Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Скалыга, Условия точности в многомерных анало-
гах неравенства В. А. Маркова, *Матем. заметки*, 2006,
том 80, выпуск 6, 950–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3373>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:46:16

УСЛОВИЯ ТОЧНОСТИ В МНОГОМЕРНЫХ АНАЛОГАХ НЕРАВЕНСТВА В. А. МАРКОВА

В. И. Скалыга

Введение. Пусть X – нормированное векторное пространство над $\mathbb{R}$. Через $\mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$ обозначим пространство всех полиномов степени не выше n , отображающих X в $\mathbb{R}$, т.е. множество всех функционалов вида

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n u_j(x, \dots, x), \quad x \in X,$$

где $u_j: X^j \rightarrow \mathbb{R}$ – j -линейный непрерывный функционал. Значение k -й производной Фреше полинома P_n в точке x на кортеже векторов $(h_1, \dots, h_k)$ будем обозначать как $P_n^{(k)}(x)[h_1, \dots, h_k]$. Если $h_1 = \dots = h_s = h$, то

$$P_n^{(k)}(x)[h_1, \dots, h_k] = P_n^{(k)}(x)[h^s, h_{s+1}, \dots, h_k].$$

Пусть $\mathcal{L}^k = \mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})$ пространство ограниченных симметричных k -линейных функционалов на X^k и

$$\|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k} = \sup_{\|h_i\|=1, 1 \leq i \leq k} |P_n^{(k)}(x)[h_1, \dots, h_k]|.$$

В настоящей работе K – выпуклое ограниченное замкнутое тело, симметричное относительно θ_X – нуля пространства X , $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Для ограниченного множества $G \subset X$ положим

$$\|P_n\|_G = \sup_{x \in G} |P_n(x)|, \quad \|P_n^{(k)}\|_G = \sup_{x \in G} \|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k}.$$

Мы будем использовать следующие характеристики тела K :

- $\rho(\cdot)$ – функция Минковского для тела K , $r_h = \|h\|/\rho(h)$, $r(K) = \inf_{\|h\|=1} r_h$;
- $\rho_1(x, k) = \max\{\rho(x), \cos(\{k\}_2\pi/(2n))\}$, где $\{k\}_2$ – остаток от деления k на 2.

В работе [1] автором получены следующие неравенства для $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$ и $\|P_n\|_K \leq 1$:

$$|P_n^{(k)}(x)[h^k]| \leq \frac{T_n^{(k)}(1)}{r_h^k}, \quad x \in K \subset X, \quad (1)$$

$$|P_n^{(k+s)}(x)[h^k, \bar{x}^s]| \leq \frac{T_n^{(k+s)}(\rho(x))}{r_h^k r_{\bar{x}}^s}, \quad \rho(x) \geq 1, \quad (2)$$

$$|P_n^{(k)}(x)[h_1, \dots, h_k]| \leq \frac{c_k T_n^{(k)}(\rho_1(x, 2))}{r^k(K)}, \quad (3)$$

где $T_n(\cdot)$ – полином Чебышева, $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$, $|t| \leq 1$, $\|h\| = \|h_i\| = 1$, $i = 1, \dots, k$, $\bar{x} = x/\|x\|$, $1 \leq c_k \leq k^k/k!$ и, если X – предгильбертово пространство, то $c_k = 1$. В настоящей работе будут установлены необходимые и достаточные условия для выполнения

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00275.

равенства в (1), (2) и выполнения равенства в (3) для m -мерного евклидова пространства E^m . Если $X = \mathbb{R}$, то неравенство (1) является известным [2] неравенством Маркова. Для $X = \mathbb{R}$ Шеффер и Даффин [3] получили при $\|P_n\|_{[-1,1]} \leq 1$ оценку

$$|P_n^{(k)}(t)| \leq N_{n,k}(t) = \begin{cases} M_{n,k}(t) = |T_n^{(k)}(t) + iS_n^{(k)}(t)|, & |t| \leq \xi_1^{(k)}, \\ |T_n^{(k)}(t)|, & |t| \geq \xi_1^{(k)}, \end{cases} \quad (4)$$

где $S_n(t) = \sin(n \arccos t) = n^{-1}(1-t^2)^{1/2}T_n'(t)$, $\xi_1^{(k)}$ – максимальный нуль функции $S_n^{(k)}(\cdot)$ на $[-1, 1]$, $i^2 = -1$. Функция $N_{n,k}(\cdot)$ возрастает на $[0, \infty]$. Равенство в (4) достигается только на полиномах $\pm T_n(\cdot)$ в $n-k+1$ нулях функции $S_n^{(k)}(\cdot)$ и при $|t| \geq \xi_1^{(k)}$.

