Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Малыхин, Локальная энтропия в теории обучения, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 6, 946–949

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3372>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 06:42:45

ЛОКАЛЬНАЯ ЭНТРОПИЯ В ТЕОРИИ ОБУЧЕНИЯ

Ю. В. Малыхин

1. Обозначения. Если $F(\varepsilon)$ и $G(\varepsilon)$ – функции, определенные при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, то будем писать $F(\varepsilon) \sim G(\varepsilon)$, когда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{F(\varepsilon)}{G(\varepsilon)} = 1,$$

и $F(\varepsilon) \asymp G(\varepsilon)$, когда $F(\varepsilon) \leq aG(\varepsilon)$ и $G(\varepsilon) \leq bF(\varepsilon)$ для некоторых $a, b > 0$. Через $\log$ обозначается логарифм по основанию 2.

2. Постановка задачи теории обучения. Пусть ρ – неизвестная нам вероятностная мера на $X \times Y$. Задача состоит в том, чтобы по выборке $z = z^{(m)} = ((x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m))$, состоящей из независимых величин, распределенных по мере ρ , аппроксимировать функцию регрессии

$$f_\rho(x) = \int_Y y d\rho(y|x).$$

Здесь $\rho(y|x)$ – условная мера. Функция регрессии минимизирует величину ошибки

$$\mathcal{E}(f) = \int_{X \times Y} (f(x) - y)^2 d\rho$$

по всевозможным f – это следует из равенства $\mathcal{E}(f) - \mathcal{E}(f_\rho) = \|f - f_\rho\|_{L_2(\rho_X)}^2$ (мера ρ_X есть проекция меры ρ на X , т.е. $\rho_X(S) := \rho(S \times Y)$). Таким образом, f_ρ наилучшим образом выражает зависимость y от x . В данной статье рассматривается следующая ситуация. Во-первых, нам известно распределение величины X , т.е. маргинальная мера ρ_X . Во-вторых, нам известно, что f_ρ принадлежит фиксированному классу Θ . В-третьих, функцию регрессии мы будем приближать по норме пространства $L_2(\rho_X)$.

Теперь дадим формальное описание задачи. Пусть $X = \mathbb{R}^d$, $Y = [-M, M]$, $Z = X \times Y$. Назовем *оценщиком* произвольное отображение $E_m: z \mapsto f_z$, которое по выборке $z = z^{(m)} \in Z^m$ строит борелевскую функцию $f_z: X \rightarrow Y$. Пусть $\mathcal{M}$ – некоторый класс борелевских вероятностных мер на Z . В [1] определяется доверительная функция

$$AC_m(\mathcal{M}, \eta) = \inf_{E_m} \sup_{\rho \in \mathcal{M}} \rho^m \{z : \|f_\rho - f_z\|_{L_2(\rho_X)} \geq \eta\}.$$

Поскольку, вообще говоря, множество $\{z : \|f_\rho - f_z\| \geq \eta\}$ может оказаться неизмеримым относительно меры ρ^m , под вероятностью понимается внешняя вероятность. Далее, пусть фиксирована борелевская вероятностная мера μ на X и задано некоторое множество Θ борелевских функций из X в Y . Обозначим через $\mathcal{M}(\Theta, \mu)$ класс тех мер ρ , для которых $\rho_X = \mu$ и $f_\rho \in \Theta$. Таким образом, наша задача состоит в исследовании функции $AC_m(\mathcal{M}(\Theta, \mu), \eta)$.

3. Некоторые определения. Понятно, что чем “массивнее” класс Θ , тем больше будет погрешность оценщиков. Чтобы сформулировать эту зависимость точно, напомним некоторые определения.

Пусть (S, τ) – метрическое пространство, $A \subset S$. Число элементов в минимальной ε -сети для A в S обозначим через $N_\varepsilon(A, S)$. Двоичный логарифм этого числа обозначается через $\mathcal{H}_\varepsilon(A, S)$ и называется ε -энтропией A в S . Энтропийным *поперечником* множества A в S называется величина

$$\varepsilon_n(A, S) := \inf\{\varepsilon > 0 : \mathcal{H}_\varepsilon(A, S) \leq n\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00066, и Программы поддержки ведущих научных школ, грант № НШ-3004.2003.1.

