Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Степанов, О некоторых конформных и проективных скалярных инвариантах риманова многообразия, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 6, 902–907

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3365>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:10:23

О НЕКОТОРЫХ КОНФОРМНЫХ И ПРОЕКТИВНЫХ СКАЛЯРНЫХ ИНВАРИАНТАХ РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

С. Е. Степанов

Доказывается, что на n -мерном замкнутом ориентированном римановом многообразии для всех $1 \leq r \leq n-1$ векторные пространства конформно-киллинговых, киллинговых и замкнутых конформно-киллинговых r -форм являются конечномерными, а их размерности – числа t_r являются конформными, а k_r и p_r – проективными скалярными инвариантами многообразия, которые обладают следующими свойствами двойственности: $t_r = t_{n-r}$ и $k_r = p_{n-r}$. Кроме того, найден явный вид конформно-киллинговой r -формы на конформно плоском n -мерном римановом многообразии.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Полагаем (M, g) римановым многообразием размерности $n \geq 2$. Для каждого целого $1 \leq r \leq n$ обозначим через $\Omega^r(M, \mathbb{R})$ векторное пространство дифференциальных r -форм на (M, g) и рассмотрим его подпространства. Наиболее известным является подпространство *гармонических r -форм* $H^r(M, \mathbb{R})$, которое на замкнутом ориентированном римановом многообразии (M, g) имеет конечную размерность b_r , носящую название *r -го числа Бетти*. Числа Бетти удовлетворяют *двойственности Пуанкаре* $b_r = b_{n-r}$ и для $n = 2r$ конформно инвариантны (см. [1; с. 85]). Менее известны три других подпространства. Первое из них – $T^r(M, \mathbb{R})$ состоит из *конформно-киллинговых дифференциальных r -форм* или, иначе, конформных тензоров Киллинга–Яно ранга r , которые были введены на римановом многообразии (M, g) как обобщение конформно-киллинговых векторных полей. Второе из них – $K^r(M, \mathbb{R})$ состоит из *козамкнутых конформно-киллинговых дифференциальных r -форм*, называемых еще *киллинговыми r -формами* или, по другой терминологии, тензорами Киллинга–Яно ранга r , которые служат обобщением векторных полей Киллинга. И, наконец, третье подпространство $P^r(M, \mathbb{R})$ состоит из *замкнутых конформно киллинговых дифференциальных r -форм* или, по другой терминологии, замкнутых конформно киллинговых тензоров ранга r , которые являются обобщением конциркулярных векторных полей (см. обзор [1]).

Перечисленные три векторные подпространства на замкнутом ориентированном римановом многообразии (M, g) обладают свойствами, аналогичными свойствам подпространства гармонических форм.

ТЕОРЕМА 1. *На n -мерном замкнутом ориентированном римановом многообразии (M, g) для всех $1 \leq r \leq n-1$ векторные пространства $T^r(M, \mathbb{R})$, $K^r(M, \mathbb{R})$ и $P^r(M, \mathbb{R})$ являются конечномерными, а их размерности – числа $t_r = \dim T^r(M, \mathbb{R})$*

являются конформными, $k_r = \dim K^r(M, \mathbb{R})$ и $p_r = \dim P^r(M, \mathbb{R})$ – проективными скалярными инвариантами многообразия, которые обладают следующими свойствами двойственности: $t_r = t_{n-r}$ и $k_r = p_{n-r}$.

Заметим, что в отличие от t_r , k_r и p_r числа Бетти b_r являются еще и топологическими инвариантами многообразия (M, g) .

Используя проективную инвариантность козамкнутых и замкнутых конформно киллинговых форм, в работах [2] и [3] мы получили их явное выражение в локальной системе координат на проективно плоском псевдоримановом многообразии. Это позволило выписать интегралы специальных уравнений Максвелла и операторы симметрии безмассовых уравнений Дирака на данном многообразии.

