Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. О. Бесов, О непрерывности обобщенного оператора
Немыцкого в пространствах дифференцируемых функций,
Матем. заметки, 2002, том 71, выпуск 2, 168–181

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm337>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:03:59

УДК 517.988.5

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ОБОБЩЕННОГО ОПЕРАТОРА НЕМЫЦКОГО В ПРОСТРАНСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

К. О. Бесов

Получены достаточные условия непрерывности общего нелинейного оператора суперпозиции (обобщенного оператора Немыцкого), действующего из пространства $C^m(\bar{\Omega})$ дифференцируемых функций на ограниченной области Ω в лебегово пространство $L_p(\Omega)$. При этом рассматриваются операторы, значения которых на функции $u \in C^m(\bar{\Omega})$ локально определяются значениями как самой функции u , так и всех ее частных производных до порядка m включительно. Показано, что в некоторых частных случаях полученные достаточные условия являются и необходимыми. Применение результатов проиллюстрировано на конкретных примерах и, кроме того, даны приложения к теории пространств Соболева.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, f – функция двух переменных x, u , $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию Каратеодори, т.е. f измерима по x при любом $u \in \mathbb{R}$ и непрерывна по u при почти всех $x \in \Omega$. Оператором Немыцкого называется отображение $\mathbf{f}$, переводящее (измеримую) функцию $u(x)$ в функцию $\mathbf{f}u(x) = f(x, u(x))$, $x \in \Omega$ (которая также будет измеримой в силу условия Каратеодори).

Хорошо известно следующее утверждение, полученное в работах Красносельского и Вайнберга (см., например, [1], [2]).

ТЕОРЕМА А. Пусть оператор $\mathbf{f}$ действует из $L_q(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$, $1 \leq q, p < \infty$ (т.е. для любой $u \in L_q(\Omega)$ ее образ $\mathbf{f}u$ лежит в $L_p(\Omega)$). Тогда оператор $\mathbf{f}$ непрерывен, ограничен (т.е. переводит ограниченные множества в ограниченные) и найдутся функция $a \in L_p(\Omega)$ и константа $b > 0$ такие, что

$$|f(x, u)| \leq a(x) + b|u|^{q/p}, \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Обратно, если при некоторых $a \in L_p(\Omega)$ и $b > 0$ выполнено (1), то оператор $\mathbf{f}$ действует из $L_q(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$, непрерывен и ограничен.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-00045 и № 01-01-06288, программы “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96047, и фонда INTAS, грант № 00-136.

Этот результат без труда переносится на вектор-функции $u = (u_1, \dots, u_m)$ с компонентами $u_j \in L_{q_j}$ и функции $f: \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. В этом случае неравенство (1) переходит в

$$|f(x, u)| \leq a(x) + b \sum_{j=1}^m |u_j|^{q_j/p}, \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

Теорема А была доказана в 1950-х гг. Позднее Шрагин получил необходимые и достаточные условия для действия оператора f из пространства $C(\overline{\Omega})$ непрерывных на замыкании области функций в $L_p(\Omega)$.

ТЕОРЕМА В (см. [3]). Пусть оператор f действует из $C(\overline{\Omega})$ в $L_p(\Omega)$, $p < \infty$. Тогда оператор f равномерно непрерывен на каждом ограниченном множестве функций из $C(\overline{\Omega})$ (в частности, непрерывен и ограничен) и

$$\int_{\Omega} \sup_{|u| \leq K} |f(x, u)|^p dx < \infty \quad \forall K > 0. \quad (2)$$

Обратно, если выполнено (2), то оператор f действует из $C(\overline{\Omega})$ в $L_p(\Omega)$ равномерно непрерывно на каждом ограниченном множестве из $C(\overline{\Omega})$.

Теорема В также остается справедливой для вектор-функций u . С другой стороны, условие (2) может быть переписано в более простом виде, который чаще используется в приложениях:

$$|f(x, u)| \leq a(x)b(u), \quad x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

где $a \in L_p(\Omega)$ и $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Действительно, очевидно, что из (3) вытекает (2). Покажем обратное. Положим $f_k(x) = \sup_{|u| \leq k} |f(x, u)|$ при $k = 1, 2, \dots$; $f_k \in L_p(\Omega)$ в силу (2). Определим

$$a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x)}{2^k \|f_k\|_{L_p}}.$$

Тогда $a \in L_p(\Omega)$ и

$$|f(x, u)| \leq f_{[|u|]+1}(x) \leq 2^{[|u|]+1} \|f_{[|u|]+1}\|_{L_p} a(x) \leq a(x)b(u),$$

где $b(u)$ – произвольная непрерывная мажоранта функции $2^{[|u|]+1} \|f_{[|u|]+1}\|_{L_p}$.

В данной работе нас будет интересовать действие оператора f в более “узких” пространствах $C^m(\overline{\Omega})$, $m \in \mathbb{N}$. Напомним, что по определению функция u принадлежит $C^m(\overline{\Omega})$, если она непрерывна на $\overline{\Omega}$, имеет в Ω все частные производные порядка не выше m и эти производные могут быть непрерывно продолжены на $\overline{\Omega}$. Норма в $C^m(\overline{\Omega})$ определяется как $\|u\|_{C^m} = \|u\|_C + \dots + \|\nabla^m u\|_C$, где $\nabla^m u(x) = \{D^\alpha u(x) \mid |\alpha| = m\}$, $D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / (\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n})$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha_j \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ПРИМЕР 1. Положим $\Omega = (0, 1)$,

$$f(x, u) = \frac{|u|^r}{x^2 + (u^2 - x)^2}.$$

Можно показать, что соответствующий оператор $\mathbf{f}$ действует из C^1 в L_1 при $r > 1$. Если $1 < r < 2$, то $\mathbf{f}$ неограничен (даже на константах); при $r = 2$ он ограничен, но не является непрерывным, и только при $r > 2$ его действие распространяется на все непрерывные функции.

Нас будет интересовать возможность ослабления условия (3) с сохранением свойства непрерывности на $C^m(\overline{\Omega})$. Из недавних публикаций в этом направлении отметим работы Чиаппинелли и Нугари [4] и Зикеля [5]. В первой из них изучаются операторы Немыцкого, действующие из пространства функций, удовлетворяющих условию Гёльдера, в себя (нас же интересует действие из C^m в L_p). Во второй рассмотрен более широкий спектр функциональных пространств, однако исследуются свойства только автономных операторов Немыцкого (т.е. функция f не зависит от x и является функцией одной переменной u). Более полную библиографию можно найти в монографии [6].

Основное отличие настоящей работы от указанных выше состоит в том, что мы рассматриваем операторы $\mathbf{f}$ более общего вида, а именно

$$C^m(\overline{\Omega}) \ni u \rightarrow \mathbf{f}u, \quad \mathbf{f}u(x) = f(x, u(x), \nabla u(x), \dots, \nabla^m u(x)), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

что также обусловлено приложениями. Функция $f(x, \mathcal{U}_m)$ всюду предполагается каратеодориевой, т.е. непрерывной по совокупности переменных $\mathcal{U}_m = \{u_\alpha \mid |\alpha| \leq m\}$ при почти всех x и измеримой по x при всех $\mathcal{U}_m$. В частном случае, когда f не зависит от $\nabla u, \dots, \nabla^m u$, получаем обычный оператор Немыцкого $\mathbf{f}u(x) = f(x, u(x))$.

Мы также расширим область значений оператора $\mathbf{f}$ с $\mathbb{R}$ до $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, наделив последнее множество топологией окружности. Таким образом, если $f(x_0, u_0) = \infty$, то непрерывность по u означает, что $|f(x_0, u)| \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow u_0$. Это расширение не дает ничего нового, если рассматривать оператор $\mathbf{f}$ в пространстве непрерывных функций, однако, как показывает следующий пример, уже для $C^1(\overline{\Omega})$ ситуация будет иной.

ПРИМЕР 2. Положим $\Omega = (0, 1)$, $r, r' > 0$,

$$f(x, u, u') = \frac{1}{|u|^r + |u' - 1|^{r'}}.$$

В этом случае оператор $\mathbf{f}$ действует из C^1 в L_p при $r < 1/p$ и любом r' . Ниже мы покажем (теорема 2), что он непрерывен, но не является ограниченным. При этом верхняя грань, аналогичная той, что фигурирует в (2), обращается в бесконечность в каждой точке x .

Примеры 1 и 2 показывают независимость свойств непрерывности и ограниченности оператора $\mathbf{f}$ на пространствах дифференцируемых функций. Это одно из существенных отличий от действия на непрерывных функциях, поэтому рассчитывать на получение необходимых и достаточных условий, аналогичных (3), здесь уже не приходится. Мы сосредоточим свое внимание на достаточных условиях непрерывности. В п. 2 мы формулируем одно общее достаточное условие непрерывности (теорема 1) и приводим соответствующее доказательство. Однако это условие не всегда можно легко проверить в

конкретной ситуации. Поэтому в п. 3 мы рассматриваем частный случай операторов $\mathbf{f}$, для которых соответствующая функция $f(x, \mathcal{U}_m) \equiv f(\mathcal{U}_m)$ не зависит от x – их можно назвать *автономными*. Полученное нами в этом случае достаточное условие имеет более наглядный вид, чем условие из п. 2 для операторов Немыцкого общего вида. Для пространства C^1 это условие является также необходимым, а при $m \geq 2$ оно, хотя и решает главную задачу – ослабление условия (3), все же достаточно далеко от необходимого. В заключительном пункте в качестве следствия теоремы 1 получено достаточное условие непрерывности для операторов еще одного частного вида, а также рассмотрены приложения к нелинейным дифференциальным уравнениям с частными производными.

2. Достаточные условия непрерывности. Напомним, что область Ω всюду предполагается ограниченной. Для измеримой функции u и $\delta > 0$ положим

$$\omega_p(u, \delta) = \sup_{A \subset \Omega, |A| \leq \delta} \int_A |u|^p,$$

где $|A|$ – лебегова мера (измеримого) множества A . Если $u \in L_p(\Omega)$, то в силу абсолютной непрерывности интеграла $\omega_p(u, \delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что оператор $\mathbf{f}: C^m(\overline{\Omega}) \rightarrow L_p(\Omega)$ *обладает свойством (UC)* на некотором множестве $E \subset C^m(\overline{\Omega})$, если

$$\sup_{u \in E} \omega_p(\mathbf{f}u, \delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (5)$$

Соотношение (5) означает, что образы точек из E под действием оператора $\mathbf{f}$, возведенные в p -ю степень, имеют равномерно абсолютно непрерывные интегралы.

Скажем, что оператор $\mathbf{f}$ *обладает свойством (C)* в точке $u \in C^m(\overline{\Omega})$, если он обладает свойством (UC) в некоторой окрестности этой точки.

Следующий критерий непрерывности оператора $\mathbf{f}$ справедлив не только для пространств C^m , но и для любых функциональных пространств, сходимость в которых влечет сходимость по мере.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Оператор $\mathbf{f}: C^m(\overline{\Omega}) \rightarrow L_p(\Omega)$ непрерывен в точке u_0 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0} \sup_{\|u - u_0\|_{C^m} \leq \varepsilon} \omega_p(\mathbf{f}u, \delta) = 0. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор $\mathbf{f}$ непрерывен в точке u_0 . Имеем

$$\omega_p(\mathbf{f}u, \delta) \leq 2^{p-1}[\omega_p(\mathbf{f}u - \mathbf{f}u_0, \delta) + \omega_p(\mathbf{f}u_0, \delta)] \leq 2^{p-1} \int_{\Omega} |\mathbf{f}u - \mathbf{f}u_0|^p + 2^{p-1} \omega_p(\mathbf{f}u_0, \delta).$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $u \rightarrow u_0$ в силу непрерывности оператора, а второе есть $o(1)$ при $\delta \rightarrow 0$ в силу абсолютной непрерывности интеграла.

Обратно, пусть выполнено (6). Из сходимости $u_n \rightarrow u_0$ в C^m вытекает сходимость по мере. Но тогда, как известно (см., например, [1]), $f u_n$ сходится к $f u_0$ по мере. Для произвольного $\gamma > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f u_n - f u_0|^p &\leq \int_{|f u_n - f u_0| < \gamma} \gamma^p + 2^{p-1} \int_{|f u_n - f u_0| \geq \gamma} [|f u_n|^p + |f u_0|^p] \\ &\leq \gamma^p |\Omega| + 2^p \sup_{\|u - u_0\|_{C^m} \leq \varepsilon_n} \omega(f u, \delta_{\gamma, n}), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\varepsilon_n = \|u_n - u_0\|_{C^m}$ и $\delta_{\gamma, n} = |\{x \in \Omega : |f u_n - f u_0| \geq \gamma\}|$. За счет выбора $\gamma > 0$ первое слагаемое в правой части (7) можно сделать сколь угодно малым. При фиксированном γ и $n \rightarrow \infty$ имеем $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и $\delta_{\gamma, n} \rightarrow 0$. Отсюда в силу (6) получаем $f u_n \rightarrow f u_0$ в $L_p(\Omega)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если оператор f обладает свойством (C) в точке $u_0 \in C^m(\bar{\Omega})$, то он непрерывен в точке u_0 .

Отметим, что обратное утверждение неверно: существуют операторы, непрерывные в каждой точке, но не обладающие свойством (C) в одной или нескольких точках. С другой стороны, оператор может обладать свойством (C) в каждой точке, но не обладать свойством (UC) на шаре – таким будет оператор, рассмотренный нами в примере 2.

Обозначим через $\mathcal{P}_m$ совокупность многочленов степени m , а через

$$\mathcal{P}_m(K) = \{p \in \mathcal{P}_m : \|p\|_{C^m} \leq K\}$$

пересечение $\mathcal{P}_m$ с шаром радиуса K пространства $C^m(\bar{\Omega})$. Для формулировки основного результата – достаточного условия непрерывности оператора f на всем $C^m(\bar{\Omega})$ – нам потребуется несколько сузить класс рассматриваемых областей.

УСЛОВИЕ 1. Каждая функция $u \in C^m(\bar{\Omega})$ может быть некоторым образом продолжена до функции $\tilde{u} \in C^m(\mathbb{R}^n)$. При этом $\|\tilde{u}\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq c_{\Omega} \|u\|_{C^m(\bar{\Omega})}$, где константа c_{Ω} не зависит от u .

Условие 1 выполнено, например, если множество внутренних точек замыкания $\bar{\Omega}$ удовлетворяет сильному условию конуса (см. [7]) или если граница $\partial\bar{\Omega}$ липшицева.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено условие 1. Если оператор f обладает свойством (C) в каждой точке $u \in \mathcal{P}_m$, или, что то же самое, обладает свойством (UC) в некоторой окрестности множества $\mathcal{P}_m(K)$ при любом $K > 0$, то он непрерывен на $C^m(\bar{\Omega})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего поясним эквивалентность предположений теоремы 1. Пусть оператор f обладает свойством (C) в каждой точке $u \in \mathcal{P}_m$. Тогда он обладает свойством (UC) в некоторой окрестности каждой точки $u \in \mathcal{P}_m(K) \subset \mathcal{P}_m$. Объединение всех этих окрестностей образует открытое покрытие компактного множества $\mathcal{P}_m(K)$. Выделим из него конечное подпокрытие и обозначим объединение точек этого подпокрытия через E . Множество E является окрестностью множества $\mathcal{P}_m(K)$, в которой оператор f обладает свойством (UC). В силу компактности E содержит ε -окрестность множества $\mathcal{P}_m(K)$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим произвольную точку $u_0 \in C^m(\bar{\Omega})$ и покажем, что в ней оператор f обладает свойством (C). Тогда утверждение теоремы будет вытекать из следствия 1.

Каждой точке $x \in \bar{\Omega}$ поставим в соответствие многочлен $p_x \in \mathcal{P}_m$, являющийся многочленом Тейлора степени m для u_0 в точке x . Очевидно, p_x непрерывно зависит от $x \in \bar{\Omega}$, а значит, множество $\{p_x : x \in \bar{\Omega}\}$ ограничено в C^m и лежит в $\mathcal{P}_m(K)$ при некотором $K > 0$. Зафиксируем такое K и соответствующее ему ε , о котором шла речь в первом абзаце доказательства.

Каждой точке $x \in \bar{\Omega}$ поставим в соответствие открытую выпуклую окрестность $O_x \ni x$ такую, что $\|\tilde{u}_0 - p_x\|_{C^m(O_x)} \leq \varepsilon N^{-1}$, где $\tilde{u}_0$ – продолжение функции u из класса $C^m(\mathbb{R}^n)$, а N – достаточно большое положительное число, точное значение которого будет указано ниже. Объединение всех O_x образует открытое покрытие компакта $\bar{\Omega}$. Пусть $O_1, \dots, O_l$ – некоторое конечное подпокрытие и $p_1, \dots, p_l$ – соответствующие многочлены.

Рассмотрим произвольную функцию $u \in C^m(\bar{\Omega})$, $\|u - u_0\|_{C^m} \leq \varepsilon N^{-1}$. В силу условия 1 ее можно продолжить до функции $\tilde{u} \in C^m(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы $\|\tilde{u} - \tilde{u}_0\|_{C^m} \leq c_\Omega \varepsilon N^{-1}$ (сначала продолжаем $u - u_0$, а затем к результату прибавляем $\tilde{u}_0$). Пусть u_j – сужение функции $\tilde{u}$ на $\bar{O}_j$, $j = 1, \dots, l$. Тогда

$$\|p_j - u_j\|_{C^m(\bar{O}_j)} \leq c_\Omega \varepsilon N^{-1} + \varepsilon N^{-1} = (c_\Omega + 1)\varepsilon N^{-1}, \quad j = 1, \dots, l. \quad (8)$$

Нам потребуется следующий факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 (см., например, [8]). Пусть $O \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое открытое множество. Каждую функцию $u \in C^m(\bar{O})$, $m \in \mathbb{N}$, можно продолжить до функции $\tilde{u} \in C^m(\mathbb{R}^n)$ так, что $\|\tilde{u}\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq c_1 \|u\|_{C^m(\bar{O})}$, где константа c_1 зависит только от m и n .

Пусть $\tilde{u}_j$ – такое продолжение функции u_j на $\mathbb{R}^n$, что

$$\|p_j - \tilde{u}_j\|_{C^m(\bar{\Omega})} \leq c_1 (c_\Omega + 1)\varepsilon N^{-1}, \quad j = 1, \dots, l.$$

Положим $N = c_1(c_\Omega + 1)$. Тогда каждая из $\tilde{u}_j$ попадает в ε -окрестность множества $\mathcal{P}_m(K)$, откуда

$$\omega_p(f\tilde{u}_j, \delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, l.$$

С другой стороны,

$$\omega_p(fu, \delta) \leq \sum_{j=1}^l \omega_p(f\tilde{u}_j, \delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0,$$

причем это соотношение выполнено равномерно по u из (εN^{-1}) -окрестности функции u_0 .

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 останется верной, если условие 1 на область Ω ослабить до следующего. Для каждой точки $x \in \partial\Omega$ и каждой окрестности O_1 точки x найдется такая окрестность $O_2 \subset O_1$ точки x , что для любой $u \in C^m(\bar{\Omega})$ можно указать функцию $\tilde{u} \in C^m(\bar{\Omega})$ со свойствами: $u \equiv \tilde{u}$ на $O_2 \cap \bar{\Omega}$ и $\|\tilde{u}\|_{C^m(\bar{\Omega})} \leq c \|u\|_{C^m(\bar{O}_1 \cap \bar{\Omega})}$, где c не зависит от u , O_1 и O_2 , но может зависеть от x и Ω .

Это ослабленное условие выполнено для достаточно широкого класса областей. Более того, автору не известно даже, существуют ли области, для которых оно не верно. Если такие области существуют, то вопрос о справедливости для них теоремы 1 остается открытым.

3. Непрерывность “автономных” операторов. В этом пункте мы докажем критерий непрерывности операторов $\mathbf{f}$ в пространстве $C^1(\bar{\Omega})$ в случае, когда функция $f = f(\mathcal{U}_m)$ не зависит от x . В пространстве $C^m(\bar{\Omega})$, $m \geq 2$, удается получить лишь достаточное условие. Примеры показывают, что это условие не является необходимым.

Итак, всюду в этом пункте функция $f = f(\mathcal{U}_m)$ не зависит от x .

Положим

$$g_{j,\varepsilon,K}(u) = \sup\{|f(\mathcal{U}_m)| : |u_\alpha| \leq \varepsilon, 1 \leq |\alpha| < j; |u_\beta| \leq K, j \leq |\beta| \leq m\}, \\ j = 1, \dots, m.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть Ω удовлетворяет условию конуса. Если для любого $K > 0$ найдется такое число $\varepsilon > 0$, что

$$g_{j,\varepsilon,K} \in L_{jp+(j-1)\varepsilon, \text{loc}}(\mathbb{R}), \quad j = 1, \dots, m, \quad (9)$$

и

$$|f(u, 0, \dots, 0)| < \infty, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

то оператор $\mathbf{f}$ непрерывен на $C^m(\bar{\Omega})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 достаточно доказать, что в некоторой окрестности любого многочлена $p_r(x)$ степени $r \leq m$ выполнено свойство (UC). Линейной заменой переменных мы можем свести ситуацию к случаю $\partial^r p_r / \partial x_1^r \neq 0$, который и рассмотрим ниже. При этом мы отдельно проанализируем случаи $r = 0, 1$ и $r \geq 2$.

Если $r = 0$, т.е. $p_0 \equiv \text{const}$, $\nabla p_0 \equiv 0$, то непрерывность оператора $\mathbf{f}$ и справедливость свойства (C) в точке p_0 сразу вытекают из непрерывности функции f и условия (10).

Пусть $r \geq 1$. Прежде всего сведем задачу к одномерной следующим образом. Для простоты будем считать, что $\Omega = [0, 1]^n$. Требуется оценить величину

$$\omega_p(\mathbf{f}u, \delta) = \sup_{A \subset \Omega, |A| \leq \delta} \int_A |\mathbf{f}u|^p \quad (11)$$

для u из некоторой C^m -окрестности многочлена p_r . Для фиксированного множества $A \subset \Omega$ с $|A| \leq \delta$ рассмотрим множество $\tilde{A}$ (определенное, вообще говоря, неоднозначно) такое, что $A \subset \tilde{A}$ и (линейная) мера пересечения $\tilde{A}$ с любой прямой $x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$ есть число, кратное δ . Обозначим это число через $\mu(c_2, \dots, c_n)$. Потребуем также, чтобы $\tilde{A}$ имело наименьшую возможную меру, тогда $|\tilde{A}| \leq |A| + \delta = 2\delta$. Введем величину

$$\tau(\mathbf{f}u, x_2, \dots, x_n) = \sup_{B \subset [0,1], |B| \leq \delta} \int_B |\mathbf{f}u(x_1, x_2, \dots, x_n)|^p dx_1. \quad (12)$$

Имеем

$$\int_A |\mathbf{f}u|^p \leq \int_{\tilde{A}} |\mathbf{f}u|^p \leq \frac{1}{\delta} \int_{[0,1]^{n-1}} \tau(\mathbf{f}u, x_2, \dots, x_n) \mu(x_2, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n \\ \leq 2 \sup_{0 \leq x_2, \dots, x_n \leq 1} \tau(\mathbf{f}u, x_2, \dots, x_n).$$

Таким образом, чтобы получить оценку величины (11), равномерную по u из некоторой окрестности p_r , достаточно получить аналогичную оценку величины (12), равномерную по u и $x_2, \dots, x_n$. Так как $\partial^r p_r / \partial x_1^r \equiv \text{const} \neq 0$ (пусть для определенности эта константа положительна), для u из некоторой окрестности p_r имеем $\partial^r u / \partial x_1^r \geq a > 0$ и $\|u\|_{C^m} \leq K$, где a и K – некоторые числа.

Итак, дальше мы рассматриваем u как функцию одной одномерной переменной (обозначим ее через x) и хотим получить оценку величины

$$\tau(fu) = \sup_{B \subset [0,1], |B| \leq \delta} \int_B |fu(x)|^p dx, \quad (13)$$

равномерную по функциям u таким, что $\partial^r u / \partial x^r \geq a > 0$ и $\|u\|_{C^m} \leq K$. По условию теоремы найдется такое $\varepsilon < a$, что имеет место (9). Зафиксируем его. Так как r -я производная функции u положительна, она имеет не более r участков монотонности. Достаточно рассмотреть случай, когда множество B , по которому идет интегрирование, целиком лежит на одном из таких участков. Тогда в (13) можем выполнить замену переменных $x \rightarrow u(x)$:

$$\tau(fu) = \sup_{B \subset [0,1], |B| \leq \delta} \int_{u(B)} |fu|^p \frac{du}{|u'|}.$$

Представим множество B в виде объединения $B = \bigcup_{j=1}^r B_j$, где

$$B_j = \{x \in (0,1) : |u'(x)| \leq \varepsilon, \dots, |u^{(j-1)}(x)| \leq \varepsilon, |u^{(j)}(x)| > \varepsilon\}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Для B_1 имеем $|u'| > \varepsilon$ и

$$\int_{u(B_1)} |fu|^p \frac{du}{|u'|} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{u(B_1)} g_{1,\varepsilon,K}(u)^p du, \quad (14)$$

причем $u(B_1) \subset [-K, K]$ и $|u(B_1)| \leq K\delta$, так что величина (14) есть $o(1)$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно по u из рассматриваемого множества.

На B_j , $j \geq 2$, применим неравенство Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_{u(B_j)} |fu|^p \frac{du}{|u'|} &\leq \left(\int_{-K}^K g_{j,\varepsilon,K}(u)^{jp+(j-1)\varepsilon} du \right)^{p/(jp+(j-1)\varepsilon)} \\ &\quad \times \left(\int_{u(B_j)} \frac{du}{|u'|^{j/(j-1)-\varepsilon_j}} \right)^{(j-1)/(j-\varepsilon_j(j-1))}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\varepsilon_j > 0$ выбрано из условия

$$\frac{p}{jp+(j-1)\varepsilon} + \frac{j-1}{j-\varepsilon_j(j-1)} = 1.$$

Первый множитель в правой части (15) конечен в силу (9) и не зависит от функции u из рассматриваемого множества. Во втором интеграле выполним обратную замену переменных $u \rightarrow x$:

$$\int_{u(B_j)} |fu|^p \frac{du}{|u'|} \leq c \left(\int_{B_j} \frac{dx}{|u'(x)|^{1/(j-1)-\varepsilon_j}} \right)^{(j-1)/(j-\varepsilon_j(j-1))}. \quad (16)$$

Производная порядка $j - 1$ функции u' на B_j (т.е. функция $u^{(j)}$) по модулю не меньше ε . В силу условия $u^{(r)} > 0$ функция $u^{(j)}$ имеет не более $r - j + 1$ участков знакопостоянства. На каждом из этих участков индукцией по j можно доказать следующее утверждение: найдутся такие многочлены $q_1, \dots, q_s$ степени $j - 1$, где s зависит только от j , что

$$|u'(x)| \geq \min\{|q_1(x)|, \dots, |q_s(x)|\}, \quad q_i(x) = \frac{\varepsilon}{(j-1)!} (x - x_i)^{j-1}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Поэтому интеграл в правой части (16) оценивается как $o(1)$ при $|B_j| \leq \delta \rightarrow 0$ равномерно по u из рассматриваемого множества.

Таким образом, в некоторой окрестности любого многочлена оператор f обладает свойством (UC). Теорема доказана.

Рассмотрим несколько примеров. Прежде всего отметим, что из теоремы 2 вытекает непрерывность оператора из примера 2 при $r < 1/p$ на C^1 . Так что в этом случае теорема 2 дает точный результат. Следующий пример относится к пространству C^2 .

ПРИМЕР 3. Пусть $\Omega = (0, 1)$, $r, r', r'' > 0$,

$$f(x, u, u', u'') = \frac{1}{|u|^r + |u'|^{r'} + |u'' - 1|^{r''}}.$$

В этом случае оператор f непрерывно действует из C^2 в L_p при $r < 1/(2p)$ или $r' < 1/p$ ($r'' > 0$ произвольно). Теорема 2 гарантирует непрерывность лишь при $r < 1/(2p)$.

В оставшейся части этого пункта мы более подробно исследуем случай $m = 1$. В частности, мы докажем критерии ограниченности и непрерывности оператора f на C^1 .

ТЕОРЕМА 3. Оператор $f: C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow L_p(\Omega)$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$|f(\mathcal{U}_1)| < \infty \quad \text{при всех } \mathcal{U}_1 \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что функция f непрерывна, поэтому из условия (17) очевидным образом вытекает ограниченность оператора f .

Предположим, что условие (17) не выполнено, т.е. $f(\mathcal{U}_1^{(0)}) = \infty$ при некотором $\mathcal{U}_1^{(0)}$. Рассмотрим многочлен p_0 первой степени такой, что $\{p_0(0), \nabla p_0(0)\} = \mathcal{U}_1^{(0)}$, и зафиксируем некоторое число $N > 0$. В силу непрерывности f найдется такое $\delta > 0$, что

$$\int_{[0, \delta]^n} |fp_0|^p > N\delta^n. \quad (18)$$

Достаточно рассмотреть случай, когда область Ω – куб со сторонами, параллельными координатным плоскостям. Уменьшим, если нужно, δ (с сохранением условия (18)) настолько, чтобы длина ребер Ω была пропорциональна 2δ . Разобьем Ω на кубы с ребрами длины 2δ и каждый из этих кубов еще на 2^n одинаковых кубов. Из каждых 2^n маленьких кубов, составляющих один большой, выделим по одному так, чтобы выделенные кубы не имели общих (граничных) точек. На каждом из выделенных кубов определим функцию u_δ , имеющую (с точностью до параллельного переноса) тот же график, что и p_0 на $[0, \delta]^n$. Методом Уитни [8] продолжим u_δ с объединения Q выделенных кубов

на всю область Ω , при этом C^1 -норма функции u_δ увеличится не более чем в некоторое фиксированное число раз (не зависящее от δ). Тогда

$$\int_{\Omega} |f u_\delta|^p \geq \int_Q |f u_\delta|^p \geq \frac{|\Omega|}{(2\delta)^n} \int_{[0, \delta]^n} |f p_0|^p > \frac{N|\Omega|}{2^n}.$$

Так как число N может быть выбрано сколь угодно большим и C^1 -нормы функций u_δ равномерно по δ ограничены, получаем неограниченность оператора f .

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает неограниченность оператора, рассмотренного нами в примере 2, при любых значениях параметров r и r' .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $m = 1$. Если оператор f действует из $C^1(\overline{\Omega})$ в $L_p(\Omega)$, то он непрерывен и выполнены условие (9), которое в данном случае принимает вид

$$g_K(u) = \sup\{|f(u_\alpha)| : |u_\alpha| \leq K, |\alpha| = 1\} \in L_{p, \text{loc}}(\mathbb{R}) \quad \forall K > 0, \quad (19)$$

и условие (10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 из условий (19) и (10) вытекает непрерывность оператора f . Поэтому достаточно показать, что если одно из этих условий нарушено, то найдется $u \in C^1(\overline{\Omega})$ такая, что $\|fu\|_{L_p} = \infty$.

Если нарушено условие (10), то $f(u_0, 0, \dots, 0) = \infty$ для некоторого $u_0 \in \mathbb{R}$. Но тогда для постоянной функции $u \equiv \text{const} = u_0$ имеем $fu \equiv \infty$.

Предположим, что условие (10) выполнено, а условие (19) нет. Тогда найдется точка $(u_0, v_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ такая, что

$$\int_{u_0 - \varepsilon}^{u_0 + \varepsilon} \sup_{|v - v_0| < \varepsilon} |f(u, v)|^p du = \infty \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (20)$$

причем $v_0 \neq 0$ в силу (10).

Рассмотрим линейную замену переменных $\tilde{x} = Ax$, где A – невырожденная матрица размера $n \times n$, первый столбец которой совпадает с v_0 . Тогда $(u'_{x_1}, \dots, u'_{x_n}) = (u'_{\tilde{x}_1}, \dots, u'_{\tilde{x}_n})A$ для любой функции $u \in C^1$. Введем новую функцию

$$\tilde{f}(u, v) = f(u + u_0, vA).$$

Функция $\tilde{f}$, очевидно, удовлетворяет условиям (10) и (20) с $u_0 = 0$ и $v_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Если мы докажем теорему для функции $\tilde{f}$, то мы докажем ее и для f , так как операторы Немышского, порожденные f и $\tilde{f}$, совпадают с точностью до замены переменных в $\mathbb{R}^n$ и сдвига на константу в пространстве C^1 .

Далее мы воспользуемся индукцией по числу переменных.

База индукции $n = 1$. Положим

$$\tilde{g}_\varepsilon(u) = \sup_{|v-1| < \varepsilon} |\tilde{f}(u, v)|.$$

Имеем

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \tilde{g}_{\varepsilon}(u)^p du = \infty$$

при всех $\varepsilon > 0$. Пусть для определенности

$$\int_0^{\varepsilon} \tilde{g}_{\varepsilon}(u)^p du = \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (21)$$

(случай $\int_{-\varepsilon}^0 \tilde{g}_{\varepsilon}^p = \infty$ рассматривается аналогично). Без ограничения общности можем считать, что $0 < \tilde{g}_{\varepsilon}(u) < \infty$ при $u \neq 0$.

Пусть $u_j, j = 1, 2, \dots$, — убывающая к нулю последовательность точек интервала $(0, 1)$ такая, что

$$\int_{u_{j+1}}^{u_j} \tilde{g}_{1/j}(u)^p du = 1.$$

В силу (21) эта последовательность содержит бесконечное число членов. Для каждой точки $\xi \in [u_{j+1}, u_j]$, пользуясь непрерывностью $\tilde{f}$, найдем такие окрестность O_{ξ} и число $v_{\xi} \in [1 - 1/j, 1 + 1/j]$, что

$$|\tilde{f}(u, v_{\xi})| \geq \frac{1}{2} \tilde{g}_{1/j}(u), \quad u \in O_{\xi}.$$

Выделим из объединения окрестностей O_{ξ} конечное подпокрытие отрезка $[u_{j+1}, u_j]$, скажем, $O_{j,1}, \dots, O_{j,l}$. Уменьшим каждую из $O_{j,i}$ так, чтобы они не пересекались, но их замыкания все еще покрывали отрезок $[u_{j+1}, u_j]$. На каждом интервале $O_{j,i}$ построим непрерывную функцию $v_j(u)$, которая равна 1 на концах $O_{j,i}$ и

$$\int_{O_{j,i}} |\tilde{f}(u, v_j(u))|^p du \geq \frac{1}{3^p} \int_{O_{j,i}} \tilde{g}_{1/j}(u)^p du, \quad i = 1, \dots, l.$$

Тогда v_j будет непрерывной функцией на всем отрезке $[u_{j+1}, u_j]$, причем $v_j(u_{j+1}) = v_j(u_j) = 1$ и

$$\int_{u_{j+1}}^{u_j} |\tilde{f}(u, v_j(u))|^p du \geq \frac{1}{3^p}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Функции v_j в совокупности образуют непрерывную функцию v на $[0, u_1]$, если дополнительно положить $v(0) = 1$. При этом

$$\int_0^{\varepsilon} |\tilde{f}(u, v(u))|^p du = \infty \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Продолжим v до непрерывной функции на $\mathbb{R}$ и рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение $u' = v(u)$, $u(x_0) = 0$, где $x_0 \in \Omega$. В силу известной теоремы о существовании решения в некоторой окрестности O_{x_0} точки x_0 найдется функция $u(x)$ такая, что $u(x_0) = 0$, $u'(x_0) = v(0) = 1$ и $1/2 \leq u'(x) = v(u(x)) \leq 2$, т.е. u монотонно возрастает и

$$\int_{O_{x_0}} |\tilde{f}(u(x), u'(x))|^p dx = \int_{u(O_{x_0})} |\tilde{f}(u, v(u))|^p \frac{du}{v(u)} \geq \frac{1}{2} \int_{u(O_{x_0})} |\tilde{f}(u, v(u))|^p du = \infty.$$

Продолжая u с O_{x_0} до функции из $C^1(\overline{\Omega})$, завершаем доказательство в случае $n = 1$. Отметим, что функция u может быть выбрана сколь угодно близкой к многочлену $p(x) = x - x_0$.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение верно для функций $n-1$ переменных, т.е. из (20) с $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ вытекает существование такой функции $u(x_1, \dots, x_{n-1})$, что $\|fu\|_{L_p} = \infty$. При этом в (20) $u_0 = 0$, $v_0 = (1, 0, \dots, 0)$ и упомянутая функция u может быть выбрана сколь угодно близко к многочлену $p(x) = x_1 - x_1^{(0)}$, где $x_1^{(0)}$ — первая координата некоторой фиксированной точки $x^{(0)} \in \Omega$.

Достаточно рассмотреть случай, когда область Ω имеет вид куба $(0, 1)^n$.

Положим $\tilde{g}_\varepsilon(u, v_1, \dots, v_{n-1}) = \sup_{|v_n| < \varepsilon} |\tilde{f}(u, v)|$. Тогда к $\tilde{g}_\varepsilon$ применимо предположение индукции и найдется функция u , определенная на $[0, 1]^{n-1}$, такая, что

$$\int_{[0,1]^{n-1}} \tilde{g}_\varepsilon(u, u'_{x_1}, \dots, u'_{x_{n-1}})^p dx_1 \cdots dx_{n-1} = \infty.$$

Рассуждая, как и выше, строим непрерывную функцию $v(x_1, \dots, x_{n-1})$, $|v| < \varepsilon$, для которой

$$\int_{[0,1]^{n-1}} \tilde{f}(u, u'_{x_1}, \dots, u'_{x_{n-1}}, v)^p dx_1 \cdots dx_{n-1} = \infty. \quad (22)$$

Мы можем считать, что функция u задана на стороне $[0, 1]^{n-1} \times \{0\}$ куба Ω . Продолжим ее на $\mathbb{R}^n$ (например, методом Уитни [8]) так, чтобы $u'_{x_n} = v$ при $x_n = 0$, и затем возьмем сужение на параллелепипед $\Omega_\delta = [0, 1]^{n-1} \times [0, \delta]$. Теперь снова продолжим ее на $\Omega_{1/2}$ так, чтобы она имела период 2δ по x_n . Выбирая δ достаточно малым, мы можем сделать сколь угодно большой L_p -норму функции fu на $\Omega_{1/2}$, при этом C^1 -норма функции u будет ограничена константой, не зависящей от δ . Обозначим эту функцию u_1 .

Аналогично строим функции u_j на $\Omega_{1-1/2^j} \setminus \Omega_{1-1/2^{j-1}}$ с условиями $(p(x) = x_1, j = 2, 3, \dots)$

$$\|u_j - p\|_{C^1(\Omega_{1-1/2^j} \setminus \Omega_{1-1/2^{j-1}})} \leq \frac{1}{4^j}, \quad (23)$$

$$\int_{\Omega_{1-1/2^j} \setminus \Omega_{1-1/2^{j-1}}} |fu_j|^p \geq 1.$$

Немного изменив определение функций u_j , можно добиться их гладкой стыковки. Таким образом, опуская детали, получаем искомую C^1 -функцию u на $\overline{\Omega}$:

$$u = u_j \quad \text{на} \quad \Omega_{1-1/2^j} \setminus \Omega_{1-1/2^{j-1}}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\int_{\Omega} |fu|^p = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega_{1-1/2^j} \setminus \Omega_{1-1/2^{j-1}}} |fu_j|^p = \infty.$$

Отметим, что условие (23) гарантирует существование первых производных функции u в точках с $x_n = 1$ и их непрерывность. Теорема доказана.

Из теорем 2, 4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть Ω удовлетворяет условию конуса. Оператор $f: C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow L_p(\Omega)$ непрерывен тогда и только тогда, когда выполнены условия (19) и (10).

Приложения. Используя те же идеи, что и при доказательстве теоремы 2, мы можем получить, например, следующий признак непрерывности оператора f .

ТЕОРЕМА 5. Пусть $x_0 \in \overline{\Omega}$, $M = \#\{\alpha: |\alpha| \leq m\}$,

$$|f(x, \mathcal{U}_m)| \leq a(x)b(\mathcal{U}_m), \quad x \in \Omega, \quad \mathcal{U}_m \in \mathbb{R}^M,$$

где $a \in L_{p, \text{loc}}(\overline{\Omega} \setminus \{x_0\})$ и b — непрерывная конечнозначная функция. Для произвольного многочлена $q(x)$ степени m и $K > 0$ положим

$$g_K(x, q) = \sup\{|f(x, \mathcal{U}_m)|: D^\alpha q(x) - K|x - x_0|^{m-\alpha} < u_\alpha < D^\alpha q(x) + K|x - x_0|^{m-\alpha}, |\alpha| \leq m\}.$$

Если для любого $K > 0$

$$\sup_{\|q\|_{C^m} \leq K} \int_{|x-x_0| < \varepsilon} g_K(x, q)^p dx = o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (24)$$

то оператор $f: C^m(\overline{\Omega}) \rightarrow L_p(\Omega)$ непрерывен.

ПРИМЕР 4. Положим $\Omega = (0, 1)$,

$$f(x, u) = \ln[e^{-1/x} + (u^2 - x)^2].$$

Чтобы показать, что этот оператор со значениями в L_1 непрерывен на пространстве $C^1(\overline{\Omega})$, воспользуемся теоремой 5 с $x_0 = 0$, $a(x) = 1/x$, $b(u) = \max\{1, \ln[1 + (u^2 + 1)^2]\}$. При этом

$$g_K(x, kx + r) \leq 2|\ln|(kx + r + \theta(x)x)^2 - x|| + c, \quad -K \leq \theta(x) \leq K.$$

Нетрудно показать, что верхняя грань в (24) достигается, если $|\theta(x)| \equiv K$ в некоторой окрестности нуля. С учетом этого замечания легко получить доказательство самой оценки (24).

В качестве приложения полученных результатов приведем следующее утверждение о непрерывности операторов Немыцкого на пространствах Соболева $W_p^m(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $m > 0$, $p' = p/(p-1)$, область Ω удовлетворяет условию конуса и имеет место оценка

$$|f(x, \mathcal{U}_m)| \leq C_0(x, \mathcal{U}_{m_0}) + C_1(\mathcal{U}_{m_0}) \sum_{m_0 < |\alpha| \leq m} u_\alpha^{r_\alpha/q},$$

где m_0 — максимальное целое число, строго меньшее $m - n/p$,

$$r_\alpha = \frac{np}{n - (m - |\alpha|)p} \quad \text{при } m - \frac{n}{p} < |\alpha| \leq m,$$

$$r_\alpha - \text{любое положительное число} \quad \text{при } |\alpha| = m - \frac{n}{p},$$

$C_1: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $M = \#\{\alpha: |\alpha| \leq m_0\}$, а C_0 может быть представлено в виде суммы функций (зависящих от тех же переменных, что C_0), каждая из которых удовлетворяет условию одной из теорем 1, 2 или 5 непрерывности на пространстве $C^{m_0}(\overline{\Omega})$.

Тогда оператор Немыцкого f , порожденный функцией f , непрерывно действует из $W_p^m(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из теорем вложения Соболева с учетом теорем А, 1, 2, 5.

Отметим, что аналогичное утверждение справедливо, конечно, и для пространств с дробным показателем гладкости.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [2] Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: Гостехиздат, 1956.
- [3] Шрагин И. В. О непрерывности оператора Немыцкого // Функцион. анализ и его применение. Труды V Всесоюзной конференции по функциональному анализу и его применению. Баку: Изд-во АН АзССР, 1961. P. 272–277.
- [4] Chiappinelli R., Nugari R. The Nemitskii operator in Hölder spaces: some necessary and sufficient conditions // J. London Math. Soc. (2). 1995. V. 51. №2. P. 365–372.
- [5] Sickel W. Composition operators acting on Sobolev spaces of fractional order—a survey on sufficient and necessary conditions // Function Spaces, Differential Operators, and Nonlinear Analysis (Paseky nad Jizerou, 1995). Prague: Prometheus, 1996. P. 159–182.
- [6] Appell J., Zabrejko P. P. Nonlinear Superposition Operators. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
- [7] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
- [8] Whitney H. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1934. V. 36. P. 63–89.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kbesov@mi.ras.ru

Поступило
10.08.2001