Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Челноков, В. Л. Зефирова, Матричный показатель степени принадлежности узла сети сердцевине сети, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 6, 908–919

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3366>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 14:17:00

УДК 519.17

МАТРИЧНЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ СТЕПЕНИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ УЗЛА СЕТИ СЕРДЦЕВИНЕ СЕТИ

В. М. Челноков, В. Л. Зефирова

В центре внимания статьи находятся координаты собственных векторов матрицы связей сети, правого и левого, соответствующих максимальному собственному значению матрицы. Показывается, что каждая координата измеряет маршрутную центральность положения соответствующего узла в связочной структуре сети и статус его узлов-соседей, в силу чего она выражает степень принадлежности узла к сердцевине этой структуры – его структурную сердцевинность. И соотносение координат векторов с положением узлов, и само вычисление координат опирается на итерационный степенной метод. В статье показывается обоснованность его применения для сетей различной структуры. Рассматриваются возможные приложения и числовой пример с реальной сетью большого размера (197 узлов, 780 связей).

Библиография: 17 названий.

Введение

В статье показывается, что правый и левый собственные векторы сетевой матрицы, которые соответствуют ее максимальному собственному значению, измеряют степень принадлежности узлов сети к сердцевине сети, т.е. служат, в наших терминах, измерителями *структурной сердцевинности* узлов. Эта сердцевинность, представленная координатами векторов, является функцией на множестве узлов сети. Узлы упорядочиваются по убыванию значений этой функции; тем самым, как мы показываем, они выстраиваются в порядке ослабления структурных параметров, указывающих на принадлежность узла сети к сердцевине сети. Некоторая группа узлов из верхней части рейтинга принимается в качестве сердцевины сети; кроме того, любые два узла сети можно сравнить по этой шкале друг с другом, и это не менее важно, чем выявление сердцевины.

В каждой ориентированной сети присутствует сердцевинность двух типов: i -я координата правого вектора показывает out-сердцевинность положения узла i в связочной структуре сети, а i -я координата левого вектора дает in-сердцевинность его положения в этой структуре. Первая величина отражает суммарный вес маршрутов, начинающихся в данном узле, вторая – вес маршрутов, заканчивающихся в нем. Взаимосвязь маршрутов и собственных векторов объясняется тем, что, с одной стороны, (i, j) -элемент k -й степени сетевой матрицы равен весу (числу) маршрутов

сети от узла i к узлу j длиной k связей, а, с другой, эти степени матрицы фигурируют в итерациях при нахождении собственных векторов так называемым степенным методом. В неориентированной сети оба типа сердцевинности сливаются в один.

Рейтинги узлов сети по out / in-сердцевинности под разными названиями применяются в социальных сетях, сетях цитирования, гипертекстовых и других сетях. Рейтинг по in-сердцевинности, в случае стохастической сетевой матрицы, совпадает с финальным распределением цепи Маркова – случайного блуждания по сети. Мы приводим примеры использования показателя в моделях понимания текста и в опытах по формированию неклассических категорий.

Мы даем обоснование вычислительной схемы, приводящей к векторам сердцевинности. Работы по матричному анализу, на которые мы опираемся, не содержат нужных нам сетевых интерпретаций. С другой стороны, в тех разрозненных публикациях, где описываются применения показателей, вычисляемых так же, как наши, обычно отсутствуют, во-первых, основные сведения касательно математической стороны дела и, во-вторых, упоминания об общесетевом характере понятия сердцевинности. Своей статьей мы хотим помочь устранить этот разрыв.

Теоретические представления у нас реализованы в виде компьютерных программ. В статье приводится два числовых примера, один из которых использует реальную сеть большого размера (197 узлов, 780 связей).

1. Основные обозначения

Рассмотрим сеть на узлах $1, 2, \dots, n$ со взвешенными и направленными, в общем случае, связями. Сеть представляется матрицей связей A размера $n \times n$, в которой элемент $A(i, j) > 0$ равен весу связи (i, j) , если таковая присутствует, и равен нулю, если она отсутствует. Когда веса всех связей одинаковы, имеем стандартную матрицу смежности сети (графа), состоящую из нулей и единиц. Таким образом, A – вещественная, неотрицательная, квадратная и, в общем случае, несимметричная матрица.

