lv_0}{\sigma} \rightarrow Dh \quad \text{в } Y_* \quad \text{для любого } h \in V_*.$$

Отметим, что область определения расширенной производной уже, а область значений шире по сравнению с обычной производной Гато. Сходимость приращения оператора осуществляется в еще более слабой топологии пространства Y_* , причем для более узкого класса направлений h . Таким образом, понятие расширенной производной Гато является более общим по сравнению с соответствующим классическим понятием. При этом ослабление требований, предъявляемых к производным, носит топологический, а не алгебраический характер, как в случае субдифференциала и т.п., когда оператор и его производная ассоциируются с одними и теми же пространствами. Естественно, $(V, Y; V, Y)$ -расширенная производная совпадает с обычной производной Гато. Отметим также, что рассматриваемые пространства могут зависеть (и, как мы убедимся, в нашем случае действительно зависят) от точки v_0 , в которой осуществляется дифференцирование оператора.

Покажем, что оператор $y(\cdot): V \rightarrow Y$ в любой точке $v_0 \in V$ обладает $(V(v_0), Y(v_0); V_*, Y_*)$ -расширенной производной Гато, где пространства $V(v_0)$ и $Y(v_0)$ определены выше, $V_* = H^{-1}(\Omega)$, $Y_* = H_0^1(\Omega)$.

ЛЕММА 7. *Отображение $y(\cdot): V \rightarrow Y$ в любой точке $v_0 \in V$ обладает $(V(v_0), Y(v_0); V_*, Y_*)$ -расширенной производной Гато $y'(v_0)$, характеризующей соотношением*

$$-\Delta y'(v_0)h + g'(y(v_0))y'(v_0)h = h \quad \forall h \in V(v_0). \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вновь следующее из уравнения (1) равенство (5) для любого $h \in V_*$. Умножая его на достаточно гладкую функцию λ , интегрируя результат по области Ω и используя формулу конечных приращений, будем иметь

$$-\int_{\Omega} \Delta[y(v_0 + \sigma h) - y_0] \lambda \, dx + \int_{\Omega} (g_{\sigma})^2[y(v_0 + \sigma h) - y_0] \lambda \, dx = \sigma \int_{\Omega} h \lambda \, dx, \quad (14)$$

где $(g_{\sigma})^2 = g'(y_0 + \varepsilon[y(v_0 + \sigma h) - y_0])$, $\varepsilon \in (0, 1)$.

Определим уравнение

$$-\Delta p + (g_{\sigma})^2 p = \mu, \quad (15)$$

а также гильбертово пространство $Y_{\sigma} = H_0^1(\Omega) \cap \{y \mid g_{\sigma} y \in L_2(\Omega)\}$ и сопряженное с ним пространство V_{σ} , совпадающие с определенными ранее классами $Y(v_0)$ и $V(v_0)$ при $\sigma = 0$. Умножая равенство (15) на функцию p и интегрируя результат по области Ω , получаем оценку $\|p\|_{V'_{\sigma}} \leq \|\mu\|_{Y'_{\sigma}}$. Отсюда следует, что для любых чисел σ и значений $h \in V_*$, $\mu \in Y'_{\sigma}$ уравнение (14) имеет единственное решение $p = p_{\sigma}(\mu)$ из класса V'_{σ} . Определив в равенстве (14) $\lambda = p_{\sigma}(\mu)$, получаем

$$\int_{\Omega} \mu \frac{y(v_0 + \sigma h) - y(v_0)}{\sigma} \, dx = \int_{\Omega} h p_{\sigma}(\mu) \, dx. \quad (16)$$

При $\sigma \rightarrow 0$ в силу непрерывности решения уравнения (1) по свободному члену для любого $h \in V_*$ имеет место сходимость $y(v_0 + \sigma h) \rightarrow y_0$ в Y . Тогда семейство $\{y(v_0 + \sigma h)\}$ ограничено в пространстве $L_r(\Omega)$, откуда следует ограниченность семейства $\{g_{\sigma}\}$ в классе $L_{2r/(r-2)}(\Omega)$. Умножая равенство (15) на функцию $p_{\sigma}(\mu)$ и интегрируя полученное выражение по области Ω , установим неравенство

$$\|p_{\sigma}(\mu)\|^2 + \|g_{\sigma} p_{\sigma}(\mu)\|_2^2 \leq \|p_{\sigma}(\mu)\| \|\mu\|_*.$$

