Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Шрагин, О некоторых σ -алгебрах, связанных с измеримостью суперпозиций, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 6, 926–933

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3368>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 08:32:12

УДК 517.51

О НЕКОТОРЫХ σ -АЛГЕБРАХ, СВЯЗАННЫХ С ИЗМЕРИМОСТЬЮ СУПЕРПОЗИЦИЙ

И. В. Шрагин

Даны измеримое пространство $(T, \mathcal{T})$, множество X и функция $\varphi: T \rightarrow X$. Рассматриваются σ -алгебры

$$\mathfrak{N}_\varphi = \{B \subset X : \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{T}\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}_\varphi = \{D \subset T \times X : G_\varphi^{-1}(D) \in \mathcal{T}\},$$

где $G_\varphi(t) = (t, \varphi(t))$, а также $\mathfrak{N}_\Phi = \bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathfrak{N}_\varphi$ и $\mathfrak{M}_\Phi = \bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathfrak{M}_\varphi$, где $\Phi \subset X^T$. Эти σ -алгебры фигурируют в критериях $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ -измеримости суперпозиций $g \circ \varphi$ и $f \circ G_\varphi$ с функциями $g: X \rightarrow Y$ и $f: T \times X \rightarrow Y$, где $(Y, \mathcal{B})$ – измеримое пространство. В работе дано описание элементов указанных σ -алгебр, не использующее операций φ^{-1} и G_φ^{-1} .

Библиография: 4 названия.

Введение. Пусть $(T, \mathcal{T})$ – измеримое пространство, а X – непустое множество. Для данной функции $\varphi: T \rightarrow X$ определим ее “график-функцию” $G_\varphi: T \rightarrow T \times X$, где $G_\varphi(t) = (t, \varphi(t))$, $t \in T$ (так что $G_\varphi(T) = \text{gr } \varphi$ – график функции φ). С помощью функции G_φ и σ -алгебры $\mathcal{T}$ определим σ -алгебру $\mathfrak{M}_\varphi$ на декартовом произведении $T \times X$:

$$\mathfrak{M}_\varphi := \{D \subset T \times X : G_\varphi^{-1}(D) \in \mathcal{T}\}$$

(символом “:=” обозначается определяющее равенство). σ -алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ фигурирует в следующем критерии измеримости суперпозиции $f \circ G_\varphi: T \rightarrow Y$, где $(Y, \mathcal{B})$ – измеримое пространство, а $f: T \times X \rightarrow Y$ – некоторая функция.

КРИТЕРИЙ ИЗМЕРИМОСТИ СУПЕРПОЗИЦИИ. Суперпозиция $f \circ G_\varphi$ является $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ -измеримой, т.е.

$$(\forall C \in \mathcal{B}) \quad (f \circ G_\varphi)^{-1}(C) \in \mathcal{T},$$

тогда и только тогда, когда функция f является $(\mathfrak{M}_\varphi, \mathcal{B})$ -измеримой.

Это утверждение непосредственно следует из равенства

$$(f \circ G_\varphi)^{-1}(C) = G_\varphi^{-1}[f^{-1}(C)], \quad C \in \mathcal{B}, \quad (\text{a})$$

и определения σ -алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$.

Далее, пусть Φ – некоторое множество функций $\varphi: T \rightarrow X$. Тогда, как очевидно, суперпозиция $f \circ G_\varphi$ $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ -измерима для любой функции $\varphi \in \Phi$ в том и только том случае, когда функция f $(\mathfrak{M}_\Phi, \mathcal{B})$ -измерима, где

$$\mathfrak{M}_\Phi := \{D \subset T \times X : (\forall \varphi \in \Phi), \quad G_\varphi^{-1}(D) \in \mathcal{T}\},$$

т.е. $\mathfrak{M}_\Phi = \bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathfrak{M}_\varphi$.

Изложенные положения по существу содержатся в [1] и [2] (см. также [3; с. 18–19]). Однако до сих пор оставалось неизвестным явное описание элементов σ -алгебр $\mathfrak{M}_\varphi$ и $\mathfrak{M}_\Phi$, не использующее операцию G_Φ^{-1} . Эта проблема решается в настоящей работе путем разбиения σ -алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ на дизъюнктивные классы $\mathcal{K}(\varphi, A)$, $A \in \mathcal{T}$, допускающие простое описание их элементов.

