Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Черепнев, Некоторые свойства больших простых делителей чисел вида $p - 1$, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 6, 920–925

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3367>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:14:49

УДК 511

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА

БОЛЬШИХ ПРОСТЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ ЧИСЕЛ ВИДА $p - 1$

М. А. Черепнёв

Основной результат статьи устанавливает, что доля простых чисел $p \leq x$ с условием, что $p - 1$ имеет простой делитель $q > \exp(\ln x / \ln \ln x)$ и количество простых делителей $q - 1$ существенно отличается от $\ln \ln(x/n)$, где $n = (p - 1)/q$, стремится к нулю с ростом x .

Библиография: 6 названий.

Для оценки стойкости многих криптографических протоколов требуется сравнить стойкости задач дискретного логарифмирования и Диффи–Хеллмана [1]. В работе [2] эта задача сведена к оценке следующей теоретико-числовой функции. Пусть

$$m = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}.$$

Рассмотрим разложение на простые множители чисел $p_i - 1$, $i = 1, \dots, r$. Из каждого из этих простых вычтем единицу и снова разложим на простые, и т.д. Получившееся разветвление назовем *деревом числа m* , а встречающиеся в нем простые числа – его *узлами*. Обозначим $s = s(m)$ длину наибольшей ветви дерева числа m .

Для оценки $s(m)$ для почти всех m можно использовать результаты о количестве различных простых делителей чисел вида $p - 1$. Оценка снизу для этого количества дает оценку сверху для самих простых делителей, которую в дальнейшем можно использовать для оценки $s(m)$.

В своих работах Харди и Рамануджан [3], Туран [4] показали, что для всех за исключением $o(x)$ натуральных значений n , $n \leq x$, выполняются неравенства

$$(1 - \varepsilon) \ln \ln n < v(n) < (1 + \varepsilon) \ln \ln n,$$

где $v(n)$ – количество различных простых делителей числа n . Аналогичный результат для чисел вида $p - 1$, где p – простое число, получил Эрдёш [5]. В данной заметке похожий результат получен для количества простых делителей чисел $q - 1$, где q – большой простой делитель числа $p - 1$.

Заметим, что ввиду очевидной оценки $s(n) \leq \log_2 n$ маленькие простые делители не оказывают влияния на величину $s(m)$.

Итак, пусть $N(M)$ – количество элементов в множестве M .

ТЕОРЕМА 1. Для любого $\varepsilon > 0$

$$N\left(p \leq x \mid \begin{array}{l} \text{для всех простых } q > e^{(\ln x)/(\ln \ln x)} : \frac{p-1}{q} = n \in \mathbb{N}, \\ \text{выполнено } v(q-1) \in \left[(1-\varepsilon) \ln \ln \frac{x}{n}, (1+\varepsilon) \ln \ln \frac{x}{n}\right] \end{array}\right) = (1+o(1)) \frac{x}{\ln x}.$$

Докажем сначала следующую лемму.

ЛЕММА 1. Найдутся абсолютные положительные константы C_1, C_2 такие, что для любых $k, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} N\left(p \leq x \mid \frac{p-1}{n} = q - \text{простое}, v(q-1) = k\right) \\ < C_1 \frac{x(n+1)(\ln \ln(x/n) + C_2)^{k+2}}{(k-1)! \varphi(n(n+1)) \ln^3(x/n)} + o\left(\frac{x}{n(\ln(x/n))^{(1/2) \ln \ln \ln(x/n)}}\right), \end{aligned}$$

при $x/n \rightarrow \infty$, причем $o(\cdot)$ не зависит от k и от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\frac{p-1}{n} = q \leq \frac{x-1}{n} = f(x).$$