Определив множество $M = \{\mu \in Y'_* \mid \|\mu\|_* \leq 1\}$, для любого $h \in V_*$ установим оценки

$$\sup_{\mu \in M} \|p_{\sigma}(\mu)\| \leq 1, \quad \sup_{\mu \in M} \|g_{\sigma} p_{\sigma}(\mu)\|_2 \leq 1.$$

Отсюда следует неравенство

$$\sup_{\mu \in M} \|(g_\sigma)^2 p_\sigma(\mu)\|_{r'} \leq \|g_\sigma\|_{2r/(r-2)} \sup_{\mu \in M} \|g_\sigma p_\sigma(\mu)\|_2 \leq \|g_\sigma\|_{2r/(r-2)} \leq \text{const}.$$

При $\sigma \rightarrow 0$ после выделения подсемейства с сохранением прежнего обозначения получаем сходимость $p_\sigma(\mu) \rightarrow p(\mu)$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ равномерно по $\mu \in M$. Пользуясь теоремой Реллиха–Кондрашова, установим, что $p_\sigma(\mu) \rightarrow p(\mu)$ сильно в $L_2(\Omega)$ и почти всюду на Ω . В результате получаем сходимость $(g_\sigma)^2 p_\sigma(\mu) \rightarrow g'(y(v_0))p(\mu)$ п.в. на Ω равномерно по $\mu \in M$. Пользуясь леммой 1.3 (см. [11; с. 25]), имеем $(g_\sigma)^2 p_\sigma(\mu) \rightarrow g'(y(v_0))p(\mu)$ слабо в $L_{r'}(\Omega)$ равномерно по $\mu \in M$. Переходя к пределу при $\sigma \rightarrow 0$ в равенстве (15), где $p = p_\sigma(\mu)$, заключаем, что предельная функция $p(\mu)$ является решением однородной задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta p(\mu) + g'(y(v_0))p(\mu) = \mu. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь соотношение (13) как уравнение относительно величины $y'(v_0)h$ с однородными граничными условиями. Умножая его на указанную величину и интегрируя результат формально по области Ω с учетом определения норм введенных ранее пространств, установим оценку

$$\|y'(v_0)h\|_{Y(v_0)} \leq \|h\|_{V(v_0)}.$$

Отсюда следует, что для любого $h \in V(v_0)$ уравнение (13) имеет единственное решение $y'(v_0)h \in Y(v_0)$. Таким образом, мы действительно имеем дело с отображением $y'(v_0): Y(v_0) \rightarrow V(v_0)$. Его линейность очевидна, а непрерывность следует из полученной выше оценки. Покажем, что этот оператор действительно является расширенной производной.

Умножая равенство (13) на функцию $p(\mu)$ и интегрируя результат по области Ω с учетом соотношения (17), получаем

$$\int_{\Omega} \mu y'(v_0)h \, dx = \int_{\Omega} h p(\mu) \, dx \quad \forall h \in V(v_0), \quad \mu \in Y(v_0)'. \quad (18)$$

Отсюда и из равенства (16) будем иметь

$$\int_{\Omega} \mu \left[\frac{y(v_0 + \sigma h) - y(v_0)}{\sigma} - Dh \right] dx = \int_{\Omega} h [p_\sigma(\mu) - p(\mu)] dx \quad \forall h \in V_*, \quad \mu \in M. \quad (19)$$

В результате получаем соотношение

$$\begin{aligned} \left\| \frac{y(v_0 + \sigma h) - y(v_0)}{\sigma} - Dh \right\| &= \sup_{\mu \in M} \left| \int_{\Omega} \mu \left[\frac{y(v_0 + \sigma h) - y(v_0)}{\sigma} - Dh \right] dx \right| \\ &= \sup_{\mu \in M} \left| \int_{\Omega} h [p_\sigma(\mu) - p(\mu)] dx \right| \leq \|h\|_* \sup_{\mu \in M} \|p_\sigma(\mu) - p(\mu)\| \quad \forall h \in V_*, \quad \mu \in M. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $\sigma \rightarrow 0$ для любого $h \in V$ имеет место сходимость

$$\frac{y(v_0 + \sigma h) - y(v_0)}{\sigma} \rightarrow y'(v_0)h \quad \text{в } Y_*.$$

Лемма доказана.