Через P_ε мы обозначим размер максимальной ε -упаковки в A , т.е.

$$P_\varepsilon(A) = P_\varepsilon(A, S) := \sup\{n : \exists x_1, \dots, x_n \in A \quad \tau(x_i, x_j) \geq \varepsilon\}.$$

Разумеется, P_ε не зависит от объемлющего пространства; иногда S будет служить для указания метрики на A .

Кроме этого, нам понадобится немного другой вид энтропии: “локальная” энтропия. Зафиксируем число $c > 1$. Определим *локальное упаковочное число* множества A как

$$\bar{P}_\varepsilon(c, A) = \bar{P}_\varepsilon(c, A, S) := \sup\{n : \exists x_1, \dots, x_n \in A \quad \varepsilon \leq \tau(x_i, x_j) \leq c\varepsilon\}. \quad (1)$$

Данное определение взято из [1]. Впрочем, подобный вид энтропии использовался ранее, см. [2].

4. Предварительные сведения. Пусть мы находимся в ситуации, описанной в п. 2. Будем предполагать, что Θ – компакт в $L_2(\mu)$, так что все энтропийные характеристики Θ конечны. Обозначим

$$\bar{P}(\varepsilon) := \bar{P}_\varepsilon(c, \Theta, L_2(\mu)).$$

В работе [1] дана нижняя оценка доверительной функции через локальную энтропию. Прежде чем сформулировать теорему, проведем одно построение. Пусть $Y = [-1, 1]$. Рассмотрим набор функций $\{f_i\}_{i=1}^{\bar{P}(\eta)}$, взятый из определения (1). Каждой f_i можно сопоставить меру ρ_i :

$$d\rho_i(x, y) = \left(\frac{1 + f_i(x)}{2} d\delta_1(y) + \frac{1 - f_i(x)}{2} d\delta_{-1}(y) \right) d\mu(x),$$

где $d\delta_\xi$ есть дираковская мера единичной массы в ξ . Заметим, что так определенные меры лежат в $\mathcal{M}(\Theta, \mu)$, ибо $(\rho_i)_X = \mu$ и $f_{\rho_i} = f_i$.

ТЕОРЕМА [1; теорема 3.1]. Пусть $Y = [-1, 1]$. Предположим, что при некотором $\eta > 0$ функции $\{f_i\}$, $i = 1, \dots, \bar{P}(2\eta)$, из (1) удовлетворяют условию $\|f_i\|_{C(X)} \leq 1/4$. Тогда для любого оценщика f_z найдется $i \in \{1, \dots, \bar{P}(2\eta)\}$ такой, что

$$\rho_i\{z : \|f_z - f_i\|_{L_2(\mu)} \geq \eta\} \geq \min\left(\frac{1}{2}, (\bar{P}(2\eta) - 1)^{1/2} e^{-8c^2 m \eta^2 - 3/e}\right), \quad m = 1, 2, \dots$$

Верхние же оценки для доверительной функции проводились в терминах обычной энтропии. Наиболее точная теорема содержится в работе [3].

ТЕОРЕМА [3; теорема 1.3]. Предположим, что Θ удовлетворяет условиям

$$\varepsilon_n(\Theta, L_2(\mu)) \leq Dn^{-r}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \|f\|_{L_2(\mu)} \leq D \quad \forall f \in \Theta.$$

Тогда существует оценщик f_z такой, что для любой меры $\rho \in \mathcal{M}(\Theta, \mu)$, любого $\eta \geq \varepsilon_0 = C(M, D, r)m^{-r/(1+2r)}$ и $m \geq 240(M/D)^2$ выполняется неравенство

$$\rho^m\{z : \|f_z - f_\rho\|_{L_2(\mu)} \geq \eta\} \leq \exp\left(-\frac{m\eta^2}{800M^2}\right).$$

Оценщик f_z в этой теореме строится следующим образом. Рассматривается минимальная $(\varepsilon_0/49)$ -сеть $\mathcal{N}$ в $L_2(\mu)$ для множества Θ . Далее полагается

$$f_z := \arg \min_{f \in \mathcal{N}} \mathcal{E}_z(f), \quad \text{где} \quad \mathcal{E}_z(f) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (f(x_i) - y_i)^2.$$

Фактически, в [3] доказывается следующее утверждение, которое мы будем использовать в дальнейшем.