Дано также описание элементов σ -алгебр

$$\mathfrak{N}_\varphi := \{B \subset X : \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$$

и $\mathfrak{N}_\Phi := \bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathfrak{N}_\varphi$, которые связаны с $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ -измеримостью суперпозиций вида $g \circ \varphi : T \rightarrow Y$, образованных с помощью функции $g : X \rightarrow Y$.

Отметим, что мы употребляем символ вложения множеств “ $\subset$ ” и в случае их равенства.

1. Описание элементов σ -алгебр $\mathfrak{M}_\varphi$ и $\mathfrak{M}_\Phi$. Итак, нам даны измеримое пространство $(T, \mathcal{T})$, непустое множество X и функция $\varphi : T \rightarrow X$. Положим при $A \in \mathcal{T}$

$$\mathcal{K}(\varphi, A) := \{D \subset T \times X : G_\varphi^{-1}(D) = A\}.$$

Тогда, как очевидно,

$$\mathfrak{M}_\varphi = \bigcup_{A \in \mathcal{T}} \mathcal{K}(\varphi, A). \quad (1)$$

Ясно, что если $A_1 \neq A_2$, то $\mathcal{K}(\varphi, A_1) \cap \mathcal{K}(\varphi, A_2) = \emptyset$. Таким образом, σ -алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ разбита на дизъюнктивные классы $\mathcal{K}(\varphi, A)$, соответствующие всевозможным множествам $A \in \mathcal{T}$.

Очевидно, при данном A семейство $\mathcal{K}(\varphi, A)$ содержит любые объединения и пересечения входящих в него множеств. Кроме того, оно “выпукло” в том смысле, что если $D_1 \subset D_2$, где $D_i \in \mathcal{K}(\varphi, A)$, $i = 1, 2$, и $D_1 \subset D \subset D_2$, то $D \in \mathcal{K}(\varphi, A)$.

Следующая теорема дает явное описание (т.е. без помощи операции G_φ^{-1}) элементов класса $\mathcal{K}(\varphi, A)$.

ТЕОРЕМА 1. *При любом $A \in \mathcal{T}$*

$$\mathcal{K}(\varphi, A) = \{D \subset T \times X : \text{gr } \varphi \cap (A \times X) \subset D \subset D_A\}, \quad (2)$$

где

$$D_A = (A \times X) \cup \{[(T \setminus A) \times X] \setminus \text{gr } \varphi\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$G_\varphi^{-1}(\text{gr } \varphi \cap (A \times X)) = T \cap A = A,$$

то $\text{gr } \varphi \cap (A \times X) \in \mathcal{K}(\varphi, A)$. Далее, пусть $D \in \mathcal{K}(\varphi, A)$, т.е. $G_\varphi^{-1}(D) = A$. Тогда если $(t, x) \in \text{gr } \varphi \cap (A \times X)$, то $x = \varphi(t)$, причем $t \in A$. Значит, $(t, \varphi(t)) \in D$, т.е. $(t, x) \in D$. Таким образом, $\text{gr } \varphi \cap (A \times X) \subset D$, т.е. множество $\text{gr } \varphi \cap (A \times X)$ является минимальным (в смысле включения) в классе $\mathcal{K}(\varphi, A)$.

Покажем, что множество D_A максимально в $\mathcal{K}(\varphi, A)$. В самом деле, так как

$$G_\varphi^{-1}\{[(T \setminus A) \times X] \setminus \text{gr } \varphi\} = \emptyset,$$

то $G_\varphi^{-1}(D_A) = G_\varphi^{-1}(A \times X) = A$, т.е. $D_A \in \mathcal{K}(\varphi, A)$. Возьмем теперь произвольное $D \in \mathcal{K}(\varphi, A)$ и покажем, что $D \subset D_A$. Для этого достаточно показать, что

$$D \setminus (A \times X) \subset [(T \setminus A) \times X] \setminus \text{gr } \varphi. \quad (3)$$

Итак, пусть $(t, x) \in D \setminus (A \times X)$. Тогда $(t, x) \notin \text{gr } \varphi$, так как иначе $x = \varphi(t)$, откуда $G_\varphi(t) = (t, x) \in D$, т.е. $t \in G_\varphi^{-1}(D) = A$ – противоречие. Тем самым доказано включение (3), так что $D \subset D_A$.