Как хорошо известно, для всякой вещественной матрицы A наборы собственных значений (спектры) A и транспонированной A' одинаковы, и, если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – собственные векторы-столбцы матриц A и A' при одном и том же собственном значении λ , т.е. $A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x}$ и $A' \cdot \bar{y} = \lambda \cdot \bar{y}$, то $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называют соответственно *правым* и *левым* собственными векторами матрицы A , отвечающими собственному значению λ , имея в виду, что $\bar{y}' \cdot A = \lambda \cdot \bar{y}'$, где $\bar{y}'$ – вектор-строка [1], [2]. Собственные значения матриц A и A' нумеруются в порядке невозрастания модуля: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ (каждое число λ присутствует в этом перечне столько раз, какова алгебраическая кратность λ); собственные векторы этих матриц, отвечающие λ_s , обозначаются $\bar{x}_s$ и $\bar{y}_s$, $s = 1, 2, 3, \dots, n$; число $r(A) = |\lambda_1|$ называют *спектральным радиусом* A (и A').

Ввиду частого употребления терминов “собственный вектор” и “собственное значение”, мы будем использовать сокращения с.в. и с.з.

2. Степенной метод

Для произвольной вещественной матрицы число λ_1 и векторы $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ могут быть найдены при помощи *степенного метода*, одного из наиболее известных в матричных вычислениях [1]–[4]. В нашем, “сетевом” случае данный метод не только служит

указанной цели, но также позволяет увидеть связь координат $x_1(i), y_1(i)$ с положением (сердцевинностью) узла i в связочной структуре сети.

Предположим, что максимальное по модулю с.з. матрицы A имеет алгебраическую кратность 1 и единственно, т.е. $|\lambda_1| > |\lambda_2|$; предположим также, что оно вещественно. Пусть $\bar{z}_0$ – вектор размерности n , не ортогональный $\bar{x}_1$, и $\nu_k = \|A^k \bar{z}_0\|$, где $\|\cdot\|$ – некоторая векторная норма, например, евклидова длина. Метод базируется на том, что при данных предположениях вектор $\bar{z}_k$ в итерациях

$$\bar{z}_k = \nu_k^{-1} A^k \bar{z}_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

стремится к вектору $\|\bar{x}_1\|^{-1} \bar{x}_1$ при $k \rightarrow \infty$, а отношение $\nu_k / \nu_{k-1} \rightarrow \lambda_1$. В более удобной для вычислений записи,

$$\bar{z}_{k+1} = \alpha_k^{-1} A \bar{z}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $\alpha_k = \|A \bar{z}_k\| \rightarrow \lambda_1$, $\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{k-1} = \nu_k$.

На практике, можно задать малое число ε , $0 < \varepsilon < 1$, и, вычисляя на каждом шаге

$$e = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{z_k(i)}{z_{k-1}(i)},$$

продолжать итерации, пока $|e| > \varepsilon$. Итераций потребуется тем меньше, чем больше $|\lambda_1|/|\lambda_2|$ (см. [2]).

Аналогичные вычисления с матрицей A' дают вектор $\bar{y}_1$.

Сходимость метода обеспечивают сделанные предположения касательно λ_1 . Их обоснованность будет рассмотрена ниже. Заранее скажем, что в нашем случае всегда $\lambda_1 > 0$, т.е. спектральный радиус $r = \lambda_1$, и все координаты векторов $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ положительны ($\bar{x}_1 > 0, \bar{y}_1 > 0$). Отсюда, в частности, следует, что в качестве $\bar{z}_0$ можно взять любой неотрицательный ненулевой вектор.

Заметим, что подобные вычисления с матрицей, редуцированной определенным образом, позволяют находить остальные с.в. и с.з. (метод исчерпывания или дефляции [3]).