Рассмотрим множество M_1 чисел $p \leq x$, для которых $(p-1)/n$ – простое и любой простой делитель числа $(p-1)/n-1$ меньше $y(f(x))$, где $y(z) = e^{(\ln z)/(\ln \ln z)}$. Обозначим через $N(x, y)$ число натуральных чисел, не превосходящих x , все простые делители которых не превосходят y . Для оценки этой величины применим известную лемму Ранкина [6; гл. 5, § 5, лемма 5.2]. Получим

$$\begin{aligned} N(M_1) &< N\left(q - \text{простое} \mid q \leq f(x), \begin{cases} r \mid q-1 \\ r - \text{простое} \end{cases} \implies r \leq y(f(x))\right) \\ &\leq N\left(m - \text{натуральное} \mid m \leq f(x), \begin{cases} r \mid m \\ r - \text{простое} \end{cases} \implies r \leq y(f(x))\right) \\ &\leq N(f(x), y(f(x))) \\ &< f(x) \exp\left(-\frac{\ln_2((\ln f(x))/(\ln_2 f(x))) \ln_2 f(x)}{\ln f(x)} \ln f(x) + \ln \frac{\ln f(x)}{\ln_2 f(x)} (1+o(1))\right) \\ &= o\left(f(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \ln_3 f(x) \ln_2 f(x)\right)\right) = o\left(\frac{x}{n} \exp\left(-\frac{1}{2} \ln_3 \frac{x}{n} \ln_2 \frac{x}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Здесь и далее используется обозначение

$$\ln_k(x) = \underbrace{\ln \ln \cdots \ln}_k(x).$$

Полученная оценка показывает, что мощность множества M_1 не больше остаточного члена в формулировке леммы.

Рассмотрим множество M_2 чисел $p \leq x$, для которых $(p-1)/n$ – простое и наибольший простой делитель числа $(p-1)/n-1$ входит в разложение этого числа в

степени не меньше 2. Тогда для $p \in M_2 \setminus M_1$ число $(p-1)/n-1$ делится на квадрат числа, не меньшего, чем $y(f(x))$. Поэтому

$$\#M_2 \setminus M_1 \leq \sum_{m \geq y(f(x))} \frac{f(x)}{m^2} = O\left(\frac{f(x)}{y(f(x))}\right).$$

Значит, мощность множества $M_2 \setminus M_1$ также не больше остаточного члена в формулировке леммы.

Для оставшихся простых p из множества, определенного в условии леммы 1, имеем

$$\frac{p-1}{n} - 1 = p_k m^{(k-1)},$$

где p_k – простое число, $p_k > y(f(x))$, а $m^{(k-1)}$ – натуральное такое, что $v(m^{(k-1)}) = k-1$. Кроме того, по построению $m^{(k-1)} < f(x)/y(f(x))$. Количество указанных в условии простых, за исключением множеств M_1, M_2 , не превосходит

$$\sum_{m \leq f(x)/y(f(x)), v(m)=k-1} N\left(p \leq x \mid p, \frac{p-1}{n}, \frac{(p-1)/n-1}{m} - \text{простые}\right). \quad (1)$$

Каждое слагаемое в этой сумме, соответствующее натуральному m , можно представить в виде

$$N\left(r \leq \left\lfloor \frac{[(x-1)/n]-1}{m} \right\rfloor \mid r, rm+1, (rm+1)n+1 - \text{простые}\right). \quad (2)$$

При $(m, n+1) \neq 1$ – это 0. Будем считать, что $(m, n+1) = 1$.

Для дальнейших оценок используем следующую теорему из метода решета Сельберга.

ТЕОРЕМА 2 [6; теорема 2.4.6]. Пусть $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \dots, s$, $a_i \neq 0$, $(a_i, b_i) = 1$. При $i \neq k$ $(a_k, b_k) \notin \{(\pm a_i, b_i), (\pm a_i, -b_i)\}$. Пусть $w(p)$ – число решений сравнения

$$(a_1 u + b_1)(a_2 u + b_2) \cdots (a_s u + b_s) \equiv 0 \pmod{p},$$

а

$$E = \prod_{1 \leq i \leq s} a_i \prod_{1 \leq i < k \leq s} (a_i b_k - a_k b_i).$$

Тогда при $N \geq 2$ имеет место оценка

$$N(u \leq N \mid |a_i u + b_i| - \text{простые } \forall i = 1, \dots, s) < c(s) \frac{N}{\ln^s N} \prod_{p|E} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-(s-w(p))},$$

где постоянная $c(s)$ зависит только от s .