ЛЕММА. Пусть $\mathcal{N}$ – некоторый набор функций $X \rightarrow Y$, $\#\mathcal{N} = N$. Пусть

$$\min_{f \in \mathcal{N}} \|f - f_\rho\|_{L_2(\rho_X)} \leq \frac{\eta}{2}.$$

Тогда для оценщика $f_z = \arg \min_{f \in \mathcal{N}} \mathcal{E}_z(f)$ выполняется неравенство

$$\rho^m \{z : \|f_z - f_\rho\|_{L_2(\rho_X)} \geq \eta\} \leq (N+1) \exp\left(-\frac{m\eta^2}{640M^2}\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если минимум $\mathcal{E}_z(f)$ достигается сразу на нескольких функциях f , то мы берем произвольную из них. Таким образом, лемма утверждает, что соответствующее неравенство выполнено для любой функции, минимизирующей $\mathcal{E}_z(f)$.

5. Основные результаты. В данной работе получены оценки сверху для доверительной функции через локальную энтропию.

Пусть $c = 20$. Таким образом, $\bar{P}(\eta) := \bar{P}_\eta(20, \Theta, L_2(\mu))$. Под $\|\cdot\|$ в данной теореме будем понимать норму пространства $L_2(\mu)$.

ТЕОРЕМА. Пусть

$$\bar{P}(\eta) \leq \varphi(\eta) \quad \forall \eta > 0,$$

причем φ не возрастает. Существует оценщик f_z такой, что для любой меры $\rho \in \mathcal{M}(\Theta, \mu)$ и любого $\eta > 0$ выполняется неравенство

$$\rho^m \{z : \|f_z - f_\rho\| > \eta\} \leq c_1 \varphi\left(\frac{\eta}{16}\right) \exp(-c_2 m \eta^2), \quad (2)$$

где $c_i = c_i(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\eta_0 = M$ и $\eta_j = 2^{-j} \eta_0$. Выберем минимальный номер k так, что $m\eta_k^2 \leq 1$. Пусть A_j – максимальные $(\eta_j/2)$ -упаковки в Θ . Обозначим $\bar{A}_j := A_j \cap B(f_\rho, 5\eta_j)$, где $B(x, R)$ – замкнутый шар радиуса R с центром в x . Заметим, что для любых различных $f, g \in \bar{A}_j$ будет выполнена оценка $\eta_j/2 \leq \|f - g\| \leq 10\eta_j$, откуда $\#\bar{A}_j \leq \bar{P}(\eta_j/2)$.

Пусть Λ_j – множество тех z , для которых минимум $\mathcal{E}_z$ на множестве $\bar{A}_j$ достигается внутри шара $B(f_\rho, \eta_j)$. Применяя лемму (роль η играет η_j , роль $\mathcal{N}$ – $\bar{A}_j$), получаем

$$\rho^m(\Lambda_j) \geq 1 - \left(\bar{P}\left(\frac{\eta_j}{2}\right) + 1\right) \exp\left(-\frac{m\eta_j^2}{640M^2}\right).$$

Теперь построим оценщик. Положим $f_z^{(0)} := \arg \min\{\mathcal{E}_z(f) : f \in A_0\}$. Далее строим оценщики $f_z^{(s)}$ по индукции по формуле

$$f_z^{(s+1)} := \arg \min\{\mathcal{E}_z(f) : f \in A_{s+1} \cap B(f_z^{(s)}, 3\eta_{s+1})\}. \quad (3)$$

В качестве окончательного оценщика f_z возьмем $f_z^{(k)}$.

Докажем по индукции, что при $z \in \Lambda^{(s)} := \bigcap_{j=0}^s \Lambda_j$ выполняется неравенство $\|f_z^{(s)} - f_\rho\| \leq \eta_s$. Действительно, для $s = 0$ это следует из $z \in \Lambda_0$. Пусть неравенство выполнено для s ; докажем его для $s+1$. Из условия $\|f_z^{(s)} - f_\rho\| \leq \eta_s = 2\eta_{s+1}$ следует, что

$$B(f_\rho, \eta_{s+1}) \subset B(f_z^{(s)}, 3\eta_{s+1}) \subset B(f_\rho, 5\eta_{s+1}).$$

Поскольку $z \in \Lambda_{s+1}$, минимум $\mathcal{E}_z$ на множестве $\bar{A}_{s+1} = A_{s+1} \cap B(f_\rho, 5\eta_{s+1})$ достигается внутри шара $B(f_\rho, \eta_{s+1})$. Значит, этот минимум будет достигаться как раз на $f_z^{(s+1)}$. Отсюда $f_z^{(s+1)} \in B(f_\rho, \eta_{s+1})$, что и требовалось доказать.