3. Показатель сердцевинности

Если два узла сети занимают одинаковое структурное положение, т.е. симметричны друг другу, то в векторе $\bar{x}_1$, как и в векторе $\bar{y}_1$ (а также в любом другом с.в. сетевой матрицы) координаты, отвечающие этим узлам, одинаковы. Если же какие-то две координаты, скажем вектора $\bar{x}_1$, различны, то соответствующие два узла имеют разное положение в структуре сети. Формулы (1) и (2) позволяют видеть две структурные особенности узла, которые проявляются тем сильнее, чем больше его координата в $\bar{x}_1$ или $\bar{y}_1$. Исходя из них, координату можно трактовать как степень принадлежности узла к сердцевине сети – как *сердцевинность* узла.

3.1. Сердцевинность как центральность. Обозначим (i, q) -элемент матрицы A^k через $A^k(i, q)$, $k = 1, 2, \dots$. Этот элемент есть, как известно, суммарный вес различных маршрутов длиной k связей, каждый из которых начинается в узле i , а заканчивается в узле q , $i, q = 1, 2, \dots, n$; когда вес каждой связи в сети равен 1, это просто количество (i, q) -маршрутов. Данный факт хорошо известен в теории

графов; он вытекает непосредственно из определения матричного умножения. Напомним, что *маршрут* из i в q – это последовательность связей сети такая, что началом первой связи является узел i , началом каждой следующей связи служит узел-конец предыдущей связи, а концом последней связи является узел q ; при этом любой узел и любую связь маршрут может проходить любое число раз. *Вес маршрута* длиной k связей определяется как произведение весов этих k связей.

Обозначим, далее,

$$S_{\text{out}}^{(k)}(i) = \sum_{q=1}^n A^{(k)}(i, q), \quad S_{\text{in}}^{(k)}(i) = \sum_{q=1}^n A^{(k)}(q, i)$$

– вес (количество) маршрутов длины k , имеющих узел i начальным и конечным пунктом соответственно; в частности, $S_{\text{out}}^{(1)}(i) = d_{\text{out}}(i)$, $S_{\text{in}}^{(1)}(i) = d_{\text{in}}(i)$ – *степень исхода* и *степень захода* узла i .

ТЕОРЕМА 1. Пусть сетевая матрица A имеет с.з. $\lambda_1 = r > |\lambda_2|$ и с.в. $\bar{x}_1 > 0$, $\bar{y}_1 > 0$. Тогда для всякой пары i, j узлов сети, при любом достаточно большом k справедливо:

- (а) если $x_1(i) > x_1(j)$, то $S_{\text{out}}^{(k)}(i) > S_{\text{out}}^{(k)}(j)$;
- (б) если $y_1(i) > y_1(j)$, то $S_{\text{in}}^{(k)}(i) > S_{\text{in}}^{(k)}(j)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим итерации по формуле (1) с вектором $\bar{z}_0$, состоящим из одних единиц. Имеем

$$\nu_k z_k(i) = S_{\text{out}}^{(k)}(i), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} z_k(i) = \frac{x_1(i)}{\|\bar{x}_1\|}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{\text{out}}^{(k)}(i)}{S_{\text{out}}^{(k)}(j)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k(i)}{z_k(j)} = \frac{x_1(i)}{x_1(j)},$$

откуда следует справедливость (а). При итерациях же с матрицей A' имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{\text{in}}^{(k)}(i)}{S_{\text{in}}^{(k)}(j)} = \frac{y_1(i)}{y_1(j)},$$

откуда следует справедливость (б). Теорема доказана.

Таким образом, чем больше координата $x_1(i)$, тем выше ранг узла i как исходного пункта маршрутов сети, и чем больше $y_1(i)$, тем выше его ранг в качестве конечного пункта маршрутов. Величины $d_{\text{out}}(i), d_{\text{in}}(i)$ устанавливают эти ранги в начальном приближении.

Следовательно, первая из упомянутых особенностей состоит в том, что x_1 - и y_1 -координата узла выступают как измерители центральности, важности, нагруженности данного узла. Это те качества, с которыми ассоциируется обычно сердцевина всякой структуры, материальной или мысленной.

3.2. Сердцевина как плотная зона. Предположим, что доля узлов сети, у которых координата x_1 больше заданной величины, быстро убывает с ростом последней, например, как степенная функция (похоже, что это типично для реальных

сетей большого размера). Тогда в силу определяющего соотношения

$$\lambda_1 x_1(i) = \sum_{q=1}^n A(i, q) x_1(q), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

узлы i с высоким рангом по x_1 смежны с узлами q , также имеющими высокий x_1 -ранг ($A(i, q) > 0$); в меру возможностей сети, они образуют плотную зону – подграф, близкий к полному. Аналогичная ситуация – с узлами высокого ранга по y_1 .