В настоящей статье, опираясь на конформную инвариантность конформно киллинговых форм, мы получим их явное выражение в локальной системе координат на конформно плоском многообразии, что, в частности, позволит выписать операторы симметрии уравнений Дирака при наличии массы (см. [3]) на конформно плоском псевдоримановом многообразии.

ТЕОРЕМА 2. На n -мерном конформно плоском римановом многообразии (M, g) каждая точка обладает окрестностью с локальной системой координат $x^1, \dots, x^n$, в которой произвольная конформно киллинговая r -форма ω , $1 \leq r \leq n-1$, имеет локальные компоненты

$$\omega_{i_1 \dots i_r} = e^{-(r+1)\sigma} (A_{kji_1 \dots i_r} x^k x^j + B_{ji_1 \dots i_r} x^j + C_{i_1 \dots i_r}). \quad (1)$$

При этом стоящие в правых частях равенств (1) коэффициенты $A_{kji_1 \dots i_r}$, $B_{ji_1 \dots i_r}$ и $C_{i_1 \dots i_r}$ являются постоянными, кососимметричными по индексам $i_1, \dots, i_r$ и подчиняются следующим условиям:

$$\begin{aligned} A_{kji_2 \dots i_r} + A_{kij_2 \dots i_r} &= 2A_{ki_2 \dots i_r} \bar{g}_{ij} - \sum_{a=2}^r (-1)^a (A_{kii_2 \dots \hat{i}_a \dots i_r} \bar{g}_{ji_a} + A_{kji_2 \dots \hat{i}_a \dots i_r} \bar{g}_{ji_a}), \\ B_{ji_2 \dots i_r} + B_{ij_2 \dots i_r} &= 2B_{i_2 \dots i_r} \bar{g}_{ij} - \sum_{a=2}^r (-1)^a (B_{ii_2 \dots \hat{i}_a \dots i_r} \bar{g}_{ji_a} + B_{ji_2 \dots \hat{i}_a \dots i_r} \bar{g}_{ji_a}) \end{aligned}$$

для

$$A_{ki_2 \dots i_r} = \frac{1}{n-p+1} \bar{g}^{jl} A_{kjl i_2 \dots i_r}, \quad B_{i_2 \dots i_r} = \frac{1}{n-p+1} \bar{g}^{jl} B_{jli_2 \dots i_r}$$

и постоянных компонент $\bar{g}_{ij}$ метрического тензора $\bar{g}$ такого, что $g = e^{-2\sigma} \bar{g}$.

2. Доказательство утверждений. Для произвольного гладкого отображения $f: (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ римановых многообразий обозначим через f_* его дифференциал, а через f^* – транспонированное к f_* отображение. Тогда для любой дифференциальной r -формы $\bar{\omega}$ на $(\bar{M}, \bar{g})$ можно определить дифференциальную r -форму $\omega := f^* \bar{\omega}$ на многообразии (M, g) . Справедлива следующая

ЛЕММА 1. Пусть $f: (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ – конформный диффеоморфизм n -мерных римановых многообразий, определяемый условием $f^* \bar{g} = e^{2\sigma} g$, и ω – конформно киллинговая r -форма, $1 \leq r \leq n-1$, на многообразии (M, g) . Тогда r -форма $\tilde{\omega}$ на многообразии $(\bar{M}, \bar{g})$ такая, что $f^* \tilde{\omega} = e^{(r+1)\sigma} \omega$, будет конформно киллинговой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ – диффеоморфизм. Тогда (см. [4; с. 67]) для любой пары точек $x \in M$ и $\bar{x} = f(x) \in \bar{M}$ можно выбрать такие карты (U, φ) для $x \in U$ и $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ для $\bar{x} \in \bar{U}$, что диффеоморфизм f в этих картах задается уравнениями вида $\bar{x}^1 = x^1, \dots, \bar{x}^n = x^n$. Будем говорить, что многообразия (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ отнесены к общей по отношению к данному диффеоморфизму f системе локальных координат $x^1, \dots, x^n$. В такой системе локальных координат конформный диффеоморфизм $f: (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ определяется условием $\bar{g} = e^{2\sigma}g$, из которого в качестве следствий выводятся равенства (см. [1; с. 84–85])