Возьмем теперь $\eta > 0$. При $\eta < 4\eta_k$ неравенство (2) очевидно. Пусть $\eta \geq 4\eta_k$. Рассмотрим номер s такой, что $\eta/8 < \eta_s \leq \eta/4$. Тогда если $z \in \Lambda^{(s)}$, то из (3) получаем

$$\|f_z - f_\rho\| \leq \|f_z^{(s)} - f_\rho\| + \|f_z^{(s)} - f_z^{(k)}\| \leq \eta_s + 3\eta_s \leq \eta.$$

Оценим $\rho^m(\Lambda^{(s)})$, обозначив для краткости $c_0 = 1/(640M^2)$:

$$\begin{aligned} 1 - \rho^m(\Lambda^{(s)}) &\leq \left(\overline{P}\left(\frac{\eta_s}{2}\right) + 1 \right) \exp(-c_0 m \eta_s^2) + (\overline{P}(\eta_s) + 1) \exp(-c_0 m (2\eta_s)^2) + \dots \\ &\leq 2\varphi\left(\frac{\eta}{16}\right) \exp(-c_2 m \eta^2) + 2\varphi\left(\frac{\eta}{8}\right) \exp(-2c_2 m \eta^2) + \dots \\ &\leq 2\varphi\left(\frac{\eta}{16}\right) \exp(-c_2 m \eta^2) (1 + \exp(-c_2 m \eta^2) + \exp(-2c_2 m \eta^2) + \dots). \end{aligned}$$

Остается заметить, что при $\eta \geq 4\eta_k$ последний сомножитель ограничен.

6. Некоторые примеры. Для многих классов локальное упаковочное число можно оценить снизу через обычное упаковочное число. В качестве примера приведем лемму из [4].

ЛЕММА [4; лемма 2.1]. Пусть Θ – компакт в банаховом пространстве B . Предположим, что имеют место оценки

$$C_1 \varphi(\varepsilon) \leq \log P_\varepsilon(\Theta) \leq C_2 \varphi(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_1],$$

с функцией $\varphi(\varepsilon)$, удовлетворяющей следующему условию: для любого $\gamma > 0$ существует A_γ такое, что для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\varphi(A_\gamma \varepsilon) \leq \gamma \varphi(\varepsilon)$. Тогда существуют $c_1 \geq 1$ и $\varepsilon_2 > 0$ такие, что

$$\log \overline{P}_\varepsilon(c_1, \Theta) \geq C_3 \log P_\varepsilon(\Theta), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_2].$$

Приведем два примера множеств, для которых величина $\overline{P}_\varepsilon$ существенно меньше P_ε .

Первый пример – шар в конечномерном пространстве. Для него $\overline{P}_\varepsilon$ ограничено, в то время как P_ε стремится к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Второй пример. Зафиксируем число $h > 0$. Пусть A_h – множество функций $f(z)$, аналитических в полосе $|\operatorname{Im} z| < h$ и периодических с периодом 2π , для которых при любом $u \in (-h, h)$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t + iu)|^2 dt \leq 1.$$

Данное множество рассмотрим в метрике $L_2[0, 2\pi]$, где

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

(Допуская некоторую вольность, можно считать A подмножеством $L_2[0, 2\pi]$.)

Известно, что

$$\log P_\varepsilon(A_h, L_2[0, 2\pi]) \sim \frac{2(\log(1/\varepsilon))^2}{h \log e}.$$

Можно показать, что при фиксированном $c > 1$ верна слабая асимптотика

$$\log \overline{P}_\varepsilon(c, A_h, L_2[0, 2\pi]) \asymp \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. DeVore, G. Kerkycharian, D. Picard, V. Temlyakov, *Mathematical methods for supervised learning*, IMI Preprints, **22**, 2004. [2] Y. Yang, A. Barron, *Ann. of Statist.*, **27:5** (1999), 1564–1599. [3] V. Temlyakov, *Approximation in learning theory*, IMI Preprints, **5**, 2005. [4] V. Temlyakov, *Optimal estimators in learning theory*, IMI Preprints, **23**, 2004.

Ю. В. Малыхин

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

23.03.2006

Исправленный вариант

11.04.2006