В [4] и [5] автором получены представление для $M_{n,k}^2(t)$

$$M_{n,k}^2(t) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j^{(k)}(n)(1-t^2)^{-(k+j)}, \quad a_j^{(k)}(n) > 0, \quad j = 0, \dots, k-1, \quad (5)$$

и рекуррентные формулы (по k) для вычисления $a_j^{(k)}(n)$. В работе [6] доказано равенство

$$a_j^{(k)}(n) = n^2 C_{k-1+j}^{2j} \prod_{i=1}^j (2i-1)^2 \prod_{\alpha=j+1}^{k-1} (n^2 - \alpha^2). \quad (6)$$

В работах автора [4] и [5] для $K \subset X$, $\|P_n\|_K \leq 1$ установлено неравенство

$$|P_n^{(k+s)}(x)[h_1, \dots, h_k, \bar{x}^s]| \leq \frac{\alpha_k N_{n,k+s}(\rho(x))}{r_{h_1} \cdots r_{h_k} r_{\bar{x}}^s}, \quad (7)$$

где $\alpha_k = k^{k/2}$, $\|h_i\| = 1$, $i = 1, \dots, k$. Если $k = 1$ и $\rho(x)$ является нулем функции $S_n^{(1+s)}(\cdot)$ либо $\rho(x) \geq \xi_1^{(1+s)}$, то существуют P_n и h_1 , для которых в (7) имеет место равенство. При $k = 1$ и $s = 0$ оценку (7) установил Сарантопулос [7]. Для $K = B \subset E^m$, $k = 1$, $s = 0$ неравенство (7) доказал Келлог [8]. Если K – тело из E^m , ограниченное эллипсоидом и $h_1 = \dots = h_k = h$, то $\alpha_k = 1$ [4], [5]. Позднее для евклидова шара это получили Муньос и Сарантопулос [6].

Формулировки результатов. Пусть $x, h \in X$, $K \subset X$, $\|h\| = 1$, $y \in \text{span}\{h, x\}$ и $y = t_1 r_x \bar{x} + t_2 r_h h$, $A_0 = \{y : |t_1| + |t_2| \leq 1\}$, $A_1 = \{y : |t_1 + t_2| \leq 1\}$, $A_2 = \{y : |t_1 - t_2| \leq 1\}$, $K_{xh} = K \cap \text{span}\{h, x\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $K \subset X$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$ и $\|P_n\|_K \leq 1$, $\|h\| = 1$, $0 < k < n$, $0 \leq s \leq n - k$, $h \neq \lambda x$. Справедливы следующие неравенства:

$$|P_n^{(k)}(x)[h^k]| < \frac{T_n^{(k)}(\rho_1(x, k))}{r_h^k}, \quad \rho(x) < \rho_1(x, k), \quad (8)$$

$$|P_n^{(k+s)}(x)[h^k, \bar{x}^s]| \leq \frac{T_n^{(k+s)}(\rho_1(x, k))}{r_h^k r_{\bar{x}}^s}, \quad \rho(x) = \rho_1(x, k). \quad (9)$$

Равенство в (9) при $k + s > 1$ либо при $k = 1$, $s = 0$ и $\rho(x) > \cos(\pi/(2n))$ имеет место тогда и только тогда, когда для K , P_n , x , h выполнен один из трех наборов условий:

1° $K_{xh} = A_0$, $P_n(y) = \gamma\{(1-\alpha)T_n(t_1+t_2) + (-1)^k \alpha T_n(t_1-t_2)\}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $|\gamma| = 1$;

2° $K_{xh} \setminus A_0 \neq \emptyset$, $K_{xh} \subset A_1$, $P_n(y) = \gamma T_n(t_1+t_2)$, $|\gamma| = 1$;

3° $K_{xh} \setminus A_0 \neq \emptyset$, $K_{xh} \subset A_2$, $P_n(y) = \gamma T_n(t_1-t_2)$, $|\gamma| = 1$.