Следовательно, группа узлов высокого ранга по x_1 или y_1 выделяется в сети насколько возможно повышенной плотностью, а это характерная черта сердцевин в структурах самой разной природы.

В силу этой и предыдущей особенностей величины $x_1(i)$, мы называем ее *out-сердцевинностью* узла i , обозначая $x_1(i) = c_{\text{out}}(i)$. Величина $y_1(i) = c_{\text{in}}(i)$ называется *in-сердцевинностью*. В случае неориентированной сети матрица симметрична ($A' = A$), правый и левый с.в. совпадают и сердцевинность обозначается просто $c(i)$.

Заметим, что известные показатели центральности такие, как обычная степень узла и среднее или максимальное расстояние узла от остальных узлов сети, отличаются от показателя сердцевинности своим “безразличием” к второй особенности: узлам с большой степенью или малым расстоянием не присуща тенденция к взаимной смежности.

3.3. Некоторые применения. Показатель сердцевинности часто фигурировал под другими названиями. Его исторически первое применение относится, видимо, к сетям типа социогамм и турниров (“задача о лидере”) [5], [6]. Величина $c_{\text{out}}(i)$ называется там “действительной силой” узла (игрока) i . Показатель c под именем сердцевинности (*coreness*) известен в социальных сетях [7].

Интересен в прикладном отношении случай *стохастической* сетевой матрицы, когда

$$\sum_{j=1}^n A(i, j) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Матрица задает здесь конечную *цепь Маркова* с переходными вероятностями $A(i, j)$; например, случайное блуждание частицы, которая в каждый дискретный момент k находится в одном из узлов сети, а “между” моментами k и $k+1$ мгновенно переходит по связи в какой-то соседний узел ($k = 0, 1, 2, \dots$). Рассмотрим итерации (2) с матрицей A' и неотрицательным $\bar{z}_0$ таким, что

$$\sum_{i=1}^n z_0(i) = 1$$

(начальное распределение). При норме α , равной сумме координат вектора, с учетом стохастичности A и данного свойства $\bar{z}_0$ имеем $\alpha_k = 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому, согласно (2)

$$z_{k+1}(i) = \sum_{j=1}^n A'(i, j) z_k(j) = \sum_{j=1}^n z_k(j) A(j, i),$$

т.е. $z_{k+1}(i)$ равно полной (безусловной) вероятности того, что частица находится в момент $k+1$ в узле i . При условиях сходимости (1) и (2)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{z}_k = \bar{c}_{\text{in}} > 0,$$

т.е. вектор $\bar{c}_{in}$ дает *финальное распределение* цепи Маркова, причем не зависящее от $\bar{z}_0$. Таким образом, узлы in-сердцевины – самое вероятное местонахождение блуждающей частицы в установившемся режиме (величина c_{out} здесь у всех узлов одинакова).

Эта модель случайного блуждания показывает себя эффективной применительно к поведению пользователя, путешествующего по связям-ссылкам гипертекстовой сети. Она заложена в популярной поисковой системе **Google**, в ее методе получения рейтинга страниц Всемирной Паутины [8], [9]. Узлы (веб-страницы) с высокой c_{in} – это “авторитеты”, в которые сеть чаще всего приводит путешественников [8].

Рейтинг узлов по c применяют в когнитивной психологии. Согласно модели понимания читаемый текст представляется в памяти человека как сеть из простых предложений (смысловых единиц текста) и ненаправленных смысловых связей между ними. Узлы этой сети с высокими c являются *макроединицами* данного текста, т.е. несут в нем наибольшую смысловую нагрузку, дают его конспект-реферат. Это подтверждают эксперименты, согласно которым быстрота припоминания текстовых единиц растет с ростом их c [10].