Остается применить отмеченную выше “выпуклость” класса $\mathcal{K}(\varphi, A)$.

Перейдем к σ -алгебре $\mathfrak{M}_\Phi$ при некотором $\Phi \subset X^T$. Так как $\mathfrak{M}_\Phi = \bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathfrak{M}_\varphi$, то в виду (1)

$$\mathfrak{M}_\Phi = \bigcap_{\varphi \in \Phi} \bigcup_{A \in \mathcal{T}} \mathcal{K}(\varphi, A).$$

Однако для $\mathfrak{M}_\Phi$ существует более удобное представление, а именно

$$\mathfrak{M}_\Phi = \bigcap_{F \in \mathcal{T}^\Phi} \bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathcal{K}(\varphi, F(\varphi)). \quad (4)$$

Действительно, пусть $D \in \mathfrak{M}_\Phi$, т.е.

$$(\forall \varphi \in \Phi) \quad G_\varphi^{-1}(D) \in \mathcal{T}.$$

Определим отображение $F_D: \Phi \rightarrow \mathcal{T}$, положив $F_D(\varphi) = G_\varphi^{-1}(D)$, $\varphi \in \Phi$. Значит,

$$(\forall \varphi \in \Phi) \quad D \in \mathcal{K}(\varphi, F_D(\varphi)),$$

так что D принадлежит правой части равенства (4).

Обратно, если

$$(\exists F \in \mathcal{T}^\Phi) \quad (\forall \varphi \in \Phi) \quad D \in \mathcal{K}(\varphi, F(\varphi)),$$

то

$$(\forall \varphi \in \Phi) \quad G_\varphi^{-1}(D) = F(\varphi) \in \mathcal{T},$$

т.е. $D \in \mathfrak{M}_\Phi$.

Тем самым, равенство (4) доказано. Заметим, что из дизъюнктности классов $\mathcal{K}(\varphi, A)$ при различных $A \in \mathcal{T}$ следует дизъюнктность семейств $\bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathcal{K}(\varphi, F(\varphi))$ при различных $F \in \mathcal{T}^\Phi$.

Таким образом, равенство (4) представляет собой разложение σ -алгебры $\mathfrak{M}_\Phi$ на дизъюнктные семейства подмножеств множества $T \times X$.

Представим теперь $\bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathcal{K}(\varphi, F(\varphi))$ при данном отображении $F: \Phi \rightarrow \mathcal{T}$ в более обозримом виде, что позволит, кстати, получить условие непустоты этого пересечения. А именно, в силу (2)

$$\begin{aligned} \bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathcal{K}(\varphi, F(\varphi)) &= \bigcap_{\varphi \in \Phi} \{D : \text{gr } \varphi \cap (F(\varphi) \times X) \subset D \subset D_{F(\varphi)}\} \\ &= \left\{ D : \bigcup_{\varphi \in \Phi} [\text{gr } \varphi \cap (F(\varphi) \times X)] \subset D \subset \bigcap_{\psi \in \Phi} D_{F(\psi)} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$D_{F(\psi)} = (F(\psi) \times X) \cup \{[(T \setminus F(\psi)) \times X] \setminus \text{gr } \psi\}.$$

Отсюда следует, что $\bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathcal{K}(\varphi, F(\varphi)) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда при любых $\varphi, \psi \in \Phi$

$$\text{gr } \varphi \cap (F(\varphi) \times X) \subset D_{F(\psi)}.$$

В частности, если отображение F_0 – “константа”, т.е.

$$(\forall \varphi \in \Phi) \quad F_0(\varphi) = A_0 \in \mathcal{T},$$

то $\bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathcal{K}(\varphi, F_0(\varphi)) \neq \emptyset$, так как

$$\forall(\varphi, \psi \in \Phi) \quad \text{gr } \varphi \cap (F_0(\varphi) \times X) \subset A_0 \times X \subset D_{F_0(\psi)}.$$