Если $k = 1$, $s = 0$ и $\rho(x) = \cos(\pi/(2n))$, то равенство в (9) имеет место тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

4° либо $K_{xh} \subset A_1$, либо $K_{xh} \subset A_2$ и $P_n(x \cos \theta + \sin(\pi/(2n))r_h h \sin \theta) = \pm \sin(n\theta)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $k = n$ неравенство (9) и при $k < n$ и $h = \bar{x}$ неравенства (8) и (9) вытекают из неравенства Шеффера и Даффина и равенство в (9) будет только при $P_n(th) = \gamma T_n(t/r_h)$, $|\gamma| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 основано на следующих леммах.

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ квадрат $K_2 = \{(t_1, t_2) : |t_1| + |t_2| \leq 1\}$. Пусть

$$\bar{T}_n(t_1, t_2) = \frac{\{T_n(t_1 + t_2) + T_n(t_1 - t_2)\}}{2}, \quad \tilde{T}_n(t_1, t_2) = \frac{\{T_n(t_1 + t_2) - T_n(t_1 - t_2)\}}{2}.$$

Пусть $\bar{Q}_n$ и $\tilde{Q}_n$ – полиномы из $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, соответственно четный и нечетный по переменной t_2 .

ЛЕММА 1. Пусть $k, s \geq 0$, $t^1 = (t_1^1, t_2^1) \in \mathbb{R}^2$, $\|\bar{Q}_n\|_{K_2} \leq 1$, $\|\tilde{Q}_n\|_{K_2} \leq 1$. Справедливы следующие неравенства:

$$|\bar{Q}_{n_{t_1^1 t_2^1}^{s+k}}(t_1^1, t_2^1)| \leq |\bar{T}_{n_{t_1^1 t_2^1}^{s+k}}(t_1^1, t_2^1)|, \quad |t_1^1| \geq 1, \quad (10)$$

$$|\tilde{Q}_{n_{t_1^1 t_2^1}^{s+k}}(t_1^1, t_2^1)| \leq |\tilde{T}_{n_{t_1^1 t_2^1}^{s+k}}(t_1^1, t_2^1)|, \quad |t_1^1| \geq \cos \frac{\pi}{2n}, \quad (11)$$

и при $k + s \leq n$, $2 \leq k < n$, и $k \equiv 0 \pmod{2}$ равенство в (10) имеет место только для $\bar{Q}_n = \pm \bar{T}_n$, а при $k \equiv 1 \pmod{2}$, $1 < k + s \leq n$, $1 \leq k < n$, или при $k = 1$, $s = 0$ и $|t_1^1| > \cos(\pi/(2n))$ равенство в (11) имеет место только для $\tilde{Q}_n = \pm \tilde{T}_n$.

ЛЕММА 2. Пусть $Q_n = \bar{Q}_n + \tilde{Q}_n$ и $\|Q_n\|_{K_2} \leq 1$. Тогда, если $\bar{Q}_n = \bar{T}_n$, то $\tilde{Q}_n = c\tilde{T}_n$, $|c| \leq 1$; если $\tilde{Q}_n = \tilde{T}_n$, то $\bar{Q}_n = c\bar{T}_n$, $|c| \leq 1$.

С использованием теоремы 1 и неравенства Сегё для тригонометрических полиномов доказывается

ТЕОРЕМА 2. Пусть $K \subset E^m$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(E^m, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_K \leq 1$, $\|h_i\| = 1$, $i = 1, \dots, k$, $n \geq k > 0$. Тогда

$$|P_n^{(k)}(x_0)[h_1, \dots, h_k]| \leq \frac{T_n^{(k)}(\rho_1(x_0, k))}{r^k(K)} \quad (12)$$

и равенство в (12) имеет место тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- а) $h_i = \varepsilon_i h$, $r_h = r(K)$, $|\varepsilon_i| = 1$, $i = 1, \dots, k$, если $k = n$, то $P_n(th) = \pm T_n(t/r(K))$, если $k < n$, то $\rho(x_0) = \rho_1(x_0, k)$;
- б) если $k < n$ и $r_{x_0} = r(K)$, то $h = \pm \bar{x}_0$, $P_n(th) = \pm T_n(t/r(K))$;
- в) если $r_{x_0} > r(K)$, $n > k > 1$ или $n > k = 1$ и $\rho(x_0) > \cos(\pi/(2n))$, то K , P_n , x_0 , h удовлетворяют условиям пункта 2° или пункта 3° теоремы 1;
- г) если $n > k = 1$, $r_{x_0} > r(K)$ и $\rho(x_0) = \cos(\pi/(2n))$, то K , P_n , x_0 , h удовлетворяют условиям пункта 4° теоремы 1 и $K_{x_0 h} \neq A_0$.