Итак, дифференциальный характер зависимости функции состояния системы по управлению устанавливается без каких-либо ограничений на показатель нелинейности r , охватывая как слабо нелинейный, так и сильно нелинейный случай (но при условии гладкости). Соответствующее отображение всегда является расширенно дифференцируемым. При достаточно малых значениях показателя нелинейности в условиях вложения $H_0^1(\Omega) \subset L_r(\Omega)$ расширенная производная совпадает с классической производной Гато. Однако с нарушением этого вложения (в сильно нелинейном случае) расширенная производная продолжает существовать уже в отсутствии классической, причем, чем больше показатель нелинейности (чем выше уровень сложности задачи), тем сильнее пространство Y отличается от $H_0^1(\Omega)$, определяемого линейной частью уравнения. Таким образом, с ростом показателя нелинейности наблюдается постепенное ухудшение зависимости решения уравнения от свободного члена, а не резкое, как в случае использования классических производных (дифференцируемость наблюдается при малых значениях параметра r и отсутствует при его больших значениях). Отметим, что установленный результат можно было бы получить и с помощью теоремы о расширенной дифференцируемости обратной функции [18].

Теперь несложно установить дифференцируемость минимизируемого функционала в соответствующем смысле.

ЛЕММА 8. *Функционал I в произвольной точке $v_0 \in V$ обладает $(V_*, \mathbb{R}; V_*, \mathbb{R})$ -расширенной производной Гато, определяемой по формуле (6).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} I(v_0 + \sigma h) - I(v_0) \\ = \int_{\Omega} \frac{1}{2} [y(v_0 + \sigma h) - y(v_0)] [y(v_0 + \sigma h) + y(v_0)] dx + \frac{\gamma}{s} (\|v_0 + \sigma h\|_s^s - \|v_0\|_s^s). \end{aligned}$$

Из леммы 7 для любого $h \in V_*$ следует сходимость

$$\frac{y(v_0 + \sigma h) - y(v_0)}{\sigma} \rightarrow y'(v_0)h \quad \text{в } L_2(\Omega).$$

Тогда из предшествующего равенства после деления на σ и перехода к пределу выводится соотношение

$$I'(v_0)h = \int_{\Omega} (y_d - y_0) y'(v_0) h dx + \gamma \int_{\Omega} |v_0|^{s-2} v_0 h dx \quad \forall h \in V_*.$$

Оно отличается от аналогичного равенства, полученного при доказательстве леммы 3, лишь тем, что функция h выбирается не из исходного пространства управлений V , а из более узкого класса V_* (совпадающего, впрочем, с V в слабо нелинейном случае). Доказательство завершается так же, как и в лемме 3, причем повышенная регулярность функции h обеспечивает существование всех встречающихся в соответствующих выкладках интегралов, а зависимость функции состояния от управления и решение сопряженного уравнения ассоциируются не с Y , а с более широким пространством.

Отметим, что полученная в лемме 7 расширенная производная минимизируемого функционала является его производной по подпространству V_* [3].

ТЕОРЕМА 3. *Утверждения теоремы 1 остаются в силе для сильно нелинейного гладкого случая с заменой в неравенстве множества U на $U_* = \{u_0 + h \mid h \in V_*\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, справедливо неравенство

$$I[v_0 + \sigma(u - v_0)] - I(v_0) \geq 0 \quad \forall u \in U_*, \quad \sigma \in (0, 1),$$

откуда после деления на σ и перехода к пределу с помощью леммы 7 получается вариационное неравенство (8).

Итак, в гладком случае для задачи P необходимые условия оптимальности в форме вариационного неравенства могут быть получены без каких-либо ограничений на показатель роста нелинейности r . Аналогичные результаты были установлены в [9] для случая, когда функция g является степенной, управление выбирается из гильбертова пространства $L_2(\Omega)$, а критерий оптимальности является более регулярным.

6. Сильно нелинейный негладкий случай. В заключительном пункте мы рассмотрим задачу P без каких-либо ограничений на гладкость и степень роста нелинейности, т.е. в тех условиях, при которых доказана ее разрешимость с помощью леммы 1. Описанные в предшествующих пунктах методы исследования по отдельности, а также известные методы оптимизации (см., например, [1], [2], [6], [7], [9], [12], [13], [15]–[17], [19], [20], [23]) не позволяют провести анализ решаемой задачи. Желаемый результат достигается сочетанием использованных ранее приемов, когда для преодоления негладкости оператора состояния осуществляется его гладкая аппроксимация, а необходимые условия оптимальности для аппроксимационной задачи устанавливаются с помощью аппарата расширенной дифференцируемости.

