Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Иванов, О задачах Турана и Дельсарта для периодических положительно определенных функций, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 6, 934–939

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3369>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:13:32

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ЗАДАЧАХ ТУРАНА И ДЕЛЬСАРТА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В. И. Иванов

Пусть $\mathbb{T} = [0, 1)$ – одномерный тор, $c(x) = \cos(2\pi x)$, $s(x) = \sin(2\pi x)$, $0 < h \leq 1/2$, K – класс 1-периодических непрерывных четных положительно определенных функций $f(x)$, для которых $f(0) = 1$. В теории вероятностей K – класс действительных периодических характеристических функций. Класс K совпадает с множеством функций, разложение в ряд Фурье которых имеет вид

$$f(x) = \hat{f}_0 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{f}_{\nu} c(\nu x), \quad \hat{f}_{\nu} \geq 0, \quad \nu \in \mathbb{Z}_+, \quad \hat{f}_0 + 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}_{\nu} = 1.$$

Через $K_T(h)$ (соответственно $K_D(h)$) обозначим подкласс функций из K , для которых $f(x) = 0$ (соответственно $f(x) \leq 0$) при $h \leq |x| \leq 1/2$.

Интегральные задачи Турана и Дельсарта состоят в вычислении величин

$$A_T(h) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{T}} f(x) dx : f \in K_T(h) \right\}, \quad A_D(h) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{T}} f(x) dx : f \in K_D(h) \right\}$$

соответственно.

Историю вопроса см. в [1]–[4]. В [2]–[4] величины $A_T(h)$, $A_D(h)$ вычислены для всех рациональных h . Оказалось, что для всех рациональных h $A_T(h) = A_D(h)$. Оставался открытым вопрос о значениях этих величин для иррациональных h . Для их вычисления достаточно было бы доказать непрерывность величин $A_T(h)$, $A_D(h)$ по h . Нами установлена следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *На интервале $(0, 1/2]$ функции $A_T(h)$ и $A_D(h)$ непрерывны, возрастают и совпадают.*

Доказательство непрерывности $A_D(h)$ использует подход, предложенный Балаганским [5] при доказательстве непрерывности точной константы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{T})$ как функции аргумента в модуле непрерывности.

Пусть $E, F \subset \mathbb{T}$ – замкнутые множества, $M \subset C(\mathbb{T})$,

$$EF = \sup_{x \in E} \inf_{y \in F} |x - y|, \quad \Phi_M(E) = \inf_{f \in M} \|f\|_{C(E)}.$$

Ключевую роль в подходе Балаганского играет следующая лемма.

ЛЕММА 1 (В. С. Балаганский). *Пусть $\{E_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{T}$ – последовательность замкнутых множеств, $M \subset C(\mathbb{T})$ слабо замкнуто в $L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, и ограничено в $C(\mathbb{T})$. Тогда*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 05-01-39005 и № 06-01-00372.

- 1) если $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k E_0 = 0$, то $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Phi_M(E_k) \leq \Phi_M(E_0)$;
- 2) если E_0 лежит в замыкании $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k$, то $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Phi_M(E_k) \geq \Phi_M(E_0)$.

Пусть

$$M = \left\{ f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (1 + c(kt)) : a_k \geq 0, \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1 \right\},$$

$$\Phi_M(h) = \inf \{ \|f\|_{C[h, 1/2]} : f \in M \}.$$

ЛЕММА 2. Если $h \in (0, 1/2]$, то

$$\Phi_M(h) = \frac{1 - 2A_D(h)}{1 - A_D(h)}, \quad A_D(h) = \frac{1 - \Phi_M(h)}{2 - \Phi_M(h)},$$

причем $0 < A_D(h) \leq 1/2$, $0 \leq \Phi_M(h) < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Слабое замыкание M в $L_2(\mathbb{T})$ есть множество

$$\overline{M} = \left\{ f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k c(kt) : a_k \geq 0, \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq 1 \right\}.$$

Так как $\Phi_M(h) < 1$, то $\Phi_{\overline{M}}(h) = \Phi_M(h)$. По лемме 1 функция $\Phi_M(h)$ непрерывна. Поэтому теорема 1 вытекает из леммы 2, равенства $A_T(h)$ и $A_D(h)$ для рациональных h и единственности экстремальной функции в дискретном варианте задачи Турана [2], [4].

Хотелось бы для иррациональных h получить явное значение $A_T(h)$ и указать в задаче Турана экстремальные функции.

Пусть $0 < h < 1/2$, $E_{2\pi h}^+$ – класс четных целых функций $F(z)$ экспоненциального типа $2\pi h$, для которых

$$F(\nu) \geq 0, \quad \nu \in \mathbb{Z}_+, \quad F(0) + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu) = 1.$$

По теореме Планшереля–Поля (см. [6]) $E_{2\pi h}^+ \subset L(\mathbb{R})$.

Положим

$$\Lambda(h) = \sup \{ F(0) : F \in E_{2\pi h}^+ \}. \quad (1)$$

Между классами $K_T(h)$ и $E_{2\pi h}^+$ можно установить биекцию. Если $F(z) \in E_{2\pi h}^+$, $\hat{F}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z) c(zx) dz$ – ее преобразование Фурье, $\hat{F}(0) = 1$, то по теореме Пэли–Винера и формуле суммирования Пуассона

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{F}(x+k) = F(0) + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu) c(\nu x) \in K_T(h).$$

Обратно, если

$$f(x) = \hat{f}_0 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{f}_\nu c(\nu x) \in K_T(h),$$

то

$$F(z) = \int_{-h}^h f(x) c(zx) dx \in E_{2\pi h}^+ \quad \text{и} \quad F(\nu) = \hat{f}_\nu.$$

Отметим также, что экстремальной функции в задаче (1) соответствует экстремальная функция в задаче Турана и обратно. Таким образом, справедлива лемма.

ЛЕММА 3. Если $h \in (0, 1/2)$, то $\Lambda(h) = A_T(h)$.

Обозначим для действительного числа x через $[x]$ его целую часть, $\{x\}$ – его дробную часть, $\langle x \rangle$ – расстояние до ближайшего к нему целого числа. Имеем

$$x = [x] + \{x\}, \quad \langle x \rangle = \min_{\nu \in \mathbb{Z}} |x - \nu| = \min\{\{x\}, 1 - \{x\}\},$$

$$[x] \in \mathbb{Z}, \quad \{x\} \in [0, 1), \quad \langle x \rangle \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Для $h \in (0, 1/2)$ определим следующее разбиение множества натуральных чисел:

$$S_0(h) = \{\nu \in \mathbb{N} : \langle \nu h \rangle = 0\}, \quad S_1(h) = \{\nu \in \mathbb{N} : \langle \nu h \rangle \in (0, h)\},$$

$$S_2(h) = \{\nu \in \mathbb{N} : \langle \nu h \rangle \geq h\}.$$

Для рационального $h = p/q$ (несократимая дробь)

$$S_0\left(\frac{p}{q}\right) = \{\nu q\}_{\nu=1}^{\infty}, \quad S_1\left(\frac{p}{q}\right) = \left\{\left[\frac{q\nu}{p}\right], \left[\frac{q\nu}{p}\right] + 1\right\}_{\nu=1, \nu \neq ps}^{\infty}.$$

Для иррационального h

$$S_0(h) = \emptyset, \quad S_1(h) = \left\{\left[\frac{\nu}{h}\right], \left[\frac{\nu}{h}\right] + 1\right\}_{\nu=1}^{\infty}.$$

При вычислении величины $A_T(p/q)$ в [2]–[4] были построены два полинома. Полином

$$f_{p,q}(x) = \hat{f}_0^{p,q} + 2 \sum_{k=1}^{p-1} \hat{f}_k^{p,q} c\left(\frac{kx}{q}\right),$$

для которого выполнены условия

- 1) $\hat{f}_k^{p,q} > 0, \quad k = 0, 1, \dots, p-1,$
- 2) $f_{p,q}(\nu) = 1, \quad \nu \in \{0\} \cup S_0\left(\frac{p}{q}\right), \quad f_{p,q}(\nu) > 0, \quad \nu \in S_2\left(\frac{p}{q}\right), \quad f_{p,q}(\nu) = 0, \quad \nu \in S_1\left(\frac{p}{q}\right),$

и полином

$$g_{p,q}(x) = \hat{g}_0^{p,q} + 2 \sum_{k=p}^{[q/2]} \hat{g}_k^{p,q} c\left(\frac{kx}{q}\right),$$

для которого выполнены условия

- 1) $\hat{g}_0^{p,q} = \frac{1}{q\hat{f}_0^{p,q}}, \quad \hat{g}_k^{p,q} > 0, \quad k = p, \dots, \left[\frac{q}{2}\right],$
- 2) $g_{p,q}(\nu) = 1, \quad \nu \in \{0\} \cup S_0\left(\frac{p}{q}\right), \quad g_{p,q}(\nu) > 0, \quad \nu \in S_1\left(\frac{p}{q}\right), \quad g_{p,q}(\nu) = 0, \quad \nu \in S_2\left(\frac{p}{q}\right).$

ЛЕММА 4. Для любой функции

$$f(x) = \hat{f}_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k c(kx), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k| < \infty,$$

справедлива квадратурная формула

$$\frac{1}{q\hat{f}_0^{p,q}} f(0) + 2 \sum_{k=p}^{[q/2]} \hat{g}_k^{p,q} f\left(\frac{k}{q}\right) = \hat{f}_0 + 2 \sum_{k \in S_0(p/q)} \hat{f}_k + 2 \sum_{k \in S_1(p/q)} \hat{f}_k g_{p,q}(k).$$

Из леммы 4 вытекает оценка

$$A_T\left(\frac{p}{q}\right) \leq \frac{1}{q\hat{f}_0^{p,q}}. \quad (2)$$

Ее точность проверяется на функции

$$\varphi_{p,q}(x) = \frac{1}{q\hat{f}_0^{p,q}} \left\{ 1 + 2 \sum_{k \in S_2(p/q)} \left(\frac{s(k/(2q))}{\pi k/q} \right)^2 f_{p,q}(k) c(kx) \right\},$$

для которой (см. [1]–[4]) выполнены условия

$$\varphi_{p,q}(x) \in K_T\left(\frac{p}{q}\right), \quad \varphi_{p,q}(x) > 0 \quad \text{и убывает на} \quad \left[0, \frac{p}{q}\right). \quad (3)$$

ЛЕММА 5. Для любой четной целой функции $F(z) \in L(\mathbb{R})$ экспоненциального типа справедлива квадратурная формула

$$\frac{1}{q\hat{f}_0^{p,q}} \hat{F}(0) + 2 \sum_{k=p}^{[q/2]} \hat{g}_k^{p,q} \hat{F}\left(\frac{k}{q}\right) = F(0) + 2 \sum_{k \in S_0(p/q)} F(k) + 2 \sum_{k \in S_1(p/q)} F(k) g_{p,q}(k).$$

Из леммы 5 для $\Lambda(p/q)$ вытекает оценка (2). Ее точность проверяется на функции

$$\begin{aligned} G_{p,q}(z) &= \frac{1}{q\hat{f}_0^{p,q}} \left(\frac{s(z/(2q))}{\pi z/q} \right)^2 f_{p,q}(z) \\ &= \frac{1}{q\hat{f}_0^{p,q}} \prod_{k \in S_0(p/q)} \left(1 - \left(\frac{z}{k} \right)^2 \right)^2 \prod_{k \in S_1(p/q)} \left(1 - \left(\frac{z}{k} \right)^2 \right) \in E_{2\pi p/q}^+. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A_T\left(\frac{p}{q}\right) = \Lambda\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q\hat{f}_0^{p,q}}.$$

ТЕОРЕМА 2. Если иррациональное $h \in (0, 1/2)$, то

$$A_T(h) = \Lambda(h) = \left(1 + 2 \sum_{\nu \in S_2(h)} \prod_{k \in S_1(h)} \left(1 - \left(\frac{\nu}{k} \right)^2 \right) \right)^{-1}. \quad (4)$$

Единственная экстремальная функция в (1) имеет нули в точках множества $S_1(h)$, а единственная экстремальная функция в задаче Турана положительна и не возрастает на интервале $[0, h)$.

Экстремальные функции в теореме 2 имеют вид

$$G_h(z) = \Lambda(h) \prod_{k \in S_1(h)} \left(1 - \left(\frac{z}{k} \right)^2 \right), \quad \varphi_h(x) = G_h(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} G_h(k) c(kx).$$

Приведем квадратурные формулы для произвольного $h \in (0, 1/2)$. В них для рационального $h = p/q$ $G_h(x) = G_{p,q}(x)$, $\varphi_h(x) = \varphi_{p,q}(x)$.

ЛЕММА 6. Для любой функции

$$f(x) = \hat{f}_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k c(kx), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k| < \infty,$$

справедлива квадратурная формула

$$G_h(0)f(0) + 2 \sum_{k \in S_2(h)} G_h(k)f(\langle kh \rangle) = \hat{f}_0 + 2 \sum_{k \in S_0(h)} \hat{f}_k + 2 \sum_{k \in S_1(h)} \hat{f}_k \varphi_h(\langle kh \rangle).$$

ЛЕММА 7. Для любой четной целой функции $F(z) \in L(\mathbb{R})$ экспоненциального типа справедлива квадратурная формула

$$G_h(0)\hat{F}(0) + 2 \sum_{k \in S_2(h)} G_h(k)\hat{F}(\langle kh \rangle) = F(0) + 2 \sum_{k \in S_0(h)} F(k) + 2 \sum_{k \in S_1(h)} F(k)\varphi_h(\langle kh \rangle).$$

Для рационального $h = p/q \in (0, 1/2)$ экстремальная функция в задаче (1) (задаче Турана) неединственна. Все экстремальные функции имеют вид

$$G(z, p, q) = \Lambda\left(\frac{p}{q}\right) f_{p,q}(z) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{qk}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{z}{z_k}\right)^2\right), \quad z_k \in [qk-1, qk+1].$$

Следующая запись экстремальной функции

$$G(z, h) = \Lambda(h) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{[k/h]}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{z}{[k/h]+1}\right)^2\right)$$

справедлива для любого $h \in (0, 1/2)$.

Лемма 6 позволяет решить в одном частном случае и задачу Монтгомери. Пусть $N \subset \mathbb{N}$, $K_M(N)$ – класс непрерывных четных функций $f(x) = a_0 + \sum_{k \in N} a_k c(kx)$, для которых выполнены условия

$$1) \quad \sum_{k \in N} |a_k| < \infty, \quad 2) \quad f(x) \geq 0 \quad (x \in \mathbb{T}), \quad 3) \quad f(0) = 1.$$

Задача Монтгомери [7] состоит в вычислении величины

$$\delta_M(N) = \inf_{f \in K_M(N)} \int_{\mathbb{T}} f(x) dx.$$

Известные случаи решения задачи Монтгомери см. в [2], [4]. Если $\delta_M(N) = 0$, то множество N является множеством Ван дер Корпута, т.е. произвольная последовательность $\{u_n\}$ равномерно распределена $(\bmod 1)$, если последовательности $\{u_{n+k} - u_n\}$ равномерно распределены $(\bmod 1)$ для всех $k \in N$ [7]. В [7] также определена величина

$$\eta_M(N) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \inf_{k \in N} \langle k\theta \rangle$$

и доказано неравенство

$$\eta_M(N) \leq \delta_M(N). \quad (5)$$

Множество N , для которого $\eta_M(N) = 0$, называется *множеством Хейлбронна*. Неравенство (5) показывает, что всякое множество Ван дер Корпута является множеством Хейлбронна. Д. В. Горбачев заметил, что неравенство (5) может быть усилено.

ЛЕММА 8 (Д. В. Горбачев). Для любого множества $N \subset \mathbb{N}$

$$A_T(\eta_M(N)) \leq \delta_M(N). \quad (6)$$

Из описания экстремальных функций в (1) $A_T(h) = h$ для $h = 1/q$ и $A_T(h) > h$ для всех остальных h , поэтому (6), действительно, усиливает (5).

Используя леммы 6, 8, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Для всех $h \in (0, 1/2]$

$$\delta_M(S_2(h)) = A_T(h), \quad \eta_M(S_2(h)) = h.$$

Равенство $\eta_M(S_2(h)) = h$, в частности, означает, что для любых $\theta, h \in \mathbb{R}$ существует натуральное k , для которого

$$\langle \theta k \rangle \leq \langle h \rangle \leq \langle hk \rangle.$$

Пусть $\mathbb{Z}_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$ – циклическая группа порядка q , множество $C \subset \mathbb{Z}_q$ – четное ($C = -C$), $0 \notin C$, $C^q = C + q\mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что C эквивалентно D в $\mathbb{Z}_q$, если для некоторого $r \in \mathbb{Z}_q$, взаимно простого с q , $D = rC$ в $\mathbb{Z}_q$. Если C эквивалентно D в $\mathbb{Z}_q$, то

$$\delta_M(C) = \delta_M(C^q) = \delta_M(D) = \delta_M(D^q).$$

Отметим, что множество $C_{p,q} = S_2(p/q) \cap \mathbb{Z}_q$ эквивалентно $\{p, p+1, \dots, q-p\}$ в $\mathbb{Z}_q$ и $S_2(p/q) = C_{p,q}^q$.

Автор благодарит Д. В. Горбачева за полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. В. Горбачев, А. С. Маношина, *Матем. заметки*, **76:5** (2004), 688–700.
 [2] В. И. Иванов, Д. В. Горбачев, Ю. Д. Рудомазина, *Изв. ТулГУ. Сер. матем., мех., информатика*, **10:1** (2004), 76–104. [3] В. И. Иванов, Ю. Д. Рудомазина, *Матем. заметки*, **77:6** (2005), 941–945. [4] В. И. Иванов, Д. В. Горбачев, Ю. Д. Рудомазина, *Тр. ИММ УрО РАН*, **11** (2005). [5] В. С. Балаганский, *Актуальные проблемы математики и механики: материалы международной конференции*, Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского, **25**, Изд-во Казанского матем. общ-ва, Казань, 2004, 40–41. [6] В. Ya. Levin, *Lectures on Entire Functions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996. [7] H. L. Montgomery, *Ten Lectures on the Interface between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

В. И. Иванов

Тульский государственный университет

E-mail: ivaleryi@mail.ru

Поступило

16.05.2006