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + d\sigma(X)Y + d\sigma(Y)X - g(X, Y) \operatorname{grad} \sigma, \quad (2)$$

$$\bar{d}^* \omega = e^{-2\sigma} \{d^* \omega - (n - 2r) i_{\operatorname{grad} \sigma} \omega\} \quad (3)$$

для связностей Леви-Чивиты ∇ и $\bar{\nabla}$ и операторов кодифференцирования d^* и $\bar{d}^*$ римановых многообразий (M, g) и $(\bar{M}, \bar{g})$ соответственно, произвольных векторных полей $X = X^i \partial / \partial x^i$ и $Y = Y^k \partial / \partial x^k$ и внутреннего умножения $i_{\operatorname{grad} \sigma} \omega$, т.е. свертки r -формы ω с вектором $\operatorname{grad} \sigma$.

На многообразии (M, g) конформно киллинговы r -формы составляют ядро естественного дифференциального оператора первого порядка D , действие которого на произвольную форму $\omega \in C^\infty \Lambda^r M$ задается равенством

$$D\omega = \nabla \omega - (r + 1)^{-1} d\omega - (n - r + 1)^{-1} g \wedge d^* \omega$$

для оператора внешнего дифференцирования $d: C^\infty \Lambda^r M \rightarrow C^\infty \Lambda^{r+1} M$, упоминаемого выше сопряженного к d оператору кодифференцирования $d^*: C^\infty \Lambda^r M \rightarrow C^\infty \Lambda^{r-1} M$ и внешнего умножения $\wedge$ дифференциальной $(r - 1)$ -формы $d^* \omega$ на метрический тензор g , которая определяется по закону

$$(g \wedge d^* \omega)(X_0, X_1, \dots, X_r) = \sum_{a=2}^r (-1)^a g(X_0, X_a) (d^* \omega)(X_1, \dots, \hat{X}_a, \dots, X_r)$$

для произвольных $X_0, \dots, X_r \in C^\infty TM$ (см. [2], [5], [6]). Тогда в общей по отношению к данному конформному диффеоморфизму f системе локальных координат $x^1, \dots, x^n$ связь между оператором D и аналогичным ему оператором $\bar{D}$ на многообразии $(\bar{M}, \bar{g})$ в силу (2) и (3) будет задаваться равенством

$$\bar{D}\omega = D\omega - (r + 1) \{d\sigma \otimes \omega - (r + 1)^{-1} d\sigma \wedge \omega - (n - r + 1)^{-1} g \wedge i_{\operatorname{grad} \sigma} \omega\},$$

где $\bar{\omega} = \omega$ в выбранной системе координат. А потому для формы $\tilde{\omega} = e^{(r+1)\sigma} \omega$ будет справедливым соотношение $\bar{D}\tilde{\omega} = e^{(r+1)\sigma} D\omega$, которое и доказывает лемму, поскольку в этом случае

$$\omega \in \operatorname{Ker} D \iff \tilde{\omega} \in \operatorname{Ker} \bar{D}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В работе [6] на замкнутом ориентированном римановом многообразии (M, g) был найден сопряженный к естественному оператору D оператор D^* , построен грубый лапласиан $D^*D: C^\infty \Lambda^p M \rightarrow C^\infty \Lambda^p M$ и доказано, что $\operatorname{Ker} D^*D$ исчерпывается r -формами пространства $T^r(M, \mathbb{R})$. Операторы вида D^*D являются эллиптическими (см., например, [7]) и, как следствие этого, ядро

$\text{Ker } D^*D$ каждого из них представляет собою конечномерное векторное пространство (см. [1; с. 631–632] и [8; гл. 11]). В частности, таковым будет и пространство $T^r(M, \mathbb{R})$, для которого полагаем $t_r = \dim T^r(M, \mathbb{R})$ (см. также [1; с. 49]).