Рассмотрим в качестве примера случай тривиальной σ -алгебры $\mathcal{T} = \{\emptyset, T\}$. Тогда так как $\mathfrak{M}_\varphi = \mathcal{K}(\varphi, \emptyset) \cup \mathcal{K}(\varphi, T)$, то

$$\mathfrak{M}_\varphi = \{D : D \cap \text{gr } \varphi = \emptyset\} \cup \{D : \text{gr } \varphi \subset D\}.$$

Далее, пусть $F \in \mathcal{T}^\Phi$. Положим

$$\Psi = \{\varphi \in \Phi : F(\varphi) = T\}, \quad (5)$$

так что $\Phi \setminus \Psi = \{\varphi \in \Phi : F(\varphi) = \emptyset\}$. Тогда

$$\bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathcal{K}(\varphi, F(\varphi)) = \bigcap_{\varphi \in \Psi} \{D : \text{gr } \varphi \subset D\} \cap \bigcap_{\varphi \in \Phi \setminus \Psi} \{D : D \cap \text{gr } \varphi = \emptyset\},$$

откуда

$$\bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathcal{K}(\varphi, F(\varphi)) = \left\{ D : \bigcap_{\varphi \in \Psi} \text{gr } \varphi \subset D \subset (T \times X) \setminus \bigcup_{\varphi \in \Phi \setminus \Psi} \text{gr } \varphi \right\}. \quad (6)$$

Отсюда следует, что $\bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathcal{K}(\varphi, F(\varphi)) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда

$$\forall(\psi \in \Psi, \varphi \in \Phi \setminus \Psi) \quad \text{gr } \psi \cap \text{gr } \varphi = \emptyset. \quad (7)$$

Очевидно, равенство (6) определяет (в ситуации, когда $\mathcal{T} = \{\emptyset, T\}$) биекцию между отображениями $F \in \mathcal{T}^\Phi$ и подмножествами $\Psi \subset \Phi$. Поэтому в силу (4) и (6)

$$\mathfrak{M}_\Phi = \bigcup_{\Psi \subset \Phi} \left\{ D : \bigcup_{\varphi \in \Psi} \text{gr } \varphi \subset D \subset (T \times X) \setminus \bigcup_{\varphi \in \Phi \setminus \Psi} \text{gr } \varphi \right\}.$$

Ясно, что в этом представлении σ -алгебры $\mathfrak{M}_\Phi$ фактически присутствуют только те подмножества Ψ , которые удовлетворяют условию (7).

2. Описание элементов σ -алгебр $\mathfrak{N}_\varphi$ и $\mathfrak{N}_\Phi$. Здесь, как и в п. 1, даны измеримое пространство $(T, \mathcal{T})$ и непустое множество X . Для функции $\varphi : T \times X$ определим σ -алгебру

$$\mathfrak{N}_\varphi := \{B \subset X : \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}.$$

Если дана функция $g : X \rightarrow Y$, где $(Y, \mathcal{B})$ – измеримое пространство, то суперпозиция $g \circ \varphi : T \rightarrow Y$ является $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ -измеримой тогда и только тогда, когда функция g $(\mathfrak{N}_\varphi, \mathcal{B})$ -измерима. Это утверждение вытекает из равенства

$$(g \circ \varphi)^{-1}(C) = \varphi^{-1}(g^{-1}(C)), \quad C \in \mathcal{B}, \quad (b)$$

и определения σ -алгебры $\mathfrak{N}_\varphi$.

Положим при $A \subset T$

$$\mathcal{L}(\varphi, A) = \{B \subset X : \varphi^{-1}(B) = A\}.$$

Очевидно,

$$\mathfrak{N}_\varphi = \bigcup_{A \in \mathcal{T}} \mathcal{L}(\varphi, A),$$

причем при различных A классы $\mathcal{L}(\varphi, A)$ попарно не пересекаются. Однако в отличие от $\mathcal{K}(\varphi, A)$ класс $\mathcal{L}(\varphi, A)$ может быть пустым.