Другой пример – из когнитивной лингвистики. Изучаемые там *неклассические категории* (объединения сходных предметов) отличаются от классических сердцевино-периферийной структурой – градацией своих элементов по степени принадлежности, представительности, “прототипичности”. Применяют следующее “взвешивание” членов категории. Каждому предмету ставят в соответствие некоторую часть атрибутов из общего списка, образуя 2-дольный граф “предметы-атрибуты”. Каждый атрибут получает вес, равный числу предметов, которым он приписан. Затем предмет получает вес, равный сумме весов приписанных ему атрибутов [11]. Видно, что данная процедура представляет собой два первых цикла итераций вычисления сердцевинности. Усовершенствование состояло бы в замене данных весов значениями c .

4. Обоснование вычислительной схемы

Истолкование векторов $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ как показателей сердцевинности опирается на предположения о сходимости итераций (1) и (2), т.е. на указанные свойства числа λ_1 , на предполагаемую положительность векторов $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ и на особенности последовательных приближений этих векторов, связанные с видом формул (1) и (2). Обоснованность этих предположений вытекает из классических результатов Перрона и Фробениуса для неотрицательных матриц [1], [6], [12].

4.1. Теорема Перрона–Фробениуса. Как установил Перрон, если вещественная матрица A положительна, т.е. все ее элементы больше нуля, то

- (а) ее спектральный радиус $r > 0$;
 - (б) r является с.з. A , т.е. $r = \lambda_1$;
 - (в) этому с.з. отвечает положительный с.в.;
 - (г) с.з. r имеет алгебраическую кратность 1; отсюда, с.в. единственен с точностью до скалярного множителя;
 - (д) $|\lambda| < r$ для всякого с.з. λ такого, что $\lambda \neq r$.
- Вместе (а), (б), (г) и (д) означают, что $r = \lambda_1 > |\lambda_2|$.

Данная теорема обобщается на случай неотрицательных *неразложимых* матриц – таких, чья сеть сильно связна (или просто связна, в случае ненаправленных связей). Для такой матрицы, как доказал Фробениус, справедливы пункты (а)–(г) теоремы Перрона, однако выполнение (д) не гарантируется [1; теорема 8.4.4].

Заметим, что если матрица A неразложима, то и транспонированная A' неразложима, поскольку сеть A' отличается от сети A лишь противоположным направлением связей.

С.з. r неразложимой матрицы A называют *перроновым корнем* [1] или *доминирующим* с.з. [2] матрицы A (и A').

Сетевая матрица у нас всего лишь неотрицательна, и нам весьма важно сохранение пункта (д): если существует с.з. $\lambda \neq r$ такое, что $|\lambda| = r$, то сходимость итераций (1) и (2) отсутствует.

Неотрицательные неразложимые матрицы, обладающие только одним с.з., равным по модулю r , были выделены Фробениусом под именем *примитивных* матриц [1], [12].

4.2. Случай неориентированной связной сети. В этом случае сетевая матрица симметрична и неразложима. Всякая сеть является либо однодольной, либо двудольной; в последней, по определению, все множество узлов разбивается на два класса таких, что начало каждой связи лежит в каком-то одном классе, а конец – в другом (“многодольность” сети оставляет ее 2-дольной). 2-дольные сети часто используются в приложениях для представления данных.

ТЕОРЕМА 2. *Матрица неориентированной связной сети не примитивна тогда и только тогда, когда сеть 2-дольна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, сетевая матрица A примитивна тогда и только тогда, когда $A^k > 0$ при всяком, достаточно большом k [1; теорема 8.5.2]. Предположим, что сеть 2-дольна. Пусть $1, 2, \dots, np$ – узлы первой доли (“ p -узлы”), а $np + 1, np + 2, \dots, np + nt = n$ – узлы второй доли (“ t -узлы”). Тогда структура матрицы A такова, что матрица A^{2k+1} , $k = 0, 1, 2, \dots$, имеет ненулевые элементы лишь в угловых подматрицах справа сверху и слева внизу, размера $np \times nt$ и $nt \times np$ соответственно, в то время как A^{2k} , $k = 1, 2, \dots$, имеет их лишь в угловых квадратных подматрицах слева сверху и справа внизу порядка соответственно np и nt . Следовательно, все степени A содержат нулевые подматрицы, поэтому A не примитивна.