При конформном преобразовании метрики $\bar{g} = e^{2\sigma}g$ конформно киллинговые r -формы ω многообразия (M, g) зададут конформно киллинговые r -формы $\bar{\omega} := e^{(r+1)\sigma}\omega$ на римановом многообразии $(M, \bar{g})$, и вследствие этого базис векторного пространства конформно киллинговых r -форм многообразия $(M, \bar{g})$ будет состоять из базисных нормированных r -форм пространства $T^r(M, \mathbb{R})$. На этом основании делаем вывод, что числа $t_r = \dim T^r(M, \mathbb{R})$ конформно инвариантны.

С помощью оператора Ходжа

$$*: C^\infty \Lambda^r M \cong C^\infty \Lambda^{n-r} M$$

(см. [1; с. 52]) был установлен изоморфизм пространств $*: T^r(M, \mathbb{R}) \cong T^{n-r}(M, \mathbb{R})$ (см. [2; с. 46], [9]), который позволяет теперь сформулировать свойство двойственности $t_r = t_{n-r}$.

Киллинговы r -формы, $1 \leq r \leq n-1$, образующие векторное пространство $K^r(M, \mathbb{R})$, на замкнутом ориентированном римановом многообразии (M, g) исчерпывают $\text{Ker } D^*D \cap \text{Ker } d^*$ (см. [6]) и вследствие этого выполняются равенства $k_r = \dim K^r(M, \mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Ker } D^*D \cap \text{Ker } d^*) < \infty$.

Введем в рассмотрение проективный диффеоморфизм $f: (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ как отображение, которое переводит геодезические многообразия (M, g) в геодезические многообразия $(\bar{M}, \bar{g})$. Заметим, что для проективного диффеоморфизма f отображение $f^{-1}: (\bar{M}, \bar{g}) \rightarrow (M, g)$ также будет проективным диффеоморфизмом.

Необходимое для доказательства теоремы свойство проективного диффеоморфизма описывает доказанная в работе [3] следующая

ЛЕММА 2. Пусть $f: (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ – проективный диффеоморфизм n -мерных римановых многообразий и ω – киллинговая r -форма, $1 \leq r \leq n-1$, на многообразии (M, g) . Тогда r -форма $\tilde{\omega}$ на многообразии $(\bar{M}, \bar{g})$ такая, что

$$f^*\tilde{\omega} = e^{(p+1)\psi}\omega \quad \text{для} \quad \psi = \frac{\ln(\det \bar{g} \det g)}{2(n+1)}$$

будет киллинговой.

На основании данного утверждения заключаем, что при проективном преобразовании метрики $g \rightarrow \bar{g}$ киллинговы r -формы ω многообразия (M, g) породят киллинговы r -формы $\bar{\omega} := e^{(r+1)\psi}\omega$ риманова многообразия $(M, \bar{g})$. В результате чего базис векторного пространства киллинговых r -форм многообразия $(M, \bar{g})$ будет состоять из базисных нормированных r -форм пространства $K^r(M, \mathbb{R})$. На этом основании делаем вывод, что числа k_r проективно инвариантны.

С другой стороны, r -формы, $1 \leq r \leq n-1$, образующие векторное пространство $P^r(M, \mathbb{R})$, исчерпывают $\text{Ker } D^*D \cap \text{Ker } d$ (см. [6]), и поэтому $p_r = \dim P^r(M, \mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Ker } D^*D \cap \text{Ker } d) < \infty$.

Равенство $k_r = p_{n-r}$, выражающее двойственность, следует из установленного ранее изоморфизма $*: K^r(M, \mathbb{R}) \cong P^{n-r}(M, \mathbb{R})$ (см. [2], [5]). Поскольку при этом числа k_r проективно инвариантны, то будут проективно инвариантны и числа p_r . Теорема 1 доказана.