ЛЕММА 1. *При заданных функции $\varphi: T \rightarrow X$ и множестве $A \subset T$ следующие условия попарно эквивалентны:*

- 1) $\mathcal{L}(\varphi, A) \neq \emptyset$;
- 2) $\varphi(A) \cap \varphi(T \setminus A) = \emptyset$;
- 3) $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{L}(\varphi, A) \neq \emptyset$, т.е. $\varphi^{-1}(B) = A$ при некотором $B \subset X$. Предположим, что условие 2) не выполняется. Тогда $\varphi(s) = \varphi(t)$ при некоторых $s \in A$ и $t \in T \setminus A$. Так как $\varphi^{-1}(B) = A$, то $\varphi(s) \in B$, откуда и $\varphi(t) \in B$. Следовательно, $t \in \varphi^{-1}(B)$, т.е. $t \in A$. Полученное противоречие показывает, что из 1) следует 2).

Пусть выполняется условие 2). Возьмем $t \in \varphi^{-1}(\varphi(A))$, т.е. $\varphi(t) \in \varphi(A)$. Отсюда следует, что $t \in A$, так как в противном случае $\varphi(t) \in \varphi(T \setminus A)$, что противоречит условию 2). Таким образом, $\varphi^{-1}(\varphi(A)) \subset A$. Так как и обратное вложение имеет место, то условие 3) доказано.

Наконец, из 3) следует, что $\varphi(A) \in \mathcal{L}(\varphi, A)$, т.е. $\mathcal{L}(\varphi, A) \neq \emptyset$.

Отметим, что к непустым классам относятся $\mathcal{L}(\varphi, \emptyset)$ и $\mathcal{L}(\varphi, T)$.

Положим при заданной функции $\varphi: T \rightarrow X$

$$\mathcal{T}_\varphi = \{A \in \mathcal{T} : \varphi(A) \cap \varphi(T \setminus A) = \emptyset\}.$$

Тогда

$$\mathfrak{N}_\varphi = \bigcup_{A \in \mathcal{T}_\varphi} \mathcal{L}(\varphi, A),$$

причем все классы $\mathcal{L}(\varphi, A)$ в этом равенстве непусты.

Нетрудно проверить, что $\mathcal{T}_\varphi$ является σ -алгеброй на T . В частности, если функция φ тождественно постоянна, т.е. $(\forall t \in T) \varphi(t) = x_0$, то $\mathcal{T}_\varphi = \{\emptyset, T\}$. При этом

$$\mathcal{L}(\varphi, \emptyset) = \{B : x_0 \notin B\}, \quad \mathcal{L}(\varphi, T) = \{B : x_0 \in B\}.$$

Если же φ – инъекция, то, как очевидно, $\mathcal{T}_\varphi = \mathcal{T}$.

Следующая теорема описывает состав класса $\mathcal{L}(\varphi, A)$.

ТЕОРЕМА 2. *При любом $A \in \mathcal{T}$*

$$\mathcal{L}(\varphi, A) = \{B \subset X : \varphi(A) \subset B \subset X \setminus \varphi(T \setminus A)\}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_\varphi$, то обе части равенства (8) пусты. Пусть $A \in \mathcal{T}_\varphi$. Тогда в силу леммы 1 (условие 3)) $\varphi(A) \in \mathcal{L}(\varphi, A)$. Более того, если $B \in \mathcal{L}(\varphi, A)$, т.е. $\varphi^{-1}(B) = A$, то $\varphi(A) \subset B$. Следовательно, множество $\varphi(A)$ минимально в $\mathcal{L}(\varphi, A)$.

Далее, так как $T \setminus A \in \mathcal{T}_\varphi$, то $\varphi^{-1}(X \setminus \varphi(T \setminus A)) = T \setminus (T \setminus A) = A$, т.е. $X \setminus \varphi(T \setminus A) \in \mathcal{L}(\varphi, A)$.