Предположим, что A не примитивна. Пусть M обозначает матрицу смежности *графа сети*, который отличается от заданной сети лишь тем, что в нем вес каждой связи равен 1. Очевидно, маршруты в сети и графе одни и те же, поэтому при любом данном k неравенство $A^k > 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $M^k > 0$, т.е. либо матрицы A и M обе примитивны, либо они обе не примитивны. Значит, M не примитивна, т.е., имея с.з. $r(M)$, она имеет еще с.з., не равное $r(M)$, но равное ему по модулю. Таким с.з. может быть только $-r(M)$, так как M симметрична и потому все ее с.з. вещественны. Наличие же такой пары с.з. у связного графа равносильно его 2-дольности [6; теорема 3.4]. Очевидно, “дольность” графа сети и самой сети одинакова. Поэтому сеть 2-дольна.

Теорема доказана.

Заметим, что несимметричная неразложимая матрица не обязательно примитивна, даже когда ее сеть не 2-дольна. Например, у матрицы смежности ориентированного цикла на трех узлах все три с.з. имеют модуль, равный 1 (два из них – комплексные сопряженные числа).

Отметим еще, что в матрицах A^{2k} , $k = 1, 2, \dots$, угловые квадратные подматрицы равны P^k и T^k , где P и T – примитивные матрицы. Действительно, P задает сеть на p -узлах, которая связна ввиду связности всей 2-дольной сети и однодольна, так как с.з. ее графа неотрицательны (это квадраты с.з. графа всей 2-дольной сети), из чего следует примитивность P . Та же ситуация в случае матрицы T с ее t -сетью. С.з. P и T равны квадратам с.з. A ; координаты их с.в. образуют 2-дольное разбиение координат с.в. A .

4.3. Добавление петель. В практических вычислениях полезно использовать тот факт, что любая неотрицательная, неразложимая матрица, в которой все элементы на главной диагонали положительны, является примитивной [1; лемма 8.5.5]. Поэтому, когда сеть сильно связна (просто связна, при ненаправленных связях), вычисления (2) лучше проводить, например, с матрицей $A + I$, где I – квадратная матрица порядка n , в которой $I(i, i) = 1$ для $i = 1, 2, \dots, n$, $I(i, j) = 0$, когда $i \neq j$. При этом каждое с.з. возрастает на 1, а все с.в. остаются прежними. Формула (2) тогда приобретает вид

$$z_{k+1}(i) = \alpha_k^{-1} \left[z_k(i) + \sum_{q=1}^n A(i, q) z_k(q) \right], \quad \alpha_k = \|\bar{z}_k + A\bar{z}_k\| \rightarrow r + 1. \quad (3)$$

Переход от A к $A + I$ означает снабжение каждого узла сети петель (связью с самим собой); в результате, сеть утрачивает 2-дольность, если таковая была.

5. Два числовых примера

ПРИМЕР 1. Мы провели вычисления на компьютере для сети взаимных гипертекстовых ссылок словаря терминов линейной алгебры (*Linear Algebra Glossary*, [Google's Directory](http://www.google.com), www.google.com). Полное количество узлов-терминов равнялось 201. Для большей простоты мы сделали связи-ссылки ненаправленными. Вес каждой связи был равен 1. Компьютер выделил из полученного графа максимальную связную компоненту – неориентированный граф, который мы и рассматриваем ниже. Его основные данные: число узлов $n = 197$, число связей $m = 780$, средняя степень $2m/n = 7.9$, максимальная степень 54, минимальная 1, максимальное расстояние между двумя узлами (диаметр) 6, среднее расстояние по всем парам узлов 2.9.

Вычисление $\bar{c}$ и $r = \lambda_1$ проводилось по формуле (3). При $\varepsilon = 10^{-5}$ (см. раздел 2) потребовалось 16 итераций. Было найдено $r = 14.3196$ ($\lambda_2 = 8.43$). Полученные 197 значений сердцевинности, в ранжировке по убыванию, приводятся в табл. 1.

Обращает на себя внимание дискриминирующая способность показателя сердцевинности: среди этих 197 значений с нет одинаковых, тогда как степень узла имеет здесь лишь 26 различных значений¹.

¹ Полные данные можно получить у авторов.