Мы вновь обращаемся к задаче P_n . В отличие от слабо нелинейного негладкого случая для ее исследования уже не удастся воспользоваться теоремой 1 ввиду отсутствия дифференцируемости отображения $y_n(\cdot): V \rightarrow Y$. Однако по аналогии с леммой 7 устанавливается его расширенная дифференцируемость, что позволяет распространить на задачу P_n утверждения теоремы 3. Тем самым, имеет место следующий результат.

ЛЕММА 9. *Утверждения леммы 4 остаются справедливыми в сильно нелинейном случае.*

Очередным результатом исследования в слабо нелинейном негладком случае было обоснование сильной сходимости решения регуляризованного уравнения (лемма 5), используемое для доказательства теоремы 2. Однако в сильно нелинейном случае из неравенства

$$\|y_n(u) - y(u)\|^2 \leq \left| \int_{\Omega} [g_n(y(u)) - g(y(u))] [y_n(u) - y(u)] dx \right|$$

и условия (9) уже не следует сходимость $y_n(u) \rightarrow y(u)$ сильно в Y . Однако справедливо более слабое утверждение

ЛЕММА 10. *При $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость $y_n(u) \rightarrow y(u)$ слабо в Y равномерно по $u \in U$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая уравнение (10) относительно функции $y_n(u)$ на значение этой функции и интегрируя результат по области Ω , получаем

$$\int_{\Omega} |\nabla y_n(u)|^2 dx + \int_{\Omega} g_n(y_n(u)) y_n(u) dx = \int_{\Omega} u y_n(u) dx.$$

Отсюда в силу определения множества G и ограниченности множества U следует равномерная по $u \in U$ ограниченность последовательности $\{y_n(u)\}$ в пространстве Y . Учитывая оценку

$$\|g_n(y_n(u))\|_{r'}^{r'} \leq b \|y_n(u)\|_r^r,$$

установим равномерную по $u \in U$ ограниченность последовательности $\{g_n(y_n(u))\}$ в пространстве $L_{r'}(\Omega)$. Тогда после выделения подпоследовательности получаем, что $y_n(u) \rightarrow y$ слабо в Y и $g_n(y_n(u)) \rightarrow g$ слабо в $L_{r'}(\Omega)$ равномерно по $u \in U$. После выделения подпоследовательности с учетом теоремы Реллиха–Кондрашова получаем, что $y_n(u) \rightarrow y$ сильно в $L_2(\Omega)$ и п.в. на Ω , а значит, $g(y_n(u)) \rightarrow g(y)$ п.в. на Ω равномерно по $u \in U$.

Почти всюду на Ω справедлива оценка

$$\begin{aligned} |g_n(y_n(u)) - g(y)| &\leq |g_n(y_n(u)) - g(y_n(u))| + |g(y_n(u)) - g(y)| \\ &\leq \sup_{y \in L_r(\Omega)} |g_n(y) - g(y)| + |g(y_n(u)) - g(y)|. \end{aligned}$$

Из условия (9) после выделения подпоследовательности установим, что $g_n(y) \rightarrow g(y)$ п.в. на Ω равномерно $y \in L_r(\Omega)$. Тогда из последнего неравенства следует, что $g_n(y_n(u)) \rightarrow g(y)$ п.в. на Ω равномерно по $u \in U$. Применяя лемму 1.3 (см. [11; с. 25]), получаем, что $g_n(y_n(u)) \rightarrow g(y)$ слабо в $L_{r'}(\Omega)$ равномерно по $u \in U$. Переходя к пределу в равенстве (10), заключаем, что предельная функция y удовлетворяет уравнению (1), т.е. справедливо равенство $y = y(u)$. Лемма доказана.