ЛЕММА 3. На n -мерном плоском римановом многообразии (M, g) каждая точка обладает такой окрестностью с локальной системой координат $x^1, \dots, x^n$, в которой произвольная конформно киллинговая r -форма ω , $1 \leq r \leq n-1$, имеет локальные компоненты

$$\omega_{i_1 \dots i_r} = A_{kji_1 \dots i_r} x^k x^j + B_{ji_1 \dots i_r} x^j + C_{i_1 \dots i_r}. \quad (4)$$

При этом коэффициенты $A_{kji_1 \dots i_r}$, $B_{ji_1 \dots i_r}$ и $C_{i_1 \dots i_r}$, стоящие в правых частях равенств, являются постоянными, кососимметричными по индексам $i_1, \dots, i_r$ и подчиняются следующим условиям:

$$\begin{aligned} A_{kji_2 \dots i_r} + A_{kij_2 \dots i_r} &= 2A_{ki_2 \dots i_r} g_{ij} - \sum_{a=2}^r (-1)^a (A_{kii_2 \dots \hat{i}_a \dots i_r} g_{ji_a} + A_{kji_2 \dots \hat{i}_a \dots i_r} g_{ji_a}), \\ B_{jii_2 \dots i_r} + B_{ijj_2 \dots i_r} &= 2B_{i_2 \dots i_r} g_{ij} - \sum_{a=2}^r (-1)^a (B_{ii_2 \dots \hat{i}_a \dots i_r} g_{ji_a} + B_{ji_2 \dots \hat{i}_a \dots i_r} g_{ji_a}) \end{aligned}$$

для

$$A_{ki_2 \dots i_r} = \frac{1}{n-p+1} g^{jl} A_{kjl i_2 \dots i_r}, \quad B_{i_2 \dots i_r} = \frac{1}{n-p+1} g^{jl} B_{jli_2 \dots i_r}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (M, g) – плоское риманово многообразие размерности $n \geq 2$; по определению каждая его точка x имеет окрестность U , изометричную открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$. В произвольной декартовой системе координат $x^1, \dots, x^n$ окрестности U локальные компоненты g_{ij} метрического тензора g становятся постоянными величинами, а символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты ∇ обращаются в нуль. Поэтому в U ковариантное дифференцирование $\nabla_j := \nabla_{\partial_j}$ совпадает с частным $\partial_j = \partial/\partial x^j$, в результате чего уравнения, определяющие конформно киллинговые r -формы (см. [10]), предстают в виде

$$\partial_j \omega_{ii_2 \dots i_r} + \partial_i \omega_{j i_2 \dots i_r} = 2\theta_{i_2 \dots i_r} g_{ij} - \sum_{a=2}^r (-1)^a (\theta_{ii_2 \dots \hat{i}_a \dots i_r} g_{ji_a} + \theta_{ji_2 \dots \hat{i}_a \dots i_r} g_{ii_a}) \quad (5)$$

для локальных компонент $\omega_{i_1 i_2 \dots i_r}$ r -формы ω в окрестности U и компонент $\theta_{i_2 \dots i_r} = (n-r+1)^{-1} g^{ij} \partial_i \omega_{j i_2 \dots i_r}$, которые, в свою очередь, удовлетворяют уравнениям (см. там же)

$$\partial_j \theta_{i_2 i_3 \dots i_r} + \partial_{i_2} \theta_{j i_3 \dots i_r} = 0. \quad (6)$$