Таблица 1

№ п/п	i	$c(i)/c_{\max}$	$d(i)$	Термин
1	46	1	54	собственные значения
2	185	0.76	40	симметричная матрица
3	84	0.64	31	обратная матрица
4	47	0.56	26	собственные векторы
5	146	0.55	28	положительно определенная матрица
6	134	0.54	24	ортогональная матрица
7	190	0.52	20	транспонированная матрица
8	168	0.49	22	вырожденная матрица
...	...	...	...	
197	3	0.003	1	присоединенная (adjoint) матрица

$(d(i) - \text{степень узла } i)$

Принимая в качестве сердцевины узлы, имеющие величину c не ниже 50% от максимальной, получаем сердцевинный подграф, изображенный на рис. 1.

Рис. 1. Сердцевина графа, имеющего 197 узлов и 780 связей, – связный, плотный подграф на 7 узлах (14 связей из максимально возможного числа 21)

На рис. 2 и рис. 3 в логарифмических координатах показаны функции распределения сердцевинности и степени в данном графе (197 узлов). Кривые оказались похожими друг на друга. У каждой имеется линейно-образный “хвост”, в более половины ее длины, т.е. участок, на котором $J(x) \sim x^{-a}$, где $a = \text{const} > 1$ (степенная функция распределения). В целом эти кривые довольно хорошо описываются функцией вида $J(x) \sim (b + x)^{-a}$, $b = \text{const} > 0$. Каждая кривая отражает наличие малой группы узлов, резко выделяющейся на фоне остальных. Например, в то время как более половины узлов (99/197) имеют сердцевинность лишь 11% или меньше от максимальной, сердцевинностью выше 50% от максимальной обладает группа, содержащая только 3.5% (7/197) узлов. Аналогично, степень выше 44% (24/54) от максимальной имеют лишь 3.5% узлов, тогда как у 53% (105/197) из них она меньше 11% (6/54) от максимальной.

ПРИМЕР 2. В предыдущем примере сердцевинный подграф обладал повышенной плотностью связей (близостью к полному графу), по сравнению с другими частями

Рис. 2. $J(x)$ – число узлов, имеющих сердцевинность с та-
кую, что $c/c_{\max} \geq x$

Рис. 3. $J(x)$ – чис-
ло узлов, имеющих сте-
пень $d \geq x$

сети. Подобное случается часто, но не всегда. Сеть может не иметь такой выделенной плотной зоны, обладая при этом вектором $\bar{c}$, ясно выделяющим узлы сердцевины. Последние тогда превосходят остальные узлы по маршрутной центральности (см. п. 3.1). Заметим также, что сердцевинный подграф “стремится” во всяком случае к связности (см. п. 3.2).

В качестве иллюстрации рассмотрим прямоугольную решетку 10×7 – неориентированный граф, имеющий $n = 70$ узлов и $m = 123$ связи. О какой-либо зоне, плотной по связям, здесь, очевидно, говорить не приходится. Что же касается показателя сердцевинности c , то он принимает здесь 20 различных значений; одинаковые значения c имеют симметричные узлы. На рис. 4 узлы решетки помечены рангами от 1 до 20 в порядке убывания сердцевинности. Рядом приведен график функции распределения c .

Заключение

Величина показателя сердцевинности в узле сети характеризует положение узла в связочной структуре сети. Узлы с высокими значениями показателя – узлы сердцевины – соседствуют друг с другом и занимают центральное место в структуре. Соседство, “тесное расположение” узлов сердцевины превращает последнюю в плотное, насколько позволяет сеть, ядро – подграф, близкий к полному. Разреженная часть сети отмечена низкими значениями показателя, т.е. отнесена им к периферии. Центральность же узлов сердцевины означает, что они имеют высокий ранг по весу маршрутов, начинающихся в любом из этих узлов или кончающихся в нем.

Для движения с траекториями в виде маршрутов характерен дух исследования всех ассоциативных возможностей, а не стремление попасть оптимальным образом

Рис. 4. Прямоугольная решетка с пометками узлов рангами по сердцевинности. $J(x)$ – число узлов сердцевинности s такой, что $c/c_{\max} \geq x$

из пункта А в пункт Б. Наглядным примером здесь является перемещение пользователя по связям-ссылкам гипертекстовой сети, включая Всемирную Паутину, когда тема поиска существует лишь в общих чертах. Поисковая система Google использует рейтинг узлов Паутины (веб-страниц), даваемый финальными вероятностями случайного блуждания по сети. При стохастической сетевой матрице финальное распределение совпадает с вектором in-сердцевинностей узлов сети.