С использованием формул (5), (6) доказывается

ЛЕММА 3. Пусть $k, s > 0$, $k + s \leq n$. Справедливо неравенство

$$M_{n,k}(t)M_{n-k,s}(t) < M_{n,k+s}(t), \quad t \in (-1, 1).$$

Из леммы 3 и неравенства Шеффера–Даффина вытекает

ТЕОРЕМА 3. Пусть $X = l_1^{(m)}$, $K = \{x \in X : |x_i| \leq 1, i = 1, \dots, m\}$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_K \leq 1$. Справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|P_n^{(k)}(x^1)\|_{\mathcal{L}^k} &= \max_{\substack{s, k_i > 0, \sum_{i=1}^s k_i = k, \\ 1 \leq j_i \leq m}} \left| \frac{\partial^k P_n(x^1)}{\partial x_{j_1}^{k_1} \cdots \partial x_{j_s}^{k_s}} \right| \\ &\leq \max_{s, k_i > 0, \sum_{i=1}^s k_i = k} N_{n, k_1}(\rho) N_{n-k_1, k_2}(\rho) \cdots N_{n-\sum_{i=1}^{s-1} k_i, k_s}(\rho), \\ &\quad x^1 \in K, \quad \rho = \rho(x^1), \\ \|P_n^{(k)}(x^1)\|_{\mathcal{L}^k} &\leq N_{n, k}(\rho(x^1)), \quad x^1 \in X. \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть $|x_{j_1}^1| = \max_{1 \leq j \leq m} |x_j^1| = \rho(x^1)$. Тогда равенство в (13) имеет место, только если $k_1 = k$, $P_n(x) = \pm T_n(x_{j_1})$, и если $|x_{j_1}^1| \leq \xi_1^{(k)}$, то $x_{j_1}^1$ является нулем функции $S_n^{(k)}(\cdot)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $X = \ell_\infty^{(2)}$ или $X = \ell_1^{(2)}$ и $K = B \subset X$. Для фиксированного m справедливо асимптотическое равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{\|P_n\|_K \leq 1} \|P_n^{(m)}\|_K}{T_n^{(m)}(1)} = 1.$$

С использованием теоремы 1 и неравенства Гёльдера доказывается

ТЕОРЕМА 5. Пусть $X = \ell_p^{(m)}$, $K = B_{\ell_q^{(m)}}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\|P_n\|_K \leq 1$. Тогда

$$\|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k} \leq \min\left(c^k, \frac{k^k}{k!}\right) \frac{T_n^{(k)}(\rho_1(x, k))}{r^k(K)}, \quad (14)$$

где $c = m^{1/2-1/s}$, при $s = \min(p, q) \geq 2$, $c = m^{1/u-1/2}$, при $u = \max(p, q) \leq 2$, $c = 1$, при $1 \leq q \leq 2 \leq p$, и при $1 \leq p \leq 2 \leq q$.

В последних двух случаях при $k = n$ оценка (14) точная для любого x . Если $1 \leq p \leq 2 < q = \infty$, либо $1 = q < 2 \leq p$, то оценка (14) точная только при $\rho(x) = \rho_1(x, k)$. Если $1 \leq p \leq 2 \leq q < \infty$ или $1 < q \leq 2 \leq p$, то оценка (14) точная только при $r_x = r(K)$ и $\rho(x) = \rho_1(x, k)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В.И. Скалыга, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69:3** (2005), 179–192. [2] В.А. Марков, *О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке*, Изд-во Императорской Академии наук, СПб, 1892. [3] A.C. Schaeffer, R.J. Duffin, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44:4** (1938), 289–297. [4] В.И. Скалыга, *Матем. заметки*, **68:1** (2000), 146–150. [5] В.И. Скалыга, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65:6** (2001), 129–172. [6] G.A. Munoz, Y. Sarantopoulos, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **133** (2002), 515–530. [7] Y. Sarantopoulos, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **110** (1991), 307–312. [8] O.D. Kellogg, *Math. Z.*, **27:1** (1928), 55–64.

В. И. Скалыга
КБ “Аметист”, г. Москва

Поступило
11.11.2005