Поскольку интегралы уравнений (6) имеют вид $\theta_{i_2 \dots i_r} = A_{ki_2 \dots i_r} x^k + B_{i_2 \dots i_r}$ для любых кососимметричных по всем своим индексам постоянным $A_{i_1 i_2 \dots i_r}$ и $B_{i_2 \dots i_r}$ (см. [5]), то из (5) выводим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_j \omega_{ii_2 \dots i_r} &= A_{ki_2 \dots i_r} g_{ji} + A_{ji_2 \dots i_r} g_{ki} - A_{ii_2 \dots i_r} g_{kj} \\ &+ 2^{-1} \sum_{a=2}^r (-1)^a (A_{ik i_2 \dots \hat{i}_a \dots i_r} g_{ji_a} + A_{ij i_2 \dots \hat{i}_a \dots i_r} g_{ki_a} \\ &- A_{kji_2 \dots \hat{i}_a \dots i_r} g_{ii_a} - A_{jii_2 \dots \hat{i}_a \dots i_r} g_{ki_a} - A_{jki_2 \dots \hat{i}_a \dots i_r} g_{ii_a}), \end{aligned}$$

а потому $\partial_l \partial_k \partial_j \omega_{ii_2 \dots i_r} = 0$. Последнее означает, что локальные компоненты конформно киллинговой r -формы ω имеют вид (4). Условия на участвующие в (4) коэффициенты появляются после подстановки этих компонент в уравнения (5). Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Риманово многообразие (M, g) называется *конформно плоским* (см. [1; с. 86]), если у любой его точки $x \in M$ существует такие окрестность U и функция σ на U , что многообразие $(\bar{M}, \bar{g})$ для $\bar{M} = U$ и $\bar{g} = e^{2\sigma}g$ является плоским римановым многообразием. На плоском многообразии $(\bar{M}, \bar{g})$, как это было доказано в лемме 3, конформно киллинговая r -форма $\bar{\omega}$ имеет локальные компоненты

$$\bar{\omega}_{i_1 \dots i_r} = A_{kji_1 \dots i_r} x^k x^j + B_{ji_1 \dots i_r} x^j + C_{i_1 \dots i_r}.$$

Тогда при поточечно конформном преобразовании метрики $g = e^{2\sigma'} \bar{g}$ для функции $\sigma' = -\sigma$ форма $\tilde{\omega} = e^{(r+1)\sigma'} \bar{\omega}$ будет согласно лемме 1 конформно киллинговой. Теорема 2 доказана.

В заключение заметим, что проведенные доказательства леммы 1 и теоремы 2 без ограничения общности могут быть перенесены на псевдоримановы многообразия, а потому будет справедливым наше замечание о возможности использования полученного результата в теоретической физике.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, I, Мир, М., 1990.
- [2] С. Е. Степанов, “Теоремы исчезновения в аффинной, римановой и лоренцевой геометриях”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:1 (2005), 35–84.
- [3] С. Е. Степанов, “О тензоре Киллинга–Яно”, *ТМФ*, **134**:3 (2003), 382–387.
- [4] Р. Нарасимхан, *Анализ на действительных и комплексных многообразиях*, Мир, М., 1971.
- [5] S. E. Stepanov, “On conformal Killing 2-form of the electromagnetic field”, *J. Geom. Phys.*, **33**:3–4 (2000), 191–209.
- [6] С. Е. Степанов, “Новый сильный лапласиан на дифференциальных формах”, *Матем. заметки*, **76**:3 (2004), 452–458.
- [7] T. Branson, “Stein–Weiss operators and ellipticity”, *J. Funct. Anal.*, **151**:2 (1997), 334–383.
- [8] Р. Пале, *Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе*, Мир, М., 1970.
- [9] M. Kora, “On conformal Killing forms and the proper space of Δ for p -forms”, *Math. J. Okayama Univ.*, **22** (1980), 195–204.
- [10] T. Kashiwada, “On conformal Killing tensor”, *Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, **19** (1968), 67–74.

С. Е. Степанов

Владимирский государственный педагогический университет

E-mail: stepanov@vtsnet.ru

Поступило

26.09.2005

Исправленный вариант

03.05.2006