Применим эту теорему при $s = 3$, $(a_i, b_i) \in \{(1, 0), (m, 1), (mn, n+1)\}$. Тогда $E = m^2 n(n+1)(m(n+1) - mn) = m^3 n(n+1)$. Принимая во внимание, что

$$\left\lfloor \frac{[(x-1)/n]-1}{m} \right\rfloor < \frac{x}{mn},$$

имеем следующую оценку выражения (2):

$$\leq C_1 \frac{x}{mn \ln^3(x/(mn))} \prod_{p|E} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-(3-w(p))},$$

где $w(p)$ – число решений сравнения

$$x(mx+1)(mnx+n+1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Если $p \mid m$, то $w(p) = 1$. Если $p \nmid m$, $p \mid n$, то $w(p) = 2$. Если $p \mid n+1$, а значит, $p \nmid m$, $p \nmid n$, то $w(p) = 2$. Поэтому указанную оценку можно продолжить

$$\begin{aligned} &\leq C_1 \frac{x}{mn \ln^3(x/(mn))} \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2} \prod_{p|n(n+1), p \nmid m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \\ &\leq C_1 \frac{xm^2n(n+1)}{mn \ln^3(x/(mn))\varphi^2(m)\varphi(n(n+1))}. \end{aligned}$$

Теперь всю сумму (1) можно оценить так:

$$\leq C_1 \frac{x(n+1)}{\varphi(n(n+1))} \sum_{m \leq f(x)/y(f(x)), v(m)=k-1} \frac{m}{\varphi^2(m) \ln^3(x/(mn))}.$$

Поскольку функция $z/y(z)$ возрастает, то эту оценку можно продолжить так:

$$\begin{aligned} &< C_1 \frac{x(n+1)}{\varphi(n(n+1))} \sum_{m \leq x/(ny(x/n)), v(m)=k-1} \frac{m}{\varphi^2(m) \ln^3(x/(mn))} \\ &< C_1 \frac{x(n+1)}{\varphi(n(n+1)) \ln^3(y(x/n))} \sum_{m \leq x/(ny(x/n)), v(m)=k-1} \frac{m}{\varphi^2(m)} \\ &< C_1 \frac{x(n+1)(\ln \ln(x/n))^3}{\varphi(n(n+1)) \ln^3(x/n)} \frac{1}{(k-1)!} \left(\sum_{p < x/(ny(x/n))} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p^i}{\varphi^2(p^i)} \right)^{k-1} \\ &= C_1 \frac{x(n+1)(\ln \ln(x/n))^3}{\varphi(n(n+1)) \ln^3(x/n)} \\ &\quad \times \frac{1}{(k-1)!} \left(\sum_{p < x/(ny(x/n))} \left(\frac{p}{(p-1)^2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{p^{(i-2)}(p-1)^2} \right) \right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_p \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{p^{(i-2)}(p-1)^2} = \sum_p \frac{1}{(p-1)^2} \frac{1}{(1-1/p)} < \infty,$$

а

$$\sum_{p < A} \frac{p}{(p-1)^2} = \sum_{p < A} \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right)^2 = \sum_{p < A} \frac{1}{p} \left(1 + \frac{2}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \leq \ln \ln A + C$$

для некоторой абсолютной константы C , то нашу оценку можно продолжить

$$\begin{aligned} &\leq C_1 \frac{x(n+1)(\ln \ln(x/n))^3}{\varphi(n(n+1)) \ln^3(x/n)} \frac{1}{(k-1)!} \left(\ln \ln \frac{x}{ny(x/n)} + C_2 \right)^{k-1} \\ &\leq C_1 \frac{x(n+1)(\ln \ln(x/n))^3}{\varphi(n(n+1)) \ln^3(x/n)} \frac{1}{(k-1)!} \left(\ln \ln \frac{x}{n} + C_2 \right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2 (Эрдёш [6; гл. 5, § 7]). Для любой положительной константы C и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\sum_{k \in \mathbb{N}, k \notin [(1-\varepsilon) \ln \ln z, (1+\varepsilon) \ln \ln z]} \frac{(\ln \ln z + C)^{k+2}}{(k-1)!} = O(\ln^{1-\delta(\varepsilon)} z)$$

при $z \rightarrow \infty$.