Теперь несложно установить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Утверждения теоремы 2 остаются в силе для сильно нелинейного гладкого случая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как видно из доказательства теоремы 2, для получения желаемого результата достаточно показать, что в общем случае имеет место сходимость $I_n(u) \rightarrow I(u)$ равномерно по $u \in U$. Действительно, из леммы 10 следует, что $y_n(u) \rightarrow y(u)$ слабо в $H_0^1(\Omega)$, а значит, и сильно в $L_2(\Omega)$ равномерно по $u \in U$. Учитывая, что единственный член в определении функционала I_n , зависящий от параметра n , характеризуется нормой $y_n(u)$ в пространстве $L_2(\Omega)$, заключаем, что равномерная по $u \in U$ сходимость $I_n(u) \rightarrow I(u)$ имеет место и в данном случае. Это позволяет завершить доказательство так же, как и в теореме 2.

Итак, мы описали технику решения задачи P в условиях ее разрешимости (см. лемму 1), т.е. без дополнительных ограничений на гладкость и показатель роста нелинейности в уравнении состояния. Естественно, описанная методика может быть использована и при решении других задач оптимального управления нелинейными бесконечномерными системами. Отметим также, что возможность получения содержательного результата для задачи P в негладком случае говорит о том, что зависимость функции состояния для уравнения (1) от управления обладает некоторыми положительными свойствами, которые можно было бы трактовать как ослабленную форму дифференцирования. Фактически локальная аппроксимация нелинейного объекта линейным здесь осуществляется в два этапа: сначала негладкий объект аппроксимируется гладким, а затем последний линеаризуется стандартным способом (с помощью дифференцирования). Понятно, что этот вопрос требует специального анализа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974.
- [2] Ж.-Л. Лионс, *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, Мир, М., 1972.
- [3] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, “Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах”, *УМН*, **22**:6 (1967), 201–260.
- [4] А. Фрелихер, В. Бухер, *Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы*, Мир, М., 1970.
- [5] Ж. Дьедонне, *Основы современного анализа*, Мир, М., 1964.
- [6] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979.
- [7] Ф. Кларк, *Оптимизация и негладкий анализ*, Наука, М., 1988.
- [8] С. Я. Серовайский, “Принципы расширенной дифференцируемости”, *Изв. НАН Республики Казахстан. Сер. физ.-матем.*, 1995, № 1, 44–48.
- [9] С. Я. Серовайский, “Необходимые и достаточные условия оптимальности для систем, описываемых нелинейными уравнениями эллиптического типа”, *Сиб. матем. журн.*, **32**:3 (1991), 141–150.
- [10] С. Я. Серовайский, “Оптимальное управление для уравнений эллиптического типа с негладкой нелинейностью”, *Дифференц. уравнения*, **39**:10 (2003), 1420–1424.
- [11] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [12] В. И. Иваненко, В. С. Мельник, *Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами*, Наукова думка, Киев, 1988.
- [13] У. Е. Райтум, *Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений*, Зинатне, Рига, 1989.
- [14] Ж.-П. Обен, И. Экланд, *Прикладной нелинейный анализ*, Мир, М., 1988.
- [15] А. В. Дмитриук, А. А. Милютин, Н. П. Осмоловский, “Теорема Люстерника и теория экстремума”, *УМН*, **35**:6 (1980), 11–46.
- [16] L. W. Neustadt, “An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems. I. General theory”, *SIAM J. Control*, **4** (1966), 505–527; “II. Applications”, *SIAM J. Control*, **5** (1967), 90–137.
- [17] В. А. Якубович, “К абстрактной теории оптимального управления”, *Сиб. матем. ж.*, **18**:3 (1977), 685–707; **19**:2 (1978), 436–460; **20**:4 (1979), 885–910; **20**:5, 1131–1159.
- [18] С. Я. Серовайский, “Дифференцирование обратной функции в пространствах без нормы”, *Функцион. анализ и его прилож.*, **27**:4 (1993), 84–87.
- [19] Ж.-Л. Лионс, *Управление сингулярными распределенными системами*, Наука, М., 1987.
- [20] С. Я. Серовайский, “Приближенное решение задачи оптимального управления для сингулярного уравнения эллиптического типа с негладкой нелинейностью”, *Изв. вузов. Матем.*, 2004, № 1, 80–86.
- [21] *Функциональный анализ*, ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972.
- [22] T. Zolezzi, “A characterizations of well-posed optimal control systems”, *SIAM J. Control Optimization*, **19**:5 (1981), 604–616.
- [23] Ф. П. Васильев, *Методы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1981.

С. Я. Серовайский

Казахский национальный университет им. аль-Фараби

Поступило

22.07.2004

Исправленный вариант

13.02.2006