В сети, состоящей из информационных узлов и локальных смысловых связей, сердцевинность узла коррелирует с его принадлежностью к макроединицам смыслового содержания сети. Рейтинг узлов сети по “макровости” в сочетании с обходом узлов методом поиска в глубину позволяет получать связанные тематические конспекты содержания сети [13], [14], что может быть использовано в автоматизированной системе реферирования.

Маршруты – это не только цепочки мысленных ассоциаций. К примеру, в социальных сетях по траекториям типа маршрутов распространяются новости, слухи, а также микробы заразных болезней [15]. Создаются мощные системы компьютерной имитации эпидемий в миллионных популяциях [16], [17]. Особое внимание в сетях-моделях уделяется “хабам” – узлам с резко повышенным числом связей (hubs). Было бы интересно рассмотреть вместо них узлы сердцевины: при степенном распределении числа связей узла в сети сердцевина, скорее всего, совпадает с “хабами”, но в других случаях последние могут и отсутствовать, в то время как сердцевина обычно хорошо различима (простой пример – сеть-решетка).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989.
[2] Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун, *Матричные вычисления*, Мир, М., 1999.

- [3] Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *Вычислительные методы линейной алгебры*, Физматгиз, М., 1963.
- [4] И. М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре*, Наука, М., 1966.
- [5] К. Берж, *Теория графов и ее применения*, ИЛ, М., 1962.
- [6] Д. Цветкович, М. Дуб, Х. Захс, *Спектры графов*, Наукова думка, Киев, 1984.
- [7] S. P. Borgatti, M. G. Everett, "Models of core/periphery structures", *Social Networks*, **21**:4 (2000), 375–395.
- [8] J. M. Kleinberg, "Authoritative sources in a hyperlinked environment", *J. ACM*, **46**:5 (1999), 604–632.
- [9] S. Brin, L. Page, "The anatomy of a large-scale hypertextual web-search engine", *Proceedings of the 7th WWW Conference*, Brisbane, Australia, 1998, 107–117.
- [10] W. Kintsch, D. M. Welsch, "The construction-integration model: A framework for studying memory for text", *Relating Theory and Data: Essays on Human Memory*, eds. W. Hockley, S. Lewandowsky, Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1991, 367–386.
- [11] G. Storms, P. De Boeck, W. Ruts, "Prototype and exemplar-based information in natural language categories", *J. Memory Language*, **42**:1 (2000), 51–73.
- [12] В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов, *Матрицы и вычисления*, Наука, М., 1984.
- [13] V. M. Chelnokov, V. L. Zephyrova, "Hypertext macrodynamics", *Lecture Notes in Computer Sci.*, **1015**, Springer-Verlag, Berlin, 1995, 105–120.
- [14] V. M. Chelnokov, V. L. Zephyrova, "Collective phenomena in hypertext networks", *Proceedings of the Hypertext'97 Conference (Southampton, UK)*, ACM, 1997, 220–221.
- [15] S. P. Borgatti, "Centrality and AIDS", *Connections*, **18**:1 (1995), 112–115.
- [16] S. Eubank et al., "Modelling disease outbreaks in realistic urban social networks", *Nature*, **429**:6988 (2004), 180–184.
- [17] C. L. Barrett, S. G. Eubank, J. P. Smith, "If smallpox strikes Portland...", *Scientific American*, **292**:3 (2005), 42–49.

В. М. Челноков

Межотраслевой научно-исследовательский институт
 "Интеграл" Федерального агентства по информационным
 технологиям Мининформсвязи РФ

Поступило

14.09.2005

Исправленный вариант

10.02.2006

В. Л. Зефирова

Межотраслевой научно-исследовательский институт
 "Интеграл" Федерального агентства по информационным
 технологиям Мининформсвязи РФ
 E-mail: victoria@smisc.net.ru