Применяя эту лемму с заменой z на x/n , из леммы 1 суммированием по k получим следующую лемму.

ЛЕММА 3. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \leq x/(y(x))$, выполнено

$$\begin{aligned} N \left(p \leq x \mid \frac{p-1}{n} = q - \text{простое}, v(q-1) \notin \left[(1-\varepsilon) \ln \ln \frac{x}{n}, (1+\varepsilon) \ln \ln \frac{x}{n} \right] \right) \\ = o \left(\frac{x(n+1)}{\varphi(n(n+1)) \ln^{2+\delta(\varepsilon)}(x/n)} \right) \end{aligned}$$

при $x \rightarrow \infty$, где $o(\cdot)$ не зависит от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для доказательства теоремы 1 достаточно установить следующую оценку:

$$\begin{aligned} N \left(p \leq x \mid \begin{array}{l} \text{существует простое } q > y(x) \text{ такое, что } \frac{p-1}{n} = q, \text{ и} \\ v(q-1) \notin \left[(1-\varepsilon) \ln \ln \frac{x}{n}, (1+\varepsilon) \ln \ln \frac{x}{n} \right] \end{array} \right) \\ = o \left(\frac{x}{\ln^{1+\delta_1} x} \right), \end{aligned}$$

где константа $\delta_1 > 0$.

Указанное количество можно оценить по лемме 3 суммированием по $n \leq x/y(x)$. Используя оценку Ландау для функции Эйлера, получим для некоторого $\delta > 0$ следующую оценку этой величины:

$$o \left(\sum_{n \leq x/y(x)} \frac{x(n+1)}{\varphi(n(n+1)) \ln^{2+\delta}(x/n)} \right) = o \left(x \ln \ln x \sum_{n \leq x/y(x)} \frac{1}{n \ln^{2+\delta}(x/n)} \right).$$

Нетрудно видеть, что при постоянном $s > 1$ в силу оценки $y(x) < x$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq n \leq x/y(x)} \frac{1}{n \ln^s(x/n)} &\leq \int_1^{x/y(x)} \frac{dt}{t \ln^s(x/t)} \leq \int_{y(x)}^x \frac{zx dz}{xz^2 \ln^s z} \\ &= \int_{y(x)}^x \frac{d \ln z}{\ln^s z} = O \left(\frac{1}{\ln^{s-1} y(x)} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, рассматриваемое количество можно оценить так:

$$o\left(x \ln \ln x \frac{(\ln \ln x)^{1+\delta}}{\ln^{1+\delta} x}\right) = o\left(\frac{x}{\ln^{1+\delta_1} x}\right).$$

Теорема доказана.

Заметим, что теми же средствами могут быть получены аналогичные результаты для всех простых чисел из дерева числа n , отстоящих от n на постоянное, т.е. не растущее с ростом n , число звеньев. Для получения указанным способом таких оценок для остальных узлов дерева n необходимо в методе Сельберга получить более точную и эффективную зависимость от количества рассматриваемых линейных комбинаций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Sakurai, H. Shizuya, “Relationships among the computational powers of breaking discrete log cryptosystems”, *Advances in cryptology—EUROCRYPT '95* (Saint-Malo, 1995), Lecture Notes in Comput. Sci., **921**, Springer, Berlin, 1995, 341–355.
- [2] М. А. Черепнёв, “О связи сложностей задач дискретного логарифмирования и Диффи–Хеллмана”, *Дискр. матем.*, **8:3** (1996), 22–30.
- [3] G. H. Hardy, S. Ramanujan, “The normal number of prime factors of a number n ”, *Q. J. Math.*, **48** (1917), 76–92.
- [4] P. Turán, “On a theorem of Hardy and Ramanujan”, *J. London Math. Soc.* (2), **30** (1929), 93–111.
- [5] P. Erdős, “On the normal number of prime factors of $p - 1$ and some related problems concerning Euler’s φ -function”, *Q. J. Math. (Oxford)*, **6** (1935), 205–213.
- [6] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967.

М. А. Черепнёв

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ma@atom.ru

Поступило

29.03.2004

Исправленный вариант

04.05.2006