Покажем, что если $B \in \mathcal{L}(\varphi, A)$, то $B \subset X \setminus \varphi(T \setminus A)$. С этой целью возьмем $x \in B$ и предположим, что $x \in \varphi(T \setminus A)$, т.е. $x = \varphi(t)$ при некотором $t \in T \setminus A$. Но так как $\varphi(t) = x \in B$, то $t \in \varphi^{-1}(B) = A$. Полученное противоречие показывает, что $x \notin \varphi(T \setminus A)$, т.е. $B \subset X \setminus \varphi(T \setminus A)$. Следовательно, множество $X \setminus \varphi(T \setminus A)$ максимально в классе $\mathcal{L}(\varphi, A)$.

Остается заметить, что если $\varphi(A) \subset B \subset X \setminus \varphi(T \setminus A)$, то $B \in \mathcal{L}(\varphi, A)$ в силу свойства “выпуклости”, которым класс $\mathcal{L}(\varphi, A)$ обладает аналогично классу $\mathcal{H}(\varphi, A)$.

Рассмотрим теперь σ -алгебру $\mathfrak{N}_\Phi$ и покажем, что

$$\mathfrak{N}_\Phi = \bigcup_{F \in \mathcal{T}^\Phi} \bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathcal{L}(\varphi, F(\varphi)). \quad (9)$$

Действительно, пусть $B \in \mathfrak{N}_\Phi$, т.е. $(\forall \varphi \in \Phi) \quad \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{T}$. Положим $F_B(\varphi) = \varphi^{-1}(B)$, $\varphi \in \Phi$. Тогда $F_B \in \mathcal{T}^\Phi$ и $(\forall \varphi \in \Phi) \quad B \in \mathcal{L}(\varphi, F_B(\varphi))$, т.е. B принадлежит правой части (9). Обратно, если

$$(\exists F \in \mathcal{T}^\Phi) \quad (\forall \varphi \in \Phi) \quad B \in \mathcal{L}(\varphi, F(\varphi)),$$

то

$$(\forall \varphi \in \Phi) \quad \varphi^{-1}(B) = F(\varphi) \in \mathcal{T},$$

т.е. $B \in \mathfrak{N}_\Phi$.

Очевидно, равенство (9) представляет собой разложение σ -алгебры $\mathfrak{N}_\Phi$ на дизъюнктные семейства подмножеств множества X . Выясним, при каких условиях эти семейства непусты.

Так как в силу (8) при фиксированном $F \in \mathcal{T}^\Phi$

$$\mathcal{L}(\varphi, F(\varphi)) = \{B \subset X : \varphi(F(\varphi)) \subset B \subset X \setminus \varphi(T \setminus F(\varphi))\},$$

то

$$\bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathcal{L}(\varphi, F(\varphi)) = \left\{ B : \bigcup_{\varphi \in \Phi} \varphi(F(\varphi)) \subset B \subset X \setminus \bigcup_{\varphi \in \Phi} \varphi(T \setminus F(\varphi)) \right\}.$$

Отсюда следует, что $\bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathcal{L}(\varphi, F(\varphi)) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда

$$\forall (\varphi, \psi \in \Phi) \quad \varphi(F(\varphi)) \cap \psi(T \setminus F(\psi)) = \emptyset. \quad (10)$$

Таким образом, в формуле (9) фактически присутствуют лишь те $F \in \mathcal{T}^\Phi$, которые удовлетворяют условию (10).

Как и в п. 1, рассмотрим случай, когда $\mathcal{T} = \{\emptyset, T\}$. Так как

$$\mathcal{L}(\varphi, \emptyset) = \{B : B \subset X \setminus \varphi(T)\}, \quad \mathcal{L}(\varphi, T) = \{B : \varphi(T) \subset B\},$$

то

$$\mathfrak{N}_\Phi = \{B : B \subset X \setminus \varphi(T)\} \cup \{B : \varphi(T) \subset B\}.$$

Далее, пусть $\Phi \subset X^T$ и $F \in \mathcal{T}^\Phi$. Положим $\Psi = \{\varphi \in \Phi : F(\varphi) = T\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathcal{L}(\varphi, F(\varphi)) &= \bigcap_{\varphi \in \Psi} \mathcal{L}(\varphi, T) \cap \bigcap_{\varphi \in \Phi \setminus \Psi} \mathcal{L}(\varphi, \emptyset) \\ &= \left\{ B : \bigcap_{\varphi \in \Psi} \varphi(T) \subset B \subset X \setminus \bigcap_{\varphi \in \Phi \setminus \Psi} \varphi(T) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathcal{L}(\varphi, F(\varphi)) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда

$$\forall (\psi \in \Psi, \varphi \in \Phi \setminus \Psi) \quad \varphi(T) \cap \psi(T) = \emptyset. \quad (11)$$

Таким образом, если $\mathcal{T} = \{\emptyset, T\}$ и $\Phi \subset X^T$, то в силу (9)

$$\mathfrak{N}_\Phi = \bigcup_{\psi \in \Phi} \left\{ B : \bigcup_{\varphi \in \Psi} \varphi(T) \subset B \subset X \setminus \bigcup_{\varphi \in \Phi \setminus \Psi} \varphi(T) \right\}.$$

При этом здесь можно ограничиться лишь теми $\Psi \subset \Phi$, для которых выполняется условие (11).

3. Некоторые замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Зафиксируем функцию $\varphi: T \rightarrow X$ и положим

$$\mathcal{T} \times \mathfrak{N}_\varphi := \{A \times B : A \in \mathcal{T}, B \in \mathfrak{N}_\varphi\}.$$

Тогда $\mathcal{T} \times \mathfrak{N}_\varphi \subset \mathfrak{M}_\varphi$, так как если $A \in \mathcal{T}$, а $B \in \mathfrak{N}_\varphi$, то

$$G_\varphi^{-1}(A \times B) = \{t : (t, \varphi(t)) \in A \times B\} = A \cap \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{T}.$$

Обозначим через $\mathcal{T} \otimes \mathfrak{N}_\varphi$ σ -алгебру на $T \times X$, порожденную семейством $\mathcal{T} \times \mathfrak{N}_\varphi$. Так как $\mathfrak{M}_\varphi$ – σ -алгебра, то

$$\mathcal{T} \otimes \mathfrak{N}_\varphi \subset \mathfrak{M}_\varphi.$$

Покажем, что это вложение, вообще говоря, не является равенством. С этой целью рассмотрим ситуацию, когда $\mathcal{T} = \{\emptyset, T\}$. Нетрудно проверить, что в этом случае совокупность $\mathcal{T} \times \mathfrak{N}_\varphi$ является σ -алгеброй, так что $\mathcal{T} \otimes \mathfrak{N}_\varphi = \mathcal{T} \times \mathfrak{N}_\varphi$. Допустим, что каждое из множеств T и X содержит более одного элемента, и возьмем такую точку $(t_0, x_0) \in T \times X$, что $x_0 \neq \varphi(t_0)$. Положим $D = \{(t_0, x_0)\}$. Тогда $D \in \mathfrak{M}_\varphi$, так как $G_\varphi^{-1}(D) = \emptyset \in \mathcal{T}$. В то же время $D \notin \mathcal{T} \times \mathfrak{N}_\varphi$, так как $\{t_0\} \notin \mathcal{T}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Положим

$$J = \{A \in \mathcal{T} : (E \subset A) \implies (E \in \mathcal{T})\}.$$

Легко убедиться, что J является σ -идеалом (т.е. $\emptyset \in J$, семейство J счетно-аддитивно, и если $A \in J$, а $E \subset A$, то $E \in J$), причем максимальным из σ -идеалов (и даже из идеалов), содержащихся в J .

Например, если $T = IR$, а $\mathcal{T}$ – совокупность всех измеримых по Лебегу множеств в IR , то J состоит из всех множеств меры нуль.

Пусть функции $\varphi, \psi \in X^T$. Назовем их J -эквивалентными (обозначение: $\varphi \stackrel{J}{\sim} \psi$), если $\{t \in T : \varphi(t) \neq \psi(t)\} \in J$. Легко убедиться, что отношение J является отношением эквивалентности на множестве X^T .

Если $\varphi \stackrel{J}{\sim} \psi$ и $B \subset X$, то, как нетрудно проверить, $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда $\psi^{-1}(B) \in \mathcal{T}$. Это значит, что $\mathfrak{N}_\varphi = \mathfrak{N}_\psi$. Аналогично, $\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{M}_\psi$.

Отсюда следует, что при рассмотрении σ -алгебр $\mathfrak{N}_\Phi$ и $\mathfrak{M}_\Phi$ можно считать, что никакие две функции, входящие в Φ , не являются J -эквивалентными.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $\Phi \subset X^T$. Известно (см., например, [4]) понятие склейки множества Φ . Склейка $S(\Phi)$ состоит из всевозможных функций $\varphi: T \rightarrow X$, определяемых следующим образом. Возьмем произвольное счетное (в частности, конечное) разбиение $\{T_n : n \in I\}$ множества T и какие-либо функции $\varphi_n \in \Phi$, $n \in I$. Тогда если $\varphi(t) = \varphi_n(t)$, $t \in T_n$, $n \in I$, то $\varphi \in S(\Phi)$.

Если при этом рассматриваются только те разбиения, у которых $(\forall n \in I) T_n \in \mathcal{T}$, то множество соответствующих функций $\varphi \in S(\Phi)$ обозначим через $S(\Phi, \mathcal{T})$.

Покажем, что $\mathfrak{M}_{S(\Phi, \mathcal{T})} = \mathfrak{M}_\Phi$ и $\mathfrak{N}_{S(\Phi, \mathcal{T})} = \mathfrak{N}_\Phi$. Действительно, так как $\Phi \subset S(\Phi, \mathcal{T})$, то $\mathfrak{M}_{S(\Phi, \mathcal{T})} \subset \mathfrak{M}_\Phi$ и $\mathfrak{N}_{S(\Phi, \mathcal{T})} \subset \mathfrak{N}_\Phi$. Далее, пусть $B \in \mathfrak{N}_\Phi$, т.е. $(\forall \varphi \in \Phi) \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, и пусть $\psi \in S(\Phi, \mathcal{T})$, т.е. $\psi(t) = \varphi_n(t)$, $t \in T_n$, $n \in I$, где $(\forall n) T_n \in \mathcal{T}$ и $\varphi_n \in \Phi$. Тогда

$$\psi^{-1}(B) = \bigcup_{n \in I} (T_n \cap \varphi_n^{-1}(B)) \in \mathcal{T},$$

так что $B \in \mathfrak{N}_{S(\Phi, \mathcal{T})}$. Аналогично получаем, что $\mathfrak{M}_\Phi \subset \mathfrak{M}_{S(\Phi, \mathcal{T})}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как мы видели, σ -алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ и $\mathfrak{N}_\varphi$ “обслуживают” условия $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ -измеримости суперпозиций $f \circ G_\varphi$ и $g \circ \varphi$ соответственно. При этом речь идет об условиях на “внешние” функции f и g . Естественно рассмотреть также условия на функцию φ при фиксированных f и g . В этих условиях, которые также вытекают из равенств (a) и (b), фигурируют σ -алгебры

$$f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(C) : C \in \mathcal{B}\}$$

(на $T \times X$) и $g^{-1}(\mathcal{B})$ (на X). А именно, суперпозиция $f \circ G_\varphi$ (соответственно $g \circ \varphi$) $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ -измерима тогда и только тогда, когда функция G_φ (соответственно φ) $(\mathcal{T}, f^{-1}(\mathcal{B}))$ -измерима (соответственно $(\mathcal{T}, g^{-1}(\mathcal{B}))$ -измерима).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. В. Шрагин, “Условия измеримости суперпозиций”, *Докл. АН СССР*, **197**:2 (1971), 295–298.
- [2] И. В. Шрагин, “Суперпозиционная измеримость”, *Изв. вузов. Матем.*, 1975, № 1, 82–92.
- [3] J. Appell, P. P. Zabrejko, *Nonlinear Superposition Operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [4] Ю. В. Непомнящих, А. В. Поносов, “Локальные операторы в некоторых подпространствах пространства L_0 ”, *Изв. вузов. Матем.*, 1999, № 6, 50–64.

И. В. Шрагин

E-mail: marina_spector@mail.ru

Поступило

20.10.2003