Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Горбачев, М. В. Захарова, Об одной экстремальной задаче для периодических функций с малым носителем, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 6, 940–942

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3370>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:58:09

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МАЛЫМ НОСИТЕЛЕМ

Д. В. Горбачев, М. В. Захарова

Пусть $0 < h \leq 1/2$, $K(h)$ – класс непрерывных периодических четных действительных функций $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx)$, для которых $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = 1$, $f(x) \equiv 0$ при $h \leq |x| \leq 1/2$.

Рассматривается экстремальная задача нахождения величины

$$B(h) = \sup_{f \in K(h)} a_0 = \sup_{f \in K(h)} \int_{-h}^h f(x) dx.$$

Эта задача и ее варианты имеют приложения в теории функций, аналитической теории чисел, цифровой обработке сигналов (см. [1]–[3]), в которых важно знать величину $B(h)$ для отдельных значений h . Ранее она была вычислена для $h = 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 2/5$ (см. [3]). Здесь рассматривается случай $h = 1/6$.

Пусть $\Gamma(x)$ – гамма-функция, $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ – бета-функция [4],

$$\gamma(z) = \frac{B(4/3, 4/3)}{B((4-z)/3, (4+z)/3)} = \frac{\Gamma^2(4/3)}{\Gamma((4-z)/3)\Gamma((4+z)/3)}, \quad \gamma(0) = 1. \quad (1)$$

Из равенства [4]

$$\int_0^{\pi/2} \cos^a t \cos(bt) dt = \frac{\pi}{2^{a+1}} \frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(1+(a+b)/2)\Gamma(1+(a-b)/2)},$$

следует, что

$$\gamma(z) = A \int_{-1/6}^{1/6} \cos^{2/3}(3\pi x) \cos(2\pi zx) dx, \quad A = 5 \cdot 2^{2/3} B\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) > 0. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА. Для $h = 1/6$

$$B\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2 + (20/3)B(4/3, 4/3)} = 0.1807247 \dots$$

Экстремальная функция имеет вид

$$f^*(x) = AB \cos^{2/3}(3\pi x), \quad |x| \leq \frac{1}{6}, \quad a_0^* = B, \quad a_n^* = 2B\gamma(n), \quad B = B\left(\frac{1}{6}\right). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in K(1/6)$. Оценим коэффициент a_0 сверху.

Из определения класса K имеем

$$I_1 = 0 = -\frac{4}{3}f\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n)a_n, \quad (4)$$

$$\alpha(n) = -\frac{4 \cos(\pi n/3)}{3} + \frac{\cos(\pi n)}{3} = \begin{cases} -1, & n = 0, 1, 5, 6, \\ 1, & n = 2, 3, 4, \end{cases} \quad \alpha(n+6) = \alpha(n).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 05-01-39005 и № 06-01-00372.

Пусть

$$\beta(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z(1-z^2)\gamma(z)}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Установим некоторые свойства функций β и γ . Из представления (2) следует, что функция γ является четной целой функцией экспоненциального типа $2\pi/6 = \pi/3$, а из (1) и свойств гамма-функции [4] для нее получаем бесконечное произведение

$$\gamma(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(3k+1)^2}\right) = \prod_{i \in I} \left(1 - \frac{z^2}{i^2}\right), \quad I = \{4, 7, \dots, 3i+1, \dots\}. \quad (6)$$

Отсюда и из (5) получаем, что функция β является четной целой функцией экспоненциального типа $\pi - \pi/3 = 2\pi/3$ с бесконечным произведением

$$\beta(z) = \frac{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - z^2/k^2)}{(1 - z^2) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z^2/(3k+1)^2)} = \prod_{i \in I'} \left(1 - \frac{z^2}{i^2}\right), \quad (7)$$

$$I' = \{2, 3, \dots, k, \dots\} \setminus I = \{2, 3, 5, 6, \dots, 3i+2, 3i+3, \dots\}.$$

При больших $z > 0$ [4]

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b} \left(1 + \frac{1}{2z}(a-b)(a+b-1) + O(z^{-2})\right).$$

Отсюда и из тождества $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$ получаем, что при больших $z > 0$

$$\beta(z) = \frac{z^{2/3} \sin \pi z}{3^{5/3} \Gamma^2(4/3)(z^2-1) \sin \pi((z-4)/3)} (1 + O(z^{-2})) = O(z^{-4/3}), \quad \gamma(z) = O(z^{-5/3}).$$

Таким образом, $\beta \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. Отсюда и по теореме Пэли-Винера имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \beta(z) e^{-2\pi i z x} dz = \int_{\mathbb{R}} \beta(z) \cos(2\pi z x) dz \in C(\mathbb{R}), \\ \widehat{\beta}(x) &\equiv 0, \quad |x| \geq \frac{1}{3}, \quad \beta(z) = 2 \int_{-1/3}^{1/3} \widehat{\beta}(x) \cos(2\pi z x) dx. \end{aligned} \quad (8)$$

При $z > 0$ из (1) и (5) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\beta(z)}{\beta(z+3)} &= \frac{(z+2)(z+3)(z+4)\gamma(z+3)}{z(1-z)(z+1)\gamma(z)} = \frac{(z+2)(z+3)(z+4)(1-z)}{z(1-z)(z+1)(z+4)} \\ &= \frac{(z+2)(z+3)}{z(z+1)} > 1, \end{aligned}$$

т.е. $\beta(z) > \beta(z+3)$. Отсюда и из (7) получаем цепочку неравенств

$$\beta(1) > \beta(4) > \beta(7) > \dots > \beta(3i+1) > \dots > 0. \quad (9)$$

Необходимые свойства функций β и γ установлены. Продолжим оценку a_0 . Из (8) и определения класса $K(1/6)$ следует, что

$$\begin{aligned} I_2 &= 2b \int_0^{1/2} f(x) \widehat{\beta}\left(x - \frac{1}{2}\right) dx = 2b \left(\int_0^{1/6} + \int_{1/6}^{1/2} \right) = 0, \\ b &= -\frac{2}{\beta(1)} = -\frac{1}{\gamma(1)} = -\frac{20B(4/3, 4/3)}{3} < 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя сюда разложение функции f и учитывая (8), получаем, что

$$\begin{aligned} 0 = I_2 &= 2b \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{1/2} \widehat{\beta}\left(x - \frac{1}{2}\right) \cos(2\pi nx) dx \\ &= b \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\pi n) \int_{-1/2}^{1/2} \widehat{\beta}(x) \cos(2\pi nx) dx = b \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \beta(n). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (4), (10) и (11) находим, что

$$0 = I_1 + I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega(n), \quad \omega(n) = \alpha(n) + (-1)^n b \beta(n) = \alpha(n) - \frac{2(-1)^n \beta(n)}{\beta(1)}. \quad (12)$$

Покажем, что

$$|\omega(n)| \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

В силу (6) и (7) имеем $\mathbb{N} = \{1\} \cup I \cup I'$. Из (4) и (12) $\omega(1) = 1$. При $n \in I'$ в силу (7) и (4) $|\omega(n)| = |\alpha(n)| = 1$. Пусть $n = 3i + 1 \in I$, где $i \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая (4), получаем, что

$$\omega(n) = \alpha(3i + 1) + \frac{2(-1)^i \beta(3i + 1)}{\beta(1)} = \begin{cases} -1 + \frac{2\beta(3i + 1)}{\beta(1)}, & i \text{ четное,} \\ 1 - \frac{2\beta(3i + 1)}{\beta(1)}, & i \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Отсюда и из (9) следует, что $|\omega(n)| \leq 1$ для $n \in I$. Неравенство (13) установлено.

Вернемся к оценке a_0 . Из (12), свойств класса $K(1/6)$ и (10) находим

$$\begin{aligned} a_0 \omega(0) &= - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega(n), \quad |a_0 \omega(0)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1 - |a_0|, \\ \omega(0) &= \alpha(0) + b \beta(0) = -1 - \frac{20}{3} B\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) < 0, \\ a_0 \leq |a_0| &\leq \frac{1}{1 + |\omega(0)|} = \left(2 + \frac{20}{3} B\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)\right)^{-1} = B. \end{aligned} \quad (14)$$

Эта оценка правильная и достигается на функции $f^* \in K(1/6)$ из (3). Для нее выполняется равенство (12) и в силу (3), (4), (6), (7), (12), (14)

$$|a_n^*| = a_n^* \omega(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_0^* \omega(0) = - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^*|, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^*| = 1, \quad a_0^* = B.$$

Теорема доказана.

Постановка задачи и предположение о виде экстремальной функции принадлежит Д. В. Горбачеву; М. В. Захаровой выполнено строгое доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] S. Konyagin, I. Shparlinski, *Character Sums with Exponential Functions and their Applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999. [2] Н. Н. Андреев, С. В. Конягин, А. Ю. Попов, *Матем. заметки*, **60:3** (1996), 323–332. [3] Д. В. Горбачев, *Избранные задачи теории функций и теории приближений и их приложения*, Изд-во ТулГУ, Тула, 2004. [4] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, **1**, Наука, М., 1965.

Д. В. Горбачев, М. В. Захарова

Тульский государственный университет

E-mail: dvq@uic.tula.ru

Поступило